

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI: 10.25586/RNU.V9I187.21.01.P.003

УДК 621.396.4

В.О. Ключников

---

## МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

---

Установлено, что оптимизация имеющихся и формирование новых сетей передачи данных, которые смогут удовлетворить все увеличивающиеся требования конечных пользователей, становится важнейшей и актуальной задачей. Рассматривается структура телекоммуникационной сети, предлагается математическая модель сети передачи данных, формулируется задача оптимизации сети передачи данных. С целью поиска совокупности оптимальных по Парето решений рассматриваемой задачи адаптируется метод ветвей и границ, а также проводится анализ его вычислительной сложности. Представлены примеры решения задачи оптимизации сети передачи данных предложенным методом и итоги расчетных экспериментов.

*Ключевые слова:* математическая модель, алгоритмы оптимизации, сеть передачи данных, маршрутизация пакетов, множество рекордов, ребро, решение.

V.O. Klyuchnikov

---

## MATHEMATICAL MODEL AND ALGORITHMS FOR OPTIMIZING THE DATA TRANSMISSION NETWORK

---

It has been established that the optimization of existing and the formation of new data transmission network that can meet the ever-increasing requirements of end users is becoming a major and urgent task. The article considers the structure of the telecommunications network, offers a mathematical model of the data transmission network, and formulates the problem of optimizing the SPD. In order to find a set of Pareto-optimal solutions to the problem under consideration, the branch and bound method is adapted, and its computational complexity is analyzed. Examples of solving the problem of optimizing the data transmission network using the presented method and the results of computational experiments are also presented.

*Keywords:* mathematical model, optimization algorithms, data transmission network, packet routing, set of records, edge, solution.

### *Введение*

В традиционных постановках задач оптимизации сети передачи информации (СПД) результативность проектного решения принято оценивать исходя из значения критерия, на который оказывает влияние объем переданной информации или величина задержки пакета. По причине изменения технических свойств сетей (применение широкополосных каналов связи) возникла необходимость развития моделей и методов оптимизации СПД [6]. Подобный переход касается потребности корректного математического описания реальных объектов, а также требований экономического характера.

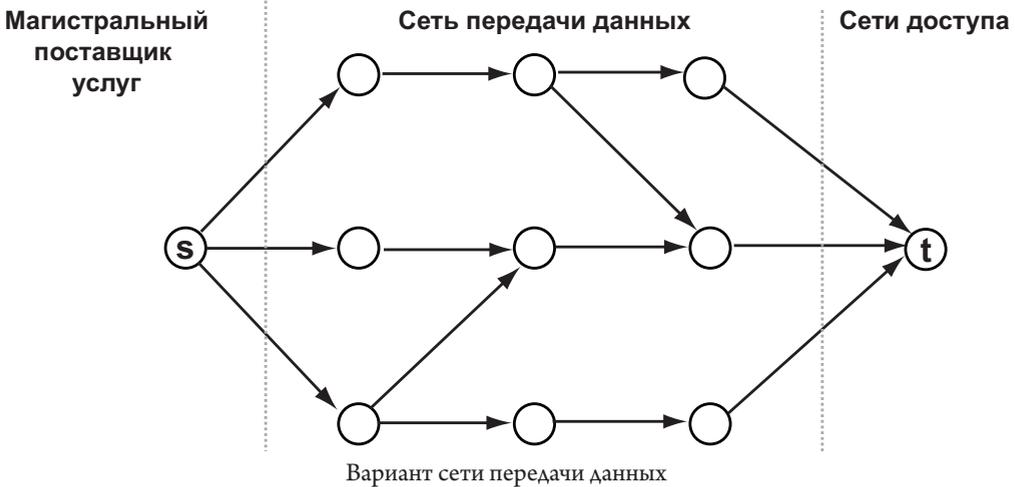
Важной задачей управления СПД на сетевом уровне является управление маршрутизацией пакетов [1]. Данная методика позволяет оптимизировать СПД по единому принци-

пу с учетом вероятностно-временных характеристик передачи информационных пакетов, а также распределения информационных потоков и формирования на их основе системы маршрутных таблиц [8] без учета специфики построения беспроводной транспортной сети связи. Вышесказанное позволяет сделать вывод об актуальности рассматриваемой темы.

#### Математическая модель сети передачи данных

Основой предлагаемой модели сети передачи данных являются традиционные потоковые модели [7]. Известен ориентированный ациклический граф  $G = (V, E)$ , который характеризует текущую сеть, пример которой отражен на рисунке.

$V$  является множеством вершин, которым соответствуют коммутаторы, являющиеся узловыми компонентами сети [5]. Ребро  $(u, v) \in E$  между вершинами  $u$  и  $v$  задает канал связи, обладая положительной пропускной способностью  $c(u, v)$ , а также отражает максимально возможный объем данных, который может быть передан посредством него за единицу времени.



На рисунке наглядно представлен граф с двумя вершинами, среди которых источник информации  $s$  и сток  $t$ . Из  $s$  идут каналы от магистрального оператора, которые соединяют сеть регионального ISP с сетями доступа. В сток идут ребра от коммутаторов с подключенными к ним сетями доступа.

Множество ребер  $E'$  ( $E \cap E' = \emptyset$ ) характеризует все каналы передачи данных, которые могут быть построены. Для каждого  $(u, v) \in E'$  обозначена пропускная способность  $c'(u, v)$  и стоимость построения  $p'(u, v)$ .

Проведем нумерацию всех ребер из множеств  $E'$  произвольным образом разными целыми числами от 1 до  $|E'|$ , приняв обозначение  $e_i$  для ребра под номером  $i$  из  $E'$ . Моделирование транспортировки данных в сети происходит посредством функции потока:

$$f_G: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $\times$  – декартово произведение;  $\mathbb{R}$  – множество вещественных чисел.

Модель и алгоритмы оптимизации сети передачи данных

Величина  $f_G(u, v)$  отражает объем данных, который передается за единицу времени по каналу связи определенного ребра между вершинами  $u$  и  $v$ . Функция  $f_G$  удовлетворяет ряду условий, среди которых:

- 1) лимит пропускной способности:  $\forall u, v \in V: f_G(u, v) \leq c(u, v)$ ;
- 2) антисимметричность:  $\forall u, v \in V: f_G(u, v) = -f_G(v, u)$ ;
- 3) сохранение потока:  $\forall u \in V \setminus \{s, t\}: \sum_{v \in V} f_G(u, v) = 0$ .

Через  $|f_G|$  обозначим величину потока в графе  $G$ , который отражает возможный объем данных, переданных из источника в сток за единицу времени. В этом случае  $|f_G|$  можно рассчитать посредством формулы

$$|f_G| = \sum_{v \in V} f_G(s, v). \quad (2)$$

Через  $|F_G|$  принимаем обозначение максимальной величины потока в графе  $G$  среди возможных значений  $f_G$ . Планом проектирования сети передачи данных является множество ребер  $E^* \in E'$ , отвечающее каналам связи, которые будут достроены. В ходе принятия решения о реализации плана проектирования исходная сеть подвергается трансформации в сеть, которая характеризуется графом  $G^* = (V, E \cup E^*)$ .

Стоимость построения равна  $\sum_{(u, v) \in E'} p'(u, v)$ . При этом величина максимальной пропускной способности –  $|F_{G^*}|$ . Важно обратить внимание, что рассмотренная выше математическая модель применима ко многим предметным областям, где затрагивается оптимизация структуры сетей разной природы.

*Задача оптимизации сети передачи данных*

Исходя из заданных ациклических ориентированных графов  $G = (V, E)$  и множества ребер  $E' (E \cap E' = \emptyset)$ , матриц пропускных способностей  $c(u, v)$  и  $c'(u, v)$ , а также матрицы стоимости ребер  $p'(u, v)$  необходимо найти множество оптимальных по Парето решений задачи  $\min_{E^*} (Q_1(E^*)), \min_{E^*} (Q_2(E^*))$ .

Проанализировав расчетную сложность представленной задачи, можно сделать вывод, что она NP-трудна. Множество оптимальных по Парето решений экспоненциально зависит от размерности задачи (число компонентов в множестве  $E'$ ).

Для нахождения максимальной пропускной способности сети использовался модифицированный алгоритм «проталкивания предпотока» – «поднять в начало» [4]. Он представляет собой наиболее оперативный метод решения задачи о максимальном потоке (сложность  $O|V|^3$ ) и является простым в реализации.

*Нахождение множества Парето задачи оптимизации сети передачи данных  
методом ветвей и границ*

Фиксированными для рассматриваемого подмножества решений являются ребра из  $E'$ , для которых определено, будут они достроены или нет.  $S$ -множеством с фиксированными ребрами рассматриваемого подмножества решений обозначим те, которые предположительно достроятся. Все вершины дерева ветвления отвечают подмножеству  $D$  области допустимых решений и включают в себя нижнюю  $L_p$  и верхнюю  $H_p$  оценки значения пары  $(Q_1(E^*), Q_2(E^*))$  на рассматриваемом подмножестве.

## Телекоммуникационные системы

Нулевой уровень дерева, являющийся корневой вершиной, отвечает всей области допустимых решений  $D$ , а каждая вершина уровню  $k > 0$  – подмножеству, которое возникает в ходе фиксирования первых  $k$  ребер (из множества  $E'$ ) сети. Из всех вершин (кроме листьев дерева ветвления, где отмечаются ребра из  $E'$ ) осуществляется ветвление на два подмножества, то есть происходит дихотомическое деление.

Первое из них возникает посредством фиксирования очередного ребра, исключая его добавление в  $S$ , то есть рассматриваемое ребро не предполагает построение в сети. Второе возникает посредством фиксирования очередного ребра с добавлением его в  $S$ , то есть оно предусматривает достраивание.

Функция ветвления является рекурсивной, на ее вход подается номер ребра  $k$  для исследования (при вызове функции с характеристикой  $k$  ребра с номерами от 1 до  $k - 1$  фиксированы). Алгоритм запускается посредством вызова функции ветвления с аргументом 1.

Каждая вершина дерева ветвления предполагает вычисление верхней  $H_p$  и нижней  $L_p$  оценки решения  $p$ . Решению  $r \in R$  отвечает оценка  $(Q_1(r), Q_2(r))$ , если:

1)  $L_p > (Q_1(r), Q_2(r))$ , тогда решение  $r \in R$  ликвидируется из множества рекордов, так как имеется доминирующее решение;

2)  $(Q_1(r), Q_2(r)) > H_p$ , в этом случае ветвление из имеющейся вершины оканчивается, и рассматриваются иные подмножества решений;

3)  $r \in R : (Q_1(r), Q_2(r)) > H_p$ , а рассматриваемая вершина дерева ветвления является листом, в этом случае решение  $p$  добавляется в множество рекордов  $R (R = R \cup \{p\})$ . Иначе продолжается ветвление из текущей вершины посредством вызова функции ветвления с аргументом  $k + 1$ .

Таким образом, алгоритм множества  $R$  включает в себя все решения, оптимальные по Парето. Специфика заключается в том, что у предложенного алгоритма решения задачи оптимизации сети передачи данных при его реализации в множество рекордов добавляются решения с зафиксированными ребрами.

По итогам расчетных экспериментов можно сделать выводы, что при добавлении промежуточной оценки множество рекордов сильно разрастается. Подобная ситуация приводит к значительному увеличению времени работы алгоритма.

*Оценка вычислительной сложности алгоритма*

При худших обстоятельствах время работы метода ветвей и границ сопоставим с алгоритмом полного перебора. Метод ветвей и границ при подобном варианте работы не в состоянии отсечь ни одного подмножества решений и выстроить дерево ветвлений, куда входят уровни  $|E'|$ .

При этом уровень глубины  $i$  предполагает  $2^i$  вершины. В результате вычислительная сложность алгоритма аналогична методу полного перебора и составляет порядка  $E' \cdot 0(2^{|E'|}) \cdot |V|^3$ .

Хотя расчетная сложность одинакова, среднее время работы метода ветвей и границ существенно меньше в отличие от алгоритма полного перебора. Требования по памяти рассматриваемого алгоритма обладают экспоненциальной зависимостью от размера входных данных, так как следует хранить все недоминируемые решения, которые удалось выявить при работе.

### Модель и алгоритмы оптимизации сети передачи данных

В противном случае в памяти будет храниться  $2^{|E|}$  решений. В результате можно говорить о том, что требования по памяти составляют  $O(2^{|E|} \cdot |E'|)$ .

#### Результаты вычислительных экспериментов

Итоги тестирования программной реализации метода ветвей и границ осуществлялись на языке C++. Расчетные эксперименты включали в себя поиск всего множества оптимальных по Парето решений для 100 разных сетей передач данных, которые были случайным образом сгенерированы, число ребер в множестве  $E'$  которых составило 15, 20, 25, 30, 35 и 40.

В таблице отражены статистические значения показателя  $t$ , отражающего минимальное и максимальное время работы в секундах в тестовом наборе задач.

#### Время работы метода ветвей и границ

$ E' $	$ V $	$ E $	$t, c$
15	[7;11;9]	[18;45;35]	[0.008;0.205;0.057]
20	[8;11;9]	[24;45;35]	[0.032;3.693;0.493]
25	[9;12;10]	[30;53;40]	[0.062;54.595;5.01]
30	[9;14;12]	[30;72;52]	[0.312;897.448;62.843]
35	[10;14;13]	[37;72;63]	[0.27;3541.633;297.496]
40	[11;16;13]	[45;93;72]	[11.886;65203.957;2689.295]

#### Заключение

В рамках исследования была построена математическая модель сети передачи данных в виде взвешенного ориентированного ациклического графа. Она принимает во внимание особенности современных сетей.

Кроме того, осуществлен анализ вычислительной сложности представленной модели. Проведена адаптация метода ветвей и границ, чтобы осуществлять поиск множества парето-оптимальных решений задачи оптимизации сети передачи данных. Также выполнена оценка трудоемкости и представлены итоги расчетных экспериментов.

#### Литература

1. Аганесов А.В. Модель сети спутниковой связи на основе протокола случайного множественного доступа S-Aloha // Системы управления, связи и безопасности. 2015. № 2. С. 99–134.
2. Ключников В.О. Выбор оптимального протокола маршрутизации в беспроводных сенсорных сетях передачи данных // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2020. Т. 8, № 2. DOI: 10.26102/2310-6018/2020.29.2.038
3. Ключников В.О. Методика создания быстро развертываемой сети связи на основе радиорелейных линий // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2020. Т. 8, № 3. DOI: 10.26102/2310-6018/2020.30.3.032
4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р, Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е изд. М.: Вильямс, 2006. 1296 с.
5. Марголис Б.И., Музанна М.М. Решение задачи оптимальной маршрутизации по критерию средней задержки // Программные продукты и системы. 2013. № 3. С. 202–205.

6. Попов А.И., Чуднов А.М. Совместное управление маршрутизацией и канальной структурой мобильной пакетной сети радиосвязи на основе оптимизации распределения информационных потоков в решении задачи технического обеспечения средств связи и АСУ // Проблемы технического обеспечения войск в современных условиях: Труды IV Межвузовской науч.-практ. конф. СПб.: Военная академия связи имени маршала Советского Союза С.М. Буденного, 2019. С. 343–347.
7. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974. 520 с.
8. Чуднов А.М., Курашев З.В. Принципы формирования маршрутных таблиц на основе оптимизации распределения потоков в сети передачи данных // Научные технологии в космических исследованиях Земли. 2017. Т. 9, № 6. С. 46–51.

### Literatura

1. Aganesov A.V. Model' seti sputnikovoj svyazi na osnove protokola sluchajnoy mnozhestvennogo dostupa S-Aloha // Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti. 2015. № 2. S. 99–134.
2. Klyuchnikov V.O. Vybhor optimal'nogo protokola marshrutizatsii v besprovodnykh sensornykh setyakh peredachi dannykh // Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii. 2020. Т. 8, № 2. DOI: 10.26102/2310-6018/2020.29.2.038
3. Klyuchnikov V.O. Metodika sozdaniya bystro razvertyvaemoy seti svyazi na osnove radiorelejnykh liniy // Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii. 2020. Т. 8, № 3. DOI: 10.26102/2310-6018/2020.30.3.032
4. Kormen T., Lejzerson Ch., Rivest R., Shtajn K. Algoritmy: postroenie i analiz. 2-e izd. M.: Vil'yams, 2006. 1296 s.
5. Margolis B.I., Muzanna M.M. Reshenie zadachi optimal'noj marshrutizatsii po kriteriyu srednej zaderzhki // Programmnye produkty i sistemy. 2013. № 3. S. 202–205.
6. Попов А.И., Чуднов А.М. Совместное управление маршрутизацией и каналной структурой мобильной пакетной сети радиосвязи на основе оптимизации распределения информационных потоков в решении задачи технического обеспечения средств связи и АСУ // Проблемы технического обеспечения войск в современных условиях: Труды IV Межвузовской науч.-практ. конф. СПб.: Военная академия связи имени маршала Советского Союза С.М. Буденного, 2019. С. 343–347.
7. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974. 520 с.
8. Чуднов А.М., Курашев З.В. Принципы формирования маршрутных таблиц на основе оптимизации распределения потоков в сети передачи данных // Научные технологии в космических исследованиях Земли. 2017. Т. 9, № 6. С. 46–51.

DOI: 10.25586/RNUV9187.21.01.P.008

УДК 621.374.4

**С.Ф. Аткишкин**

## УДВОИТЕЛЬ СВЕРХВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ НА КВАДРАТУРНЫХ МОСТАХ И БАЛАНСНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ

Рассматривается математическая модель удвоителя сверхвысокой частоты на основе нелинейных параметров рассеяния в режиме большого сигнала, построенного на квадратурных мостах, балансных преобразователях и синфазных сумматорах мощности. Приводятся выражения для входного и выходного коэффициентов отражения, амплитуды паразитных гармоник и основного сигнала.