Секция 1
ТОЧНЫЕ, ЕСТЕСТВЕННЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 004.424

В.К. Астахов,
Тамбовский филиал Российского нового университета

РЕАЛИЗАЦИЯ ГЕНЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ ПУАССОНА И БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА В DELPHI

Разработана и реализована программа, генерирующая потоки сигналов по двум случайным законам Пуассона и Бозе–Эйнштейна в среде программирования Delphi. Данная программа позволяет исследовать вероятностно-временные характеристики различных систем, в которых различные сигналы имеют вероятностный характер и подчиняются указанным случайным законам. Программа состоит из двух основных частей – блока генераторов случайных чисел Пуассона и Бозе–Эйнштейна и блока статистической обработки, вычисления числовых характеристик и построения гистограмм. Программа может запускаться непосредственно из операционной системы Windows, и для практической работы с ней не требуется среда программирования Delphi. Программа имеет удобный и понятный пользовательский интерфейс.

Ключевые слова: датчик случайных чисел, случайные законы, равномерный, Пуассона, Бозе–Эйнштейна, среда программирования Delphi.

V.K. Astahov,
Tambov Branch of the Russian New University

IMPLEMENTATION OF POISSON AND BOSE–EINSTEIN RANDOM NUMBER GENERATORS IN DELPHI

A program has been developed and implemented that generates signal streams according to two random Poisson and Bose–Einstein laws in the Delphi programming environment. This program allows you to investigate the probabilistic-temporal characteristics of various systems, in which various signals have a probabilistic nature and obey the specified random laws. The program consists of two main parts – a block of Poisson and Bose–Einstein random number generators and a block of statistical processing, calculating numerical characteristics and constructing histograms. The program can be run directly from the Windows operating system and does not require the Delphi programming environment to work with it. The program has a convenient and intuitive user interface.

Keywords: random number generator, random laws, uniform, Poisson, Bose–Einstein, Delphi programming environment.

Генераторы случайных чисел Пуассона и Бозе–Эйнштейна реализованы на базе датчика псевдослучайных чисел randomize (PRNG-Pseudo-random Number Generator). PRNG-датчик представляет собой алгоритм, позволяющий генерировать длинные последовательности чисел, свойства которых близки к свойствам случайных чисел [2].

Плотность вероятности для распределения Пуассона имеет вид с соответствующими параметрами [1]:

$$P(X=n)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\,. \tag{1}$$

Идея реализованного в данной программе алгоритма состоит в выборке с отклонением при использовании нормального и экспоненциального распределения [2]. Для генерирования случайных чисел, распределенных по законам Пуассона, необходимо задать (ввести) на форме соответствующие параметры (для генератора Пуассоновских чисел) – параметр интенсивности (L), объем выборки (N), число интервалов (r) – и нажать правую кнопку «Генерировать» (рис. 1).

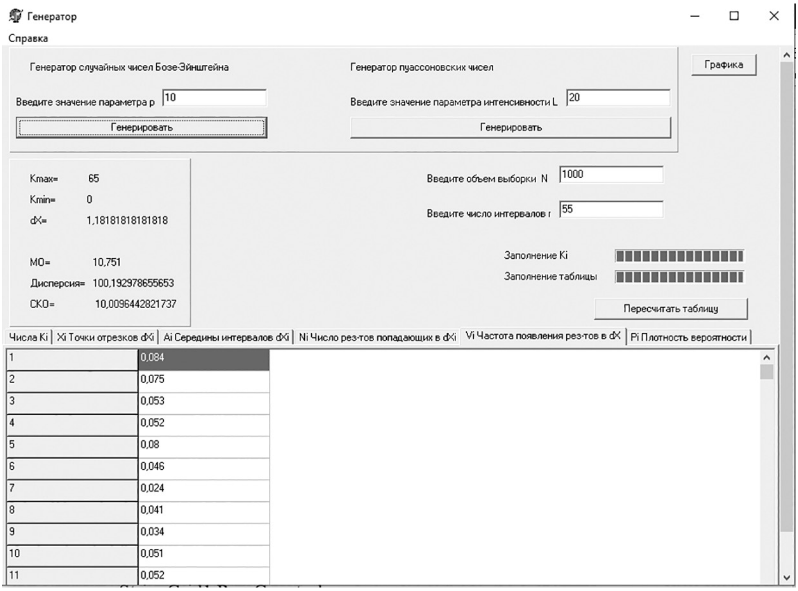

Рис. 1

Фрагмент кода программы представлен ниже.

```
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
var
  P,k,i: integer;
  a,b,n: real;
BEGIN
   ProgressBar1.Min:=0;
   ProgressBar1.Position:=0;
   ProgressBar2.Position:=0;
```

```
  n:=StrToFloat(Edit2.Text);
  k:=StrToInt(Edit3.Text);
  ProgressBar1.Max:=k;
  StringGrid1.RowCount:=k;
  randomize;
  for i:=1 to k do begin
  ProgressBar1.Position:=i;
  b:=0;
  a:=0;
  b:=exp(-n);
  P:=0;
  a:=random;
  if a<b then
      begin
      StringGrid1.Cells[0,i-1]:=IntToStr(i);
      StringGrid1.Cells[1,i-1]:=FloatToStr(P);
      end
      else begin
          repeat
              a:=a*random;
              P:=P+1;
              if P>100 then begin
                      ShowMessage('P>100! STOP!');
                      break;
                      end;
          until a<b;
        StringGrid1.Cells[0,i-1]:=IntToStr(i);
        StringGrid1.Cells[1,i-1]:=FloatToStr(P);
        end;
  end;
Form1.Button4Click(Sender);
end;
```

При нажатии на кнопку «Графика» программа построит диаграмму распределения потока случайных чисел для закона Пуассона. Интерфейс программы позволяет строить график как в двухмерном изображении, так и в трехмерном, менять тип графика (отображать только гистограмму или только огибающую линию, либо совмещать их – кнопка «Наложить графики»), а также показывать числовые значения плотности вероятности в каждом интервале при включении галочки «маркеры» (рис. 2–6).

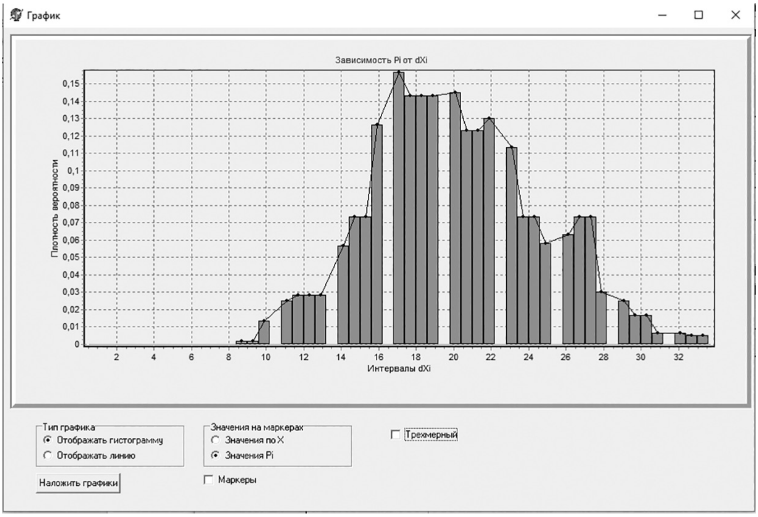

Рис. 2

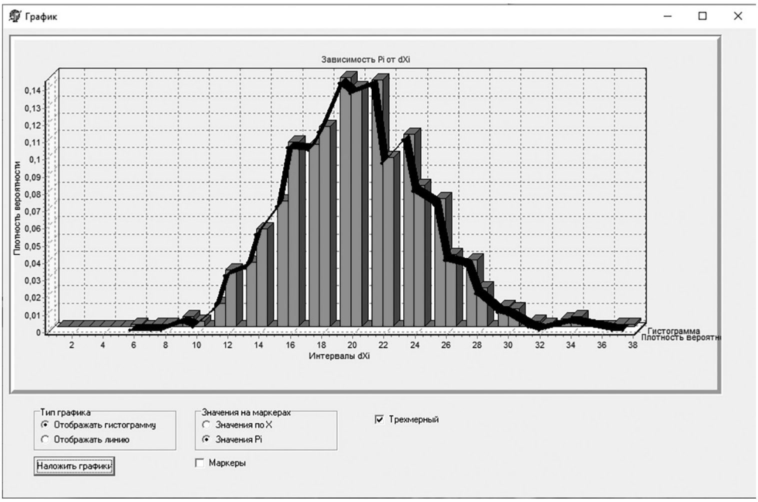

Рис. 3

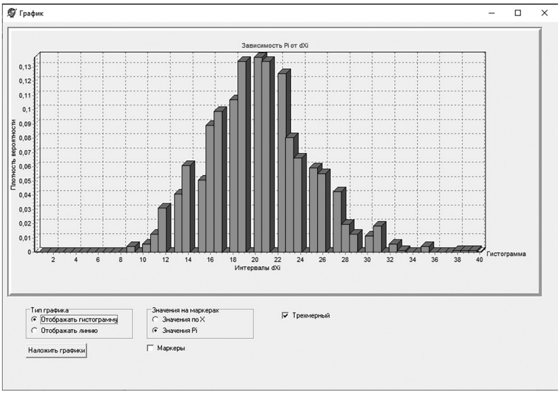

Рис. 4

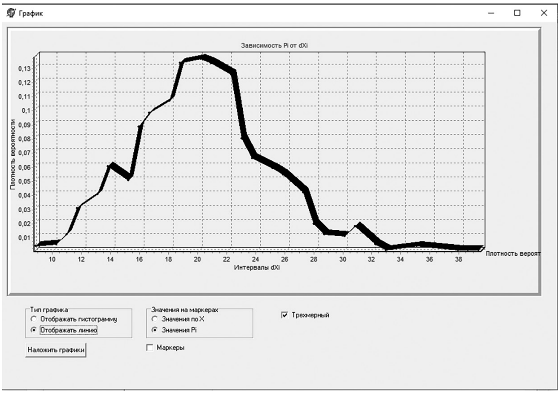

Рис. 5

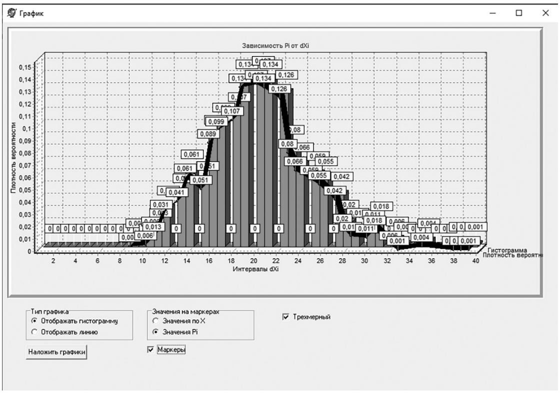

Рис. 6

Распределение Бозе–Эйнштейна чаще всего применяется в квантовой физике и описывает квантовые частицы с целым спином – бозоны (например, фотоны) [1]:

$$\langle N\rangle=\left(e^{(E-\mu)/kT}-1\right)^{-1}. \qquad (2)$$

В программе реализована зависимость N от параметра $p=(E-\mu)/kT$. Для генерирования случайных чисел, распределенных по закону Бозе–Эйнштейна, необходимо задать (ввести) на форме значение параметра p (рис. 1). Фрагмент кода программы представлен ниже.

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var
  k,i: integer;
  n,a2,b: real;
  P2: real;
begin
   ProgressBar1.Min:=0;
   ProgressBar1.Position:=0;
   ProgressBar2.Position:=0;
   n:=StrToFloat(Edit1.Text);
   k:=StrToInt(Edit3.Text);
   StringGrid1.RowCount:=k;
   ProgressBar1.Max:=k;
   randomize;
   for i:=1 to k do begin
   ProgressBar1.Position:=i;
   b:=0;
   a2:=0;
   P2:=0;
   b:=1/(1+n);
   a2:=random;
   P2:=Int(ln(a2)/ln(1-b));
   StringGrid1.Cells[0,i-1]:=IntToStr(i);
   StringGrid1.Cells[1,i-1]:=FloatToStr(P2);
   end;
Form1.Button4Click(Sender);
end;
```

Например, для значений параметров для распределения Бозе–Эйнштейна, указанных на рис. 1, получим случайные потоки чисел, распределенных по данному закону (рис. 7). Отметим лишь: как и в предыдущем случае, интерфейс программы также позволяет строить графики как в двухмерном изображении, так и в трехмерном, менять тип графика и показывать маркеры.

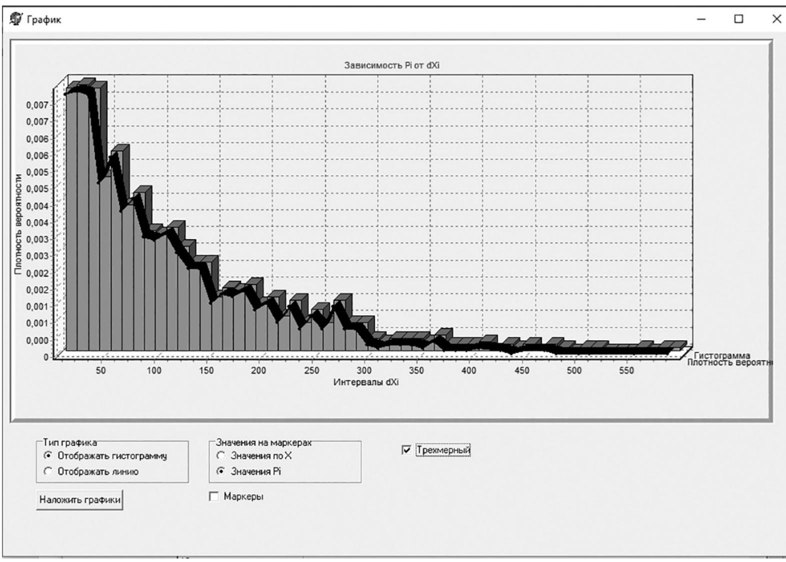

Рис. 7

Следует отметить, что при больших значениях плотности распределение Пуассона стремится к нормальному распределению [2]. В этом случае блок статистической обработки может рассчитать дополнительные параметры – математическое ожидание (МО), дисперсию (Дисперсия) и среднее квадратическое отклонение (СКО), которые отобразятся на форме (рис. 1).

Кратко поясним работу блока статистической обработки в этом случае. Под случайной выборкой объема n понимают совокупность случайных величин $X_1,\ldots K,\ldots, X_n$, не зависимых друг от друга. Упорядоченной статистической совокупностью будем называть случайную выборку, величины в которой расположены в порядке возрастания $X_1 \le X_2 \le K \le X_n$. Размах выборки есть величина $r = X_n - X_1$, где X_n – максимальные (max), X_1 – минимальные (min) элементы выборки. Группированным статистическим рядом называются интервалы с соответствующими им частотами, на которые разбивается упорядоченная выборка, причем ширина интервала находится как:

$$\Delta = \frac{r}{n} = \frac{X_n - X_1}{n}, \tag{3}$$

тогда частота попадания в отрезок Δ_i, находим по формуле:

$$p_i^* = \frac{V_i}{n}, \tag{4}$$

где V_i – число величин, попавших в отрезок Δ_i причем $\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$.

Поделив каждую частоту на Δ_i получим высоту для построения гистограммы. Построив гистограмму, можно выдвинуть гипотезу о законе распределения.

Далее следует пояснить, что данная программа не выполняет проверку гипотезы о законе распределения. Это нужно сделать отдельно (например, с использованием системы MathCad). Но в предположении, что гипотеза о законе распределения оказалась верной и полученное распределение является нормальным, можно рассчитать параметры этого распределения.

Математическое ожидание (статистическое среднее) m_x^* и статистическую дисперсию D_x^* находим по известным формулам:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i p_i^* = m_x^*, \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x^*\right)^2 = D_x^*. \tag{5}$$

Естественной оценкой для математического ожидания является среднее арифметическое значение:

$$\tilde{m} = m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad (6)$$

а для дисперсии:

$$\tilde{D} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \tilde{m}\right)^2. \quad (7)$$

На основе данных предположений и формул рассмотрим практический пример. Пусть генератор Пуассона выдал упорядоченную выборку $X_1 \le X_2 \le K \le X_n$, где $n = 100$ – количество замеров (табл. 1):

Таблица 1

70.1	74.7	79.1	79.4	80.0	82.0	82.2	83.4	83.8	85.0
86.1	86.2	86.3	86.5	86.6	86.7	86.9	87.2	88.2	88.4
88.6	88.7	89.4	90.4	90.8	90.9	91.1	91.3	93.1	93.7
94.5	94.7	94.7	94.8	94.9	94.9	95.1	95.2	95.3	95.6
96.5	96.5	96.6	96.9	97.2	97.4	97.7	98.1	98.4	98.8
98.6	99.0	99.4	100.0	100.0	100.1	100.4	100.5	100.6	100.8
101.4	101.6	101.8	101.9	101.9	102.1	102.3	102.7	102.8	102.9
103.6	103.8	103.8	104.6	105.4	105.9	106.1	106.6	107.2	107.3
107.5	107.7	109.1	110.2	110.3	110.4	111.8	111.8	112.4	112.5
112.8	113.0	113.6	113.9	113.9	114.3	116.8	118.3	122.7	124.6

Размах выборки $r = X_n - X_1 = 124{,}6 - 70{,}1 = 54{,}5$. На основе формул (2)–(7) для исследования статистики составляем табл. 2.

Таблица 2

Интервалы Δ_i	**Число попаданий в интервал Δ_i**	**Частота попаданий в интервал p_i^***	**Высоты интервалов для гистограммы**
70.10–75.55	2	0.020	0.0036697
75.55–81.00	3	0.030	0.0055045
81.00–86.45	8	0.080	0.0146788
86.45–91.90	15	0.150	0.0275229
91.90–97.35	17	0.170	0.0311926
97.35–102.80	23.5	0.235	0.0431192
102.80–108.25	13.5	0.135	0.0247706
108.25–113.70	11	0.110	0.0201834
113.70–119.15	5	0.050	0.0091743
119.15–124.60	2	0.020	0.0036697

По построенной гистограмме в MathCad (рис. 8) можно предположить, что данное распределение подчиняется нормальному закону. Для подтверждения выдвинутой гипотезы нужно провести оценку неизвестных параметров.

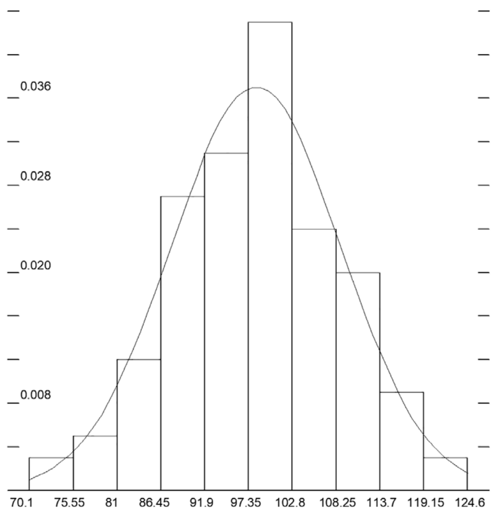

Рис. 8

Математическое ожидание определим с учетом (5):

$$\tilde{m} = m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 98{,}43\,,$$

а дисперсию – с учетом (6):

$$\tilde{D} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \tilde{m}\right)^2 = 111{,}8895$$

и, соответственно, СКО как $\sigma = \sqrt{\tilde{D}} = 10{,}5778.$

Подставляя в выражение для нормальной плотности вероятности $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\mathbf{p}}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ рассчитанные параметры, получим ее значения на границах разрядов (интервалов) (табл. 3) и построим выравнивающую ее нормальную кривую (огибающую), представленную на рис. 8.

Таблица 3

x	$f(x)$
70.10	0.0010445
75.55	0.0036354
81.00	0.0097032
86.45	0.0198601
91.90	0.0311717
97.35	0.0375190
102.80	0.0346300
108.25	0.0245113
113.70	0.0133043
119.15	0.0055377
124.60	0.0017676

Рассчитаем вероятность (табл. 4) попадания случайной величины X в k-й интервал по формуле:

$$p_k = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx . \qquad (8)$$

Таблица 4

$S_{k-1} - S_k$	p_k
70.10–75.55	0.0115694
75.55–81.00	0.0344280
81.00–86.45	0.0790016
86.45–91.90	0.1398089
91.90–97.35	0.1908301
97.35–102.80	0.2009057
102.80–108.25	0.1631453
108.25–113.70	0.1021833
113.70–119.15	0.0493603
119.15–124.60	0.0183874

Для проверки правдоподобия гипотезы воспользуемся критерием согласия χ^2. Для этого возьмем данные из табл. 2 и 4 и подставим в формулу:

$$\chi^2 = n\sum_{k=1}^{10} \frac{\left(p_k^* - p_k\right)^2}{p_k} = 2{,}0271 . \qquad (9)$$

Определяем число степеней свободы: $(10 - 1 - l) = 7$, где l – число независимых условий (количество параметров, подлежащих оценке). В нашем случае $l = 2$ – это параметры для нормального закона распределения: m_x, D_x. Согласно (1) находим при $r = 7$, $p = 0.95 = 2.17$ для уровня значимости $\chi^2 \propto \chi^2(7)$ и видим, что $\chi^2 \propto \chi^2(7)$, но даже меньше. Это свидетельствует о том, что выдвинутая нами гипотеза о нормальности распределения не противоречит опытным данным.

Для построения графиков программа использует полученные и рассчитанные значения, которые можно увидеть в таблице, размещенной в нижней части на главной форме (рис. 2) при нажатии соответствующих кнопок («Числа K_i», «X_i Точки отрезков dX_i», «A_i Середины интервалов dX_i», «N_i Число результатов, попадающих в dX_i», «V_i Частота появления рез-тов в dX_i», «P_i Плотность вероятности»). Например, на рис. 1 в таблице нажаты две кнопки «X_i Точки отрезков dX_i» и «V_i Частота появления рез-тов в dX_i».

Литература

1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Академия, 2003. 464 с.

2. Генераторы дискретно распределенных случайных величин [электронный ресурс]. URL: https://habr.com/ru/post/265321/

3. *Осипов Д.Л.* Delphi. Программирование для Windows, OS X, iOS и Android. СПб.: БХВ-Петербург, 2014. 464 с.

Literatura

1. *Ventcel E.S., Ovcharov L.A.* Teoriya veroyatnostej i ee inzhenernye prilozheniya. 3-e izd., pererab. i dop. M.: Akademiya, 2003. 464 s.

2. Generatory diskretno raspredelennyx sluchajnyx velichin [elektronnyj resurs]. URL: https://habr.com/ru/post/265321/

3. *Osipov D.L.* Delphi. Programmirovanie dlya Windows, OS X, iOS i Android. SPb.: BXV-Peterburg, 2014. 464 s.