

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI: 10.25586/RNU.V9I187.21.02.P.003

УДК 519.622

Р.В. Киричевский, А.В. Скринникова

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА РУНГЕ – КУТТЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДУ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Рассмотрено решение задачи Коши для ОДУ первого порядка с разрывом 2-го рода по переменной x в правой части методом Рунге – Кутты. Установлено, что стандартные подходы Каратеодори, Филиппова не применимы для численных расчетов таких задач. Анализ решений численных примеров показал, что метод Рунге – Кутты целесообразно применять с уменьшением сетки разбиения в окрестности точки разрыва по определенному правилу, предложенному в работе.

Ключевые слова: численные методы решения задачи Коши, абсолютная погрешность, метод Рунге – Кутты.

R.V. Kirichevskij, A.V. Skrinnikova

IMPLEMENTATION OF THE RUNGE – KUTTA METHOD FOR SOLVING ODES WITH A DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE

In this paper considers the solution of the Cauchy problem for first-order ODEs with a second-order discontinuity by the variable x on the right-hand side using the Runge – Kutta method. The standard Karateodori and Filippov approaches are not applicable for numerical calculations of such problems. An analysis of the solutions the numerical examples shows that the Runge – Kutta method should be applied with decreasing the mesh in the neighborhood of the discontinuity point according to a certain rule proposed in the paper.

Keywords: numerical methods for solving the Cauchy problem, absolute error, Runge – Kutta method.

Вводные замечания

Специалистами, занимающимися разрывными системами, было предложено трактовать дифференциальные уравнения (ДУ) с разрывной правой частью как уравнения с многозначной правой частью или дифференциальные включения [7]. В настоящее время такой подход к определению решений разрывных систем является наиболее употребительным, и не удивительно, почему начало интенсивного развития теории дифференциальных включений, теории ДУ с разрывной правой частью и теории автоматического регулирования совпадают по времени.

Одно из направлений исследования систем ДУ с разрывной правой частью обосновано в работах М.А. Айзермана и Е.С. Пятницкого [2]. Это направление условно назвали физическим в отличие от математического направления, развитого, в частности, в работах А.Ф. Филиппова [6].

Из анализа работ, посвященных различным методам исследования качественного поведения разрывных систем, следует отметить еще один содержательный и общий метод эквивалентного управления, получивший развитие в работах В.И. Уткина [7].

Киричевский Ростислав Викторович

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры пожарной безопасности Института гражданской защиты Луганского государственного университета имени Владимира Даля. Сфера научных интересов: математическое моделирование, численные методы, программные комплексы, САПР в механике эластомеров. Автор 70 опубликованных научных работ.

E-mail: rost71@mail.ru

Скринникова Анна Владимировна

старший преподаватель кафедры фундаментальной математики Луганского государственного педагогического университета. Сфера научных интересов: биотехнические системы, системный анализ, математическое моделирование, численные методы, методика преподавания математических дисциплин. Автор 48 опубликованных научных работ.

E-mail: ann3005@rambler.ru

Начало систематического изучения разрывных систем относится к 60-м гг. XX в. в связи с возникновением и развитием теории автоматического регулирования. В настоящее время существуют такие системы релейного действия, в которых хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины в некоторых точках процесса выходная величина изменяется скачкообразно. Такое звено называется релейным, где статическая характеристика имеет точки разрыва. Для определения этих характеристик используется ДУ с разрывной правой частью.

Дадим обзор некоторых подходов к решению таких уравнений. По теореме Пеано, задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = x_0 \quad (1)$$

локально разрешима в случае непрерывной функции $f(x, y)$. Иначе утверждение теоремы Пеано в общем случае неверно [3]. Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет определенным условиям – имеет разрыв по y или является кусочно-непрерывной по x – подходы к решению ОДУ предлагаются в научной литературе [7, 9]. Иногда используют известные численные методы, меняя сетку разбиения при подходе к точке разрыва, значение функции в этой точке доопределяют по А.Ф. Филиппову [6]. Однако общего алгоритма для построения сетки не предложено.

Для устранения разрыва 1-го рода по x Л. Лопесом и Н. Буоно предложен подход, который заключается в решении уравнения [9]

$$y_{i+1}(\sigma h) = y_i + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j(\sigma) \Delta^j f_{i-j}, \quad ,$$

где $\sigma \in (0, 1)$, $\gamma_j(\sigma)$ – коэффициенты, взятые из метода Адамса – Башфорта, h – шаг, $\Delta f_{i-1} = f_t - f_{i-1}$, $\Delta^2 f_{i-2} = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$, ... – конечные разности. Для 4-го порядка точности имеем:

Реализация метода Рунге-Кутты для решения ОДУ с разрывной правой частью

$$y_{i+1}(\sigma h) = y_i + h \left(\Delta^0 f_i \sigma + \Delta^1 f_{i-1} \frac{\sigma^2}{2} + \Delta^2 f_{i-2} \left(\frac{\sigma^3}{6} + \frac{\sigma^2}{4} \right) + \Delta^3 f_{i-3} \left(\frac{\sigma^4}{24} + \frac{\sigma^3}{6} + \frac{\sigma^2}{6} \right) + \Delta^4 f_{i-4} \left(\frac{\sigma^5}{120} + \frac{\sigma^4}{16} + \frac{11\sigma^3}{72} + \frac{\sigma^2}{8} \right) \right).$$

Однако для решения ОДУ с разрывом 2-го рода такой подход не работает.

А.Ф. Филипповым разработаны мощные инструменты для анализа существования решений ОДУ и систем ДУ с разрывом. Однако подходы к численному решению ОДУ, если $f(x, y)$ имеет разрыв 2-го рода по x , не представлены в открытом доступе.

Предложим подход к решению ОДУ с разрывной правой частью по x методом Рунге – Кутты со специально подобранным шагом в окрестности точки разрыва.

Описание предложенного подхода

Для численного решения (1) применим метод Рунге – Кутты в случаях, когда $f(x, y)$ имеет вид дробно-рациональной, -иррациональной, -обратной тригонометрической функции, то есть имеет разрыв 2-го рода по x . В качестве расчетных формул применим [2]:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (2)$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad (3)$$

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}), \end{cases} \quad (4)$$

$x_i = x_0 + ih, y_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), h – шаг.

Отметим, что для явных методов Рунге – Кутты 4-го порядка радиус области абсолютной устойчивости, если правая часть ОДУ удовлетворяет условию Липшица, определяется равенством

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^5),$$

которое следует из того, что $e^{\lambda y}$ является точным решением задачи $y' = \lambda f(x, y)$, $y_0 = 1$, и из равенств $y_{n+1} = R(\lambda h)y_n$, $e^z - R(z) = O(z^5)$. Выбор параметров выражения (4) можно проводить не только из условия минимальной локальной погрешности, но и из расширения области устойчивости (для ОДУ с разрывом 2-го рода в правой части, исключая точки разрыва).

Численное решение дифференциальных уравнений

Проверим различные варианты при подходе к точке разрыва: за один шаг интервал разбиения уменьшим на 20, 50 и 80%. Затем после «перескока» точки разрыва пересчет осуществим уже с обычным шагом. В случае поиска решения при наличии одной точки разрыва наилучшие решения в сравнении с точными решениями (абсолютные погрешности минимальны) дал вариант: к точке x_{i-1} , предшествующей точке разрыва x_p , добавим $0,2h$, при этом в формулах (4) для точек x_{i-1} , x_i , x_{i+1} шаг остается $0,2h$. В точке разрыва решение доопределим значением, следующим сразу за точкой разрыва.

Применение предложенного подхода, когда нет точного решения, предлагаем с использованием правила Рунге: формулы для оценки погрешности решения ОДУ методом Рунге – Кутты

$$\frac{|y_{2i}(h) - y_i(2h)|}{2^p - 1} < \varepsilon, \quad (5)$$

где p – порядок метода Рунге – Кутты, в нашем случае $p = 4$, ε – заданная точность. То есть для обеспечения требуемой точности применим выбор шага методом двойного просчета, чтобы для каждой точки численного решения значения отличались на величину, не превышающую заданной погрешности.

Нетрудно показать, что погрешность этого метода на каждом шаге есть величина порядка h^5 в предложении, что $f(x, y) \in C_5(G)$, где G – область, на которой отыскивается решение задачи Коши.

Ниже приведено несколько примеров, иллюстрирующих точность, предложенного подхода.

Численный пример 1

Рассмотрим решение задачи Коши

$$y' = \frac{1}{1-2x}, \quad y(0) = 0, \quad (6)$$

на отрезке $[0; 3]$, приняв шаг $h = 0,05$ и $h = 0,025$ [1–8].

Задача (6) представляет собой ОДУ с разделяющимися переменными. Его решение $y = -0,5 \ln |1 - 2x|$ легко получается интегрированием правой части. Правая часть (6) $f(x, y) = \frac{1}{1-2x}$ имеет разрыв 2-го рода в точке $x = 0,5$, не является кусочно-непрерывной и удовлетворяет условиям Каратеодори [7]: 1) $f(x, y)$ непрерывна почти $\forall x$, 2) множество точек разрыва правой части имеет нулевую меру Лебега, 3) существует локально суммируемая функция $m: R \rightarrow R$ такая, что при каждом фиксированном y почти $\forall x$ выполняется неравенство $\|f(x, y)\| \leq m(x)$.

Кривые решений задачи (6) представлены на рисунке 1: точного, с шагом $0,025$ и $0,05$ методом Рунге – Кутты. Решения методом Рунге – Кутты, полученные при уменьшении сетки разбиения в два раза, дали абсолютные погрешности вычислений минимум в 3,9 раза меньше, кроме точки, ближайшей к разрыву, хотя на рисунке 1 этого не заметно.

Реализация метода Рунге-Кутты для решения ОДУ с разрывной правой частью

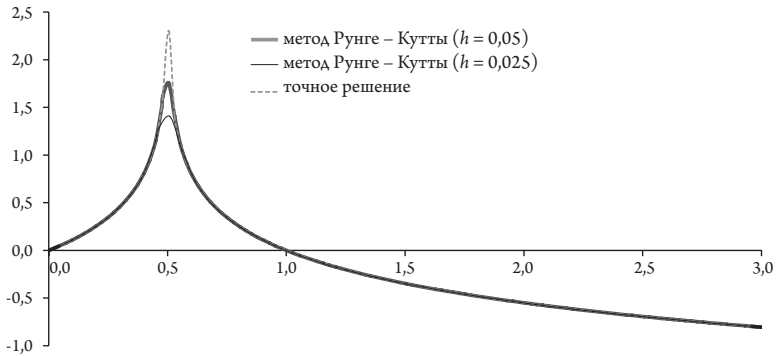


Рис. 1. Графики решений задачи (6)

Численный пример 2

Рассмотрим решение задачи Коши

$$y' = \frac{x}{x-1}, \quad y(0) = 0, \quad (7)$$

на отрезке $[0;3]$, приняв шаг $h = 0,05$ и $h = 0,025$.

ДУ задачи (7) аналогично (6). Его численное решение также можно сравнить с точным. Различие заключается в выпуклости решения. Кривые решений задачи (7) представлены на рисунке 2: точного, с шагом 0,025 и 0,05 методом Рунге – Кутты. Решение методом Рунге – Кутты, полученное при уменьшении сетки разбиения в два раза, даже на графике (рис. 2) заметно ближе к точному. Максимальная абсолютная погрешность после точки разрыва с шагом 0,025 составила 0,03939.

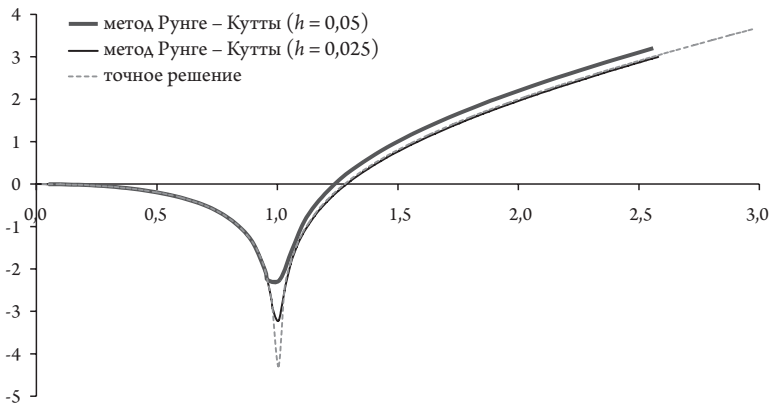


Рис. 2. Графики решений задачи (7)

Численный пример 3

Рассмотрим решение задачи Коши

$$y' = \frac{x}{\frac{\pi}{4} - \arcsin(2x)}, \quad y(0) = 0, \quad (8)$$

на отрезке $[0;0,5]$, приняв шаг $h = 0,005$ и $h = 0,01$.

Численное решение дифференциальных уравнений

Задача представляет собой ОДУ с разделяющимися переменными. Правая часть (8) имеет разрыв 2-го рода в точке $x = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,353553$, не является кусочно-непрерывной, удовлетворяет условиям Каратеодори. Точного решения нет, поскольку интеграл от правой части не выражается через элементарные функции, но представляет собой при подстановке $\sin x = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ интегральную экспоненту.

На рисунке 3 представлены решения задачи (8) при $h = 0,01$ стандартным методом Рунге – Кутты и по предложенному подходу с измененной сеткой разбиения при $h = 0,01$ и $h = 0,005$ методом Рунге – Кутты. К концу интервала абсолютная погрешность между решением с шагом 0,005 и решениями с шагом 0,01 увеличилась на 0,0714 при применении стандартного метода Рунге – Кутты.

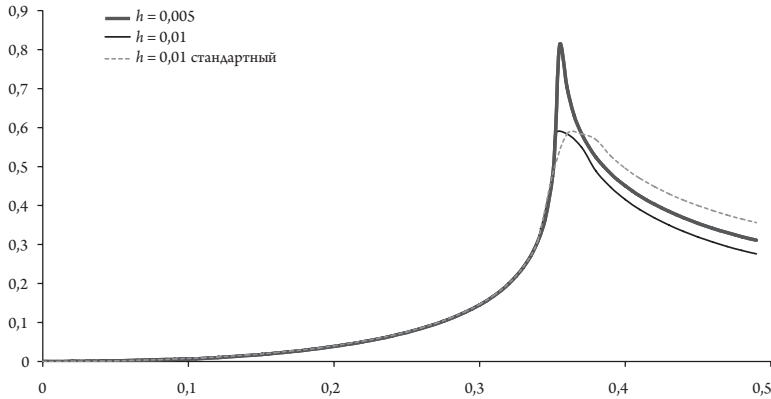


Рис. 3. Графики решений задачи (8)

Заключение

В работе проанализированы решения задачи Коши на примерах ОДУ первого порядка с разрывом 2-го рода в правой части на предмет сходимости численного решения в окрестности точки разрыва и после нее: использование метода Рунге – Кутты с измененной сеткой и коэффициентами в окрестности точки разрыва целесообразно. При этом в формулах (4) для точек x_{i-1}, x_i, x_{i+1} шаг равен $0,2h$, поскольку он дал наилучшие решения в сравнении с точными решениями (абсолютные погрешности минимальны), в точке разрыва решение доопределяется значением, следующим сразу за точкой разрыва. Предложенная схема изменения шага сетки представлена на рисунке 4.

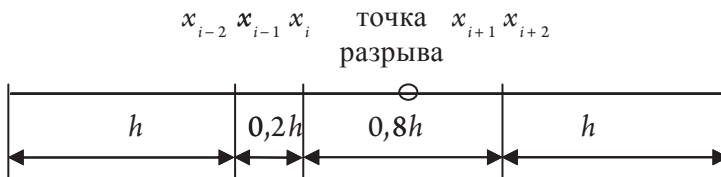


Рис. 4. Схема изменения шага

Литература

1. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 8-е изд. (эл.). М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 639 с.
3. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2005. 384 с.
4. Егоров А.И. Теорема Коши и особые решения дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 2008. 254 с.
5. Киричевский В.В., Левчук С.А., Киричевский Р.В. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений: монография. Киев: Наукова думка, 2005. 316 с.
6. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 226 с.
7. Финогенко И.А. О дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2010. Т. 3, № 2. С. 88–102.
8. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.
9. Buono N.D., Lopez L. Direct Event Location Techniques Based on Adams Multistep Methods for Discontinuous ODEs // Applied Mathematics Letters. 2015. Vol. 49. Pp. 152–158. DOI: 10.1016/j.aml.2015.05.012.

References

1. Babenko K.I. (1986) *Osnovy chislennogo analiza* [Basics of Numerical Analysis]. Moscow, Nauka Publishing. 744 p. (in Russian).
2. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. (2015) *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. 8th Digital Ed., Moscow, Publishing House “BINOM. Laboratoriya Znaniy”. 639 p. (in Russian).
3. Egorov A.I. (2005) *Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya s prilozheniyami* [Ordinary Differential Equations with Applications]. 2nd Rev. Ed., Moscow, Fizmatlit Publishing. 384 p. (in Russian).
4. Egorov A.I. (2008) *Teorema Koshi i osobyte resheniya differentsial'nykh uravnenij* [Cauchy Theorem and Special Solutions of Differential Equations]. Moscow, Fizmatlit Publishing. 254 p. (in Russian).
5. Kirichevskij V.V., Levchuk S.A., Kirichevskij R.V. (2005) *Chislennyye metody resheniya differentsial'nykh i integral'nykh uravnenij: monografiya* [Numerical Methods for Solving Differential and Integral Equations]. Kiev, “Naukova dumka” Publishing. 316 p. (in Russian).
6. Filippov A.F. (1985) *Differentsial'nyye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* [Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Part]. Moscow, Nauka Publishing. 226 p. (in Russian).
7. Finogenko I.A. (2010) O differentsial'nykh uravneniyakh s razryvnoy pravoy chast'yu [On Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Part]. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”*, vol. 3, no. 2, pp. 88–102 (in Russian).
8. Chesari L. (1964) *Asimptoticheskoe povedenie i ustojchivost' reshenij obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij* [Asymptotic Behavior and Stability of Solutions of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Mir Publishing. 477 p. (in Russian).
9. Buono N.D., Lopez L. (2015) Direct Event Location Techniques Based on Adams Multistep Methods for Discontinuous ODEs. *Applied Mathematics Letters*, vol. 49, pp. 152–158. DOI: 10.1016/j.aml.2015.05.012.