DOI: 10.25586/RNU.V9187.19.01.P.011 УДК 537.87; 621.371; 517.958

А.С. Крюковский, Ю.И. Бова

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ КРАЕВОЙ КАТАСТРОФЫ $\mathbf{K}_{4,2}$ МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ*

Развит метод локальной асимптотики, описывающий дифракционные фокусировки электромагнитных полей в случае, когда семейство первичных (геометрооптических) и вторичных (краевых) лучей образуют фокусировки каспоидного типа (волновая катастрофа $\mathbf{K}_{4,2}$). Выполнено математическое моделирование коэффициентов универсальной деформации, функционального модуля и фазы бегущей волны. Получены явные выражения для параметров универсальной деформации.
*Ключевые слова:* математическое моделирование, локальные асимптотики, краевые катастрофы, фокусировки, универсальная деформация, функциональный модуль, краевые лучи.

A.S. Kryukovskij, Yu.I. Bova

# MATHEMATICAL MODELING OF THE UNFOLDING PARAMETERS OF THE EDGE CATASTROPHE $\mathbf{K}_{4,2}$ BY LOCAL ASYMPTOTIC METHOD

A local asymptotic method is developed that describes the diffraction focusing of electromagnetic fields in the case when a family of primary (geometrooptical) and secondary (edge) rays form a focusing of the cuspoid type (wave catastrophe $\mathbf{K}_{4,2}$). Mathematical modeling of the unfolding coefficients, the functional module and the traveling wave phase was performed. Explicit expressions for the parameters of unfolding are obtained.
*Keywords:* mathematical modeling, local asymptotics, edge catastrophes, focusings, unfolding, functional module, edge rays.

Применение теории катастроф к различным областям физики позволяет адекватно описывать волновую структуру в фокальных и дифракционных областях в задачах рассеяния и распространения излучения в виде эталонных структур, содержащих специальные функции волновых катастроф [1; 3; 4; 8; 12; 15]. Для этого необходимо уметь связывать физические параметры реальной задачи с параметрами эталонных структур, соответствующих катастрофам того или иного типа, т.е. находить «параметры подобия», главными из которых являются коэффициенты универсальной деформации и функциональные модули.

Важной топологической особенностью является унимодальная катастрофа $\mathbf{K}_{4,2}$, структурно-устойчивая в четырехмерном пространстве, позволяющая описывать совместную каспоидную фокусировку типа «каустическое острие – $\mathbf{A}_3$» как семейства первичных геометрооптических (ГО) лучей, так и семейства вторичных краевых лучей [3; 7; 11; 14]. В исследованиях [1; 10] рассмотрена каустическая структура краевой катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-02-00544-а).

В настоящей работе методами математического моделирования построено первое приближение для коэффициентов универсальной деформации унимодальной краевой катастрофы $\Sigma = \mathbf{K}_{4,2}$, имеющей разложение $\Sigma = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_3)$ [3; 7; 14]. Это означает, что семейство ГО лучей образует особенность типа «каустическое острие» $(\mathbf{A}_3)$ с краем и семейство краевых лучей образует особенность $\mathbf{A}_3$. Выражение для универсальной деформации краевой катастрофы $\Sigma = \mathrm{K}_{4,2}$ имеет вид

$$F_\Sigma = \nu_2\xi_2^2 + a\xi_1^2\xi_2 + \nu_1\xi_1^4 + \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_1^2 + \lambda_3\xi_2 + \lambda_4\xi_1\xi_2, \tag{1}$$

где $\nu_1 = \pm 1$; $\nu_2 = \pm 1$; $a$ – функциональный модуль; $\lambda_j$ – коэффициенты универсальной деформации.

Рассмотрим фазовую функцию $\Phi(\eta_1, \eta_2, \vec{\alpha})$ в окрестности особой точки с координатами $(\vec{\alpha}_o)$, в которой универсальная деформация переходит в нормальную форму и имеет вид

$$F_\Sigma = \nu_2\xi_2^2 + a\xi_1^2\xi_2 + \nu_1\xi_1^4. \tag{2}$$

Справедливо тождество (см., например: [3; 7; 15])

$$\Lambda\Phi = F_\Sigma + \theta, \tag{3}$$

где $\Lambda$ – большой параметр задачи ($\Lambda >> 1$, как аргумент не рассматривается); $\theta(\vec{\alpha})$ – фаза бегущей волны.

Для упрощения вычислений введем функцию $\mu = \Lambda\Phi$. Тогда основное тождество приобретает вид

$$C \equiv \mu(\eta_1(\vec{\alpha}), \eta_2(\vec{\alpha}), \vec{\alpha}) - F_\Sigma(\xi_1, \xi_2, a(\vec{\alpha}), \vec{\lambda}(\vec{\alpha})) - \theta(\vec{\alpha}) = 0. \tag{4}$$

Между внутренними переменными фазовой функции и внутренними переменными универсальной деформации существует взаимно однозначное отображение [Там же]:

$$\begin{cases} \eta_1 = g_1(\xi_1, \xi_2, \vec{\alpha}), \\ \eta_2 = \eta_{o2} + \xi_2 \;\; g_2(\xi_1, \xi_2, \vec{\alpha}). \end{cases} \tag{5}$$

Для определения коэффициентов $\lambda_j(\vec{\alpha})$, функционального модуля $a(\vec{\alpha})$ и фазы бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$ используем разработанный нами метод локальной асимптотики [2; 3; 5; 6; 9; 13].

Найдем методом локальной асимптотики выражения для коэффициентов $\lambda_j(\vec{\alpha})$, функционального модуля $a(\vec{\alpha})$ и фазы $\theta(\vec{\alpha})$. Введем обозначения:

$$\begin{gathered} \mu_i = \left.\frac{\partial\mu}{\partial\eta_i}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}, \;\; \mu_{ik} = \left.\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta_i\partial\eta_k}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}, \;\; \mu_{ijk} = \left.\frac{\partial^3\mu}{\partial\eta_i\partial\eta_j\partial\eta_k}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}, \ldots, \\ p_j^i = \left.\frac{\partial\eta_i}{\partial\xi_j}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}, \;\; p_{jk}^i = \left.\frac{\partial^2\eta_i}{\partial\xi_{jk}}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}, \;\; p_{jkl}^i = \left.\frac{\partial^3\eta_i}{\partial\xi_j\partial\xi_k\partial\xi_l}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}, \ldots \; (i, j, k, l = 1, 2). \end{gathered} \tag{6}$$

В более сложных случаях мы будем использовать обозначения

$$\mu_{(n,m)} = \left.\frac{\partial^{n+m}\mu}{\partial\eta_1^n\partial\eta_2^m}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}, \;\; C_{(n,m)} = \left.\frac{\partial^{n+m}C}{\partial\eta_1^n\partial\eta_2^m}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}, \;\; p_{(n,m)}^i = \left.\frac{\partial^{n+m}\eta_i}{\partial\xi_1^n\partial\xi_2^m}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}. \tag{7}$$

В особой точке $(\vec{\alpha}_o)$ (см.: [3])

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \;\; \vec{\eta} = \vec{\eta}_o. \tag{8}$$

Кроме того, при $\eta_2 = \eta_{o2}$ внутренняя переменная $\xi_2 = 0$ [см. выражение (5)] [3; 7; 14] и тождество (4) переходит в тождество сужения:

$$\Omega \equiv \mu(\eta_1(\vec{\alpha}), \eta_{o2}, \vec{\alpha}) - \nu_1 \xi_1^4 - \lambda_1(\vec{\alpha})\xi_1 - \lambda_2(\vec{\alpha})\xi_1^2 - \theta(\vec{\alpha}) = 0. \qquad (9)$$

Это тождество соответствует особенности $\mathbf{A_3}$ – каустическое острие для краевых лучей. В работах [2; 3; 9] показано, что в особой точке типа $\mathbf{A_3}$

$$\mu_1 = \mu_{11} = \mu_{111} = 0, \ \mu_{1111} \neq 0. \qquad (10)$$

Учитывая (10), нетрудно установить, что, для того чтобы получить $p_1^1$, необходимо продифференцировать тождество (9) в особой точке четыре раза по $\xi_1$, для определения $p_{11}^1$ – пять раз и т.д.

Выполняя вычисления, находим [2; 3; 13]:

$$d \equiv p_1^1 = \sqrt[4]{\frac{24}{|\mu_{1111}|}}, \ p_{11}^1 = -\frac{1}{10}\frac{\mu_{(5,0)}}{\mu_{(4,0)}}d^2, \ p_{111}^1 = \left(\frac{21}{400}\frac{\mu_{(5,0)}^2}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{1}{20}\frac{\mu_{(6,0)}}{\mu_{(4,0)}}\right)d^3,$$

$$\nu_1 = \operatorname{sign}\mu_{1111}, \ p_{1111}^1 = \left(\frac{2}{25}\frac{\mu_{(5,0)}\mu_{(6,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{6}{125}\frac{\mu_{(5,0)}^3}{\mu_{(4,0)}^3} - \frac{1}{35}\frac{\mu_{(7,0)}}{\mu_{(4,0)}}\right)d^4, \qquad (11)$$

$$p_{(5,0)}^1 = \left(\frac{9}{140}\frac{\mu_{(5,0)}\mu_{(7,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} + \frac{3}{80}\frac{\mu_{(6,0)}^2}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{117}{800}\frac{\mu_{(5,0)}^2\mu_{(6,0)}}{\mu_{(4,0)}^3} + \frac{1\,989}{32\,000}\frac{\mu_{(5,0)}^4}{\mu_{(4,0)}^4} - \frac{1}{56}\frac{\mu_{(8,0)}}{\mu_{(4,0)}}\right)d^5.$$

Таким образом, формулы (11) получаются последовательно из анализа производных $C_{(n,0)}$ или $\Omega_{(n,0)}$ при $n = 4, 5, 6, 7, 8$, вычисленных в особой точке.

В дальнейшем для получения первого приближения нам потребуются $p_\alpha^1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha_j}$ и $p_{1\alpha}^1 = \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi_1 \partial \alpha_j}$. Величина $p_\alpha^1$ находится из анализа $\Omega_{(3,\alpha)}$ в особой точке и имеет вид

$$p_\alpha^1 = -\frac{\mu'_{\alpha(3,0)}}{\mu_{(4,0)}} + \frac{3}{10}\frac{\mu_{(5,0)}\mu'_{\alpha(2,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{21}{400}\frac{\mu_{(5,0)}^2\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}^3} + \frac{1}{20}\frac{\mu_{(6,0)}\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}^2}. \qquad (12)$$

Величина $p_{1\alpha}^1$ находится из анализа $\Omega_{(4,\alpha)}$ в особой точке:

$$p_{1\alpha}^1 = -\frac{p_1^1}{4\mu_{(4,0)}}\left(\mu'_{\alpha(4,0)} - \frac{\mu_{(5,0)}\mu'_{\alpha(3,0)}}{\mu_{(4,0)}} + \frac{9}{25}\frac{\mu_{(5,0)}^2\mu'_{\alpha(2,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{1}{5}\frac{\mu_{(6,0)}\mu'_{\alpha(2,0)}}{\mu_{(4,0)}} - \right.$$
$$\left. - \frac{69}{1000}\frac{\mu_{(5,0)}^3\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}^3} + \frac{1}{10}\frac{\mu_{(5,0)}\mu_{(6,0)}\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{1}{35}\frac{\mu_{(7,0)}\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}}\right). \qquad (13)$$

Будем искать приближенные выражения для $\lambda_j(\vec{\alpha})$, $a(\vec{\alpha})$ и $\theta(\vec{\alpha})$ в виде

$$\lambda_j(\vec{\alpha}) \cong \sum_{k=1}^{M} \lambda_{j\alpha_k}\Delta\alpha_k, \ a(\vec{\alpha}) \cong a_F + \sum_{k=1}^{M} a_{\alpha_k}\Delta\alpha_k,$$
$$\theta(\vec{\alpha}) \cong \theta_o + \sum_{k=1}^{M}\theta_{\alpha_k}\Delta\alpha_k + \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\theta_{\alpha_k\alpha_j}\Delta\alpha_k\Delta\alpha_j, \qquad (14)$$

где $\Delta\alpha_k = \alpha_k - \alpha_{ok}$; $M$ – размерность конфигурационного пространства. В дальнейшем для сокращения записи индекс $k$ у $\alpha_k$ будем опускать, как это сделано в выражениях (12)–(13).

Определим коэффициенты, входящие в (14). Для того чтобы найти $\lambda_{1\alpha}$, продифференцируем сужение (9) один раз по $\xi_1$, один раз по $\alpha$ (т.е. вычислим $\Omega_{(1,0)\alpha}$) и положим

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_o,\ \ \xi_1 = 0. \tag{15}$$

Тогда находим, что

$$\lambda_{1\alpha} = \mu_{1\alpha} p_1^1. \tag{16}$$

Перейдем теперь к вычислению $\lambda_{2\alpha}$. Для того чтобы найти $\lambda_{2\alpha}$, необходимо продифференцировать тождество (9) два раза по $\xi_1$, один раз по $\alpha$ ($\Omega_{(2,0)\alpha}$) и учесть (15).

Получим

$$\lambda_{2\alpha} = \frac{1}{2}\left(\mu_{1\alpha}\ \ p_{11}^1 + \mu_{11\alpha}\ \ (p_1^1)^2\right). \tag{17}$$

Входящие в (17) необходимые величины уже определены в формулах (11).

Рассмотрим теперь определение с точностью до членов второго порядка включительно фазы бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$.

Величина $\theta(\vec{\alpha}_o)$ легко находится из тождества (9):

$$\theta_o \equiv \theta(\vec{\alpha}_o) = \mu(\eta_1(0,\vec{\alpha}_o), \eta_{o2}, \vec{\alpha}_o), \tag{18}$$

где $\eta_1(0,\vec{\alpha}_o) = \eta_{o1}$ – значение первого внутреннего параметра задачи в особой точке.

Для определения $\theta_\alpha$ продифференцируем тождество (9) один раз по $\alpha$ ($\Omega_{(0,0)\alpha}$) и учтем (15). Тогда

$$\theta_\alpha = \mu_\alpha. \tag{19}$$

Для вычисления коэффициентов $\theta_{\alpha\beta}$, $\alpha = \alpha_k$, $\beta = \beta_j$ продифференцируем тождество (9) еще и по $\beta$. Анализируя $\Omega_{(0,0)\alpha\beta}$ в особой точке, находим

$$\theta_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} + \mu_{1\alpha} p_\beta^1 + \mu_{1\beta} p_\alpha^1. \tag{20}$$

Все величины, входящие в (20), известны [см. выражение (12)].

Таким образом, сужение позволило нам определить линейное приближение для $\lambda_1, \lambda_2$ и $\theta$. Для нахождения $\lambda_3, \lambda_4$ и функционального модуля $a$ необходимо рассмотреть полное выражение для универсальной деформации (1) особенности $\Sigma = \mathbf{K}_{4,2}$.

Здесь следует отметить, что, во-первых, все производные $\eta_2$ по $\xi_1$ и $\alpha$ равны нулю:

$$p_{(n,0)}^2 = 0,\ \ p_{(n,0)\alpha}^2 = 0, \tag{21}$$

что явно следует из (5), а во-вторых, в особой точке

$$\mu_{12} = 0, \tag{22}$$

что вытекает из равенства нулю в особой точке $C_{(1,1)}$.

Найдем линейное приближение для коэффициента $\lambda_3$. Для этого продифференцируем тождество (4) один раз по $\xi_2$, один раз по $\alpha$ (т.е. вычислим $C_{(0,1)\alpha}$) и учтем (15), (21)–(22). Тогда

$$\lambda_{3\alpha} = \mu_{1\alpha} p_2^1 + \mu_{2\alpha} p_2^2. \tag{23}$$

Для вычисления $p_2^2$ продифференцируем дважды по $\xi_2$ тождество (4) в особой точке, т.е. вычислим $C_{(0,2)}$, и получим, что

$$p_2^2 = \sqrt{\frac{2}{|\mu_{22}|}},\ \ \nu_2 = \operatorname{sign} \mu_{22}. \tag{24}$$

Сложнее определяется производная $p_2^1$. Для этого вычислим в особой точке производные тождества (4) $C_{(1,2)}$ и $C_{(3,1)}$ и решим систему уравнений относительно $p_2^1$ и $p_{12}^2$. Находим

$$p_2^1=-\frac{p_2^2}{2(3\mu_{112}^2-\mu_{1111}\mu_{22})}\left(3\mu_{112}\mu_{122}-2\mu_{1112}\mu_{22}+\frac{3\mu_{112}\mu_{22}\mu_{(5,0)}}{5\mu_{1111}}\right),$$
$$p_{12}^2=-\frac{p_2^2p_1^1}{2(3\mu_{112}^2-\mu_{1111}\mu_{22})}\left(2\mu_{1112}\mu_{112}-\frac{3\mu_{(5,0)}\mu_{112}^2}{5\mu_{1111}}-\mu_{1111}\mu_{122}\right). \quad (25)$$

Из формул (25) следует, что особенность $\mathbf{K}_{4,2}$ формируется при условии

$$3\mu_{112}^2\neq\mu_{1111}\mu_{22}. \quad (26)$$

Перейдем теперь к определению линейного приближения для коэффициента $\lambda_4$. Продифференцируем тождество (4) по $\xi_1$, по $\xi_2$ и по $\alpha$. Тогда найдем

$$\lambda_{4\alpha}=\left(\mu_{112}p_\alpha^1p_2^2+\mu_{11\alpha}p_2^1+\mu_{12\alpha}p_2^2\right)p_1^1+\mu_{1\alpha}p_{12}^1+\mu_{2\alpha}p_{12}^2. \quad (27)$$

В формуле (27) нам известны уже все выражения, кроме $p_{12}^1$. Для определения производной $p_{12}^1$ вычислим в особой точке производные тождества (4) $C_{(2,2)}$ и $C_{(4,1)}$, решим систему уравнений и найдем $p_{12}^1$ и $p_{112}^2$ :

$$p_{12}^1=\frac{1}{4\left(p_1^1\right)^3p_2^2(3\mu_{112}^2-\mu_{1111}\mu_{22})}\times$$
$$\times\Bigg(-3\mu_{112}\left(p_1^1\right)^2\left(\left(p_1^1\right)^2\mu_{1111}\left(p_2^1\right)^2+2\mu_{1112}p_2^1p_2^2+\mu_{112}p_{22}^2+\right.$$
$$\left.+\mu_{1122}\left(p_2^2\right)^2\right)+4p_1^1p_{12}^2\left(\left(\mu_{112}p_2^1+\mu_{122}p_2^2\right)+p_{11}^1p_2^2\left(2\mu_{112}p_2^1+\mu_{122}p_2^2\right)\right)+\Bigg(\left(p_1^1\right)^2p_2^2\times$$
$$\times\left(p_1^1\left(\mu_{(5,0)}p_1^1p_2^1+\mu_{(4,1)}p_1^1p_2^2+4\mu_{1112}p_{12}^2\right)+6p_{11}^1\left(\mu_{1111}p_2^1+\mu_{1112}p_2^2\right)\right)+$$
$$+\left(-6\left(p_1^1\right)^2\left(p_{12}^2\right)^2+3\left(p_{11}^1\right)^2\left(p_2^2\right)^2+4p_1^1p_2^2\left(3p_{11}^1p_{12}^2+p_{111}^1p_2^2\right)\right)\mu_{112}\Bigg)\mu_{22}\Bigg); \quad (28)$$

$$p_{112}^2=\frac{1}{8\left(p_1^1\right)^3p_2^2(3\mu_{112}^2-\mu_{1111}\mu_{22})}\times$$
$$\times\Bigg(-4\mu_{112}p_1^1p_2^2\Big(\left(p_1^1\right)^4\left(\mu_{(5,0)}p_2^1+\mu_{(4,1)}p_2^2\right)+4\mu_{1112}\left(p_1^1\right)^3p_{12}^2+6\left(p_1^1\right)^2p_{11}^1\times$$
$$\times\left(\mu_{1111}p_2^1+\mu_{1112}p_2^2\right)+3\mu_{112}\left(p_{11}^1\right)^2p_2^2+4p_1^1\mu_{112}\left(3p_{11}^1p_{12}^2+p_{111}^1p_2^2\right)\Big)+$$
$$+4\mu_{1111}\left(p_1^1\right)^3\Big(\left(p_1^1\right)^2\left(\mu_{1111}\left(p_2^1\right)^2+2\mu_{1112}p_2^1p_2^2+\mu_{112}p_{22}^2+\mu_{1122}\left(p_2^2\right)^2\right)+$$
$$+4p_1^1p_{12}^2\left(\mu_{112}p_2^1+\mu_{122}p_2^2\right)+p_{11}^1p_2^2\left(2\mu_{112}p_2^1+\mu_{122}p_2^2\right)+2\mu_{22}\left(p_{12}^2\right)^2\Big)\Bigg). \quad (29)$$

В формулах (28)–(29) все величины известны, кроме $p_{22}^2$. Для определения этой производной продифференцируем в особой точке тождество (4) три раза по $\xi_2$. Из анализа $C_{(0,3)}$ находим

$$p_{22}^2 = -\frac{1}{3\mu_{22}}\left(3\mu_{112}\left(p_2^1\right)^2 + 3\mu_{122}p_2^1 p_2^2 + \mu_{222}\left(p_2^2\right)^2\right). \qquad (30)$$

Перейдем теперь к определению функционального модуля $a$. Величина $a_F$ находится просто. Продифференцируем тождество (4) в особой точке два раза по $\xi_1$ и один раз по $\xi_2$ ($C_{(2,1)}$). Тогда получим, что

$$a_F = \frac{1}{2}\mu_{112}\left(p_1^1\right)^2 p_2^2. \qquad (31)$$

Коэффициент $a_\alpha$ найдем из анализа $C_{(2,1)\alpha}$:

$$a_\alpha = \frac{1}{2}\Big(\left(p_1^1\right)^2\left(\mu_{1112}p_\alpha^1 p_2^2 + p_2^1\left(\mu_{1111}p_\alpha^1 + \mu_{111\alpha}\right) + \mu_{112}p_{2\alpha}^2 + \mu_{112\alpha}p_2^2\right) +$$
$$+ 2p_1^1\left(\mu_{112}p_\alpha^1 p_{12}^2 + \mu_{112}p_{1\alpha}^1 p_2^2 + \mu_{11\alpha}p_{12}^1 + \mu_{12\alpha}p_{12}^2\right) +$$
$$+ p_{11}^1\left(\mu_{112}p_\alpha^1 p_2^2 + \mu_{11\alpha}p_2^1 + \mu_{12\alpha}p_2^2\right) + \mu_{1\alpha}p_{112}^1 + \mu_{2\alpha}p_{112}^2\Big). \qquad (32)$$

В формулу (32) входит производная $p_{2\alpha}^2$, которую найдем из анализа производной $C_{(0,2)\alpha}$ тождества (4):

$$p_{2\alpha}^2 = -\frac{1}{2\mu_{22}p_2^2}\Big(\mu_{11\alpha}\left(p_2^1\right)^2 + \mu_{122}p_\alpha^1\left(p_2^2\right)^2 + 2p_2^1 p_2^2\left(\mu_{112}p_\alpha^1 + \mu_{12\alpha}\right) +$$
$$+ \mu_{1\alpha}p_{22}^1 + \mu_{22\alpha}\left(p_2^2\right)^2 + \mu_{2\alpha}p_{22}^2\Big). \qquad (33)$$

В выражения (32)–(33), помимо вычисленных выше, входят производные $p_{22}^1$, $p_{1112}^1$, $p_{112}^2$. Эти величины, а также $p_{1112}^2$ могут быть найдены как решения четырех уравнений $C_{(1,3)}$, $C_{(3,2)}$, $C_{(5,1)}$, $C_{(4,2)}$, найденных из тождества (4). К сожалению, явные выражения слишком громоздки и не могут быть приведены в данной работе.

Таким образом, в исследовании получены формулы, позволяющие рассчитывать в первом приближении параметры универсальной деформации волновой катастрофы типа $\mathbf{K}_{4,2}$, являющейся единой структурно-устойчивой дифракционной фокусировкой как краевых лучей, образующих каустическое острие $\mathbf{A}_3$, так и геометрооптических лучей, образующих каустическое острие $\mathbf{A}_3$ с краем. Коэффициенты, образующие вектор $\vec{\lambda}(\vec{\alpha})$, вычислены в линейном приближении, фаза бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$ найдена во втором квадратичном приближении. Для функционального модуля $a$ мы ограничились нулевым приближением и указали путь для явного вычисления линейного приближения.

## Литература

1. *Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12, № 8. С. 71–74.

2. *Крюковский А.С.* Локальное определение коэффициентов универсальной деформации катастрофы $A_3$ // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». 2018. Вып. 2. С. 5–10.

3. *Крюковский А.С.* Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013. 368 с.

4. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 6. С. 1121–1126.

5. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Локальные асимптотики волновых полей в фокальных областях типа катастроф коранга один и два // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». 2018. Вып. 1. С. 5–17.

6. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического острия в плоско-слоистой среде // Вопросы дифракции электромагнитных волн. М.: МФТИ, 1982. С. 40–45.

7. *Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А.* Применение теории краевых катастроф для построения равномерных асимптотик быстро осциллирующих интегралов // Дифракция и распространение волн: междувед. сборник. М.: МФТИ, 1985. С. 4–21.

8. *Крюковский А.С., Растягаев Д.В.* Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта // Распространение и дифракция электромагнитных волн. М.: МФТИ, 1993. С. 20–37.

9. *Крюковский А.С., Растягаев Д.В.* О необходимых и достаточных условиях образования каспоидных катастроф // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1989. С. 56–60.

10. *Крюковский А.С., Скворцова Ю.И.* Каустическая структура краевой катастрофы $K_{4,2}$ // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». 2015. Вып. 2 (10). С. 5–9.

11. *Крюковский А.С., Скворцова Ю.И.* Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. Т. 18, № 8. С. 18–23.

12. *Balykina A.M., Kryukovskii A.S.* Investigation of the Electromagnetic Field of Caustic-Cusp and Butterfly Edge Waves in the Shadow Region // Journal of Communications Technology and Electronics. 2010. T. 55, № 5. P. 497–504.

13. *Kryukovskii A.S.* Local Uniform Asymptotics of Wave Fields in the Vicinity of Basic and Boundary Cuspoidal Caustics // Journal of Communications Technology and Electronics. 1996. Vol. 41, № 1. P. 51–57.

14. *Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Palkin E.A.* Uniform Asymptotics for Evaluating Oscillatory Edge Integrals by Methods of Catastrophe Theory // Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1987. Vol. 2, № 4. P. 219–312.

15. *Kryukovskii A.S., Rastyagaev D.V., Lukin D.S.* Construction of Uniform Asymptotic Solutions of Wave-Type Differential Equations by Methods of Catastrophe Theory // Russian Journal of Mathematical Physics. 2009. Vol. 16, № 2. P. 251–264.

## Literatura

1. *Dorokhina T.V., Kryukovskij A.S., Lukin D.S.* Informatsionnaya sistema "Volnovye katastrofy v radiofizike, akustike i kvantovoj mekhanike" // Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy. 2007. T. 12, № 8. S. 71–74.
2. *Kryukovskij A.S.* Lokal'noe opredelenie koeffitsientov universal'noj deformatsii katastrofy $A_3$ // Vestnik Rossijskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2018. Vyp. 2. S. 5–10.
3. *Kryukovskij A.S.* Ravnomernaya asimptoticheskaya teoriya kraevykh i uglovykh volnovykh katastrof. M.: RosNOU, 2013. 368 s.
4. *Kryukovskij A.S., Lukin D.S.* K voprosu o pole v okrestnosti kausticheskogo ostriya v ionosfernom plazmennom sloe // Radiotekhnika i elektronika. 1981. T. 26, № 6. S. 1121–1126.
5. *Kryukovskij A.S., Lukin D.S.* Lokal'nye asimptotiki volnovykh polej v fokal'nykh oblastyakh tipa katastrof koranga odin i dva // Vestnik Rossijskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2018. Vyp. 1. S. 5–17.
6. *Kryukovskij A.S., Lukin D.S.* Lokal'noe asimptoticheskoe opisanie elektromagnitnogo polya v okrestnosti kausticheskogo ostriya v plosko-sloistoj srede // Voprosy difraktsii elektromagnitnykh voln. M.: MFTI, 1982. S. 40–45.
7. *Kryukovskij A.S., Lukin D.S., Palkin E.A.* Primenenie teorii kraevykh katastrof dlya postroeniya ravnomernykh asimptotik bystro ostsilliruyushchikh integralov // Difraktsiya i rasprostranenie voln: mezhduved. sbornik. M.: MFTI, 1985. S. 4–21.
8. *Kryukovskij A.S., Rastyagaev D.V.* Issledovanie ustojchivykh fokusirovok, voznikayushchikh pri narushenii simmetrii volnovogo fronta // Rasprostranenie i difraktsiya elektromagnitnykh voln. M.: MFTI, 1993. S. 20–37.
9. *Kryukovskij A.S., Rastyagaev D.V.* O neobkhodimykh i dostatochnykh usloviyakh obrazovaniya kaspoidnykh katastrof // Rasprostranenie i difraktsiya voln v neodnorodnykh sredakh. M.: MFTI, 1989. S. 56–60.
10. *Kryukovskij A.S., Skvortsova Yu.I.* Kausticheskaya struktura kraevoj katastrofy $K_{4,2}$ // Vestnik Rossijskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2015. Vyp. 2 (10). S. 5–9.
11. *Kryukovskij A.S., Skvortsova Yu.I.* Primenenie teorii katastrof dlya opisaniya prostranstvenno-vremennoj struktury chastotno-modulirovannogo signala v plazme // Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy. 2013. T. 18, № 8. S. 18–23.
12. *Balykina A.M., Kryukovskii A.S.* Investigation of the Electromagnetic Field of Caustic-Cusp and Butterfly Edge Waves in the Shadow Region // Journal of Communications Technology and Electronics. 2010. T. 55, № 5. P. 497–504.
13. *Kryukovskii A.S.* Local Uniform Asymptotics of Wave Fields in the Vicinity of Basic and Boundary Cuspoidal Caustics // Journal of Communications Technology and Electronics. 1996. Vol. 41, № 1. P. 51–57.
14. *Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Palkin E.A.* Uniform Asymptotics for Evaluating Oscillatory Edge Integrals by Methods of Catastrophe Theory // Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1987. Vol. 2, № 4. P. 219–312.
15. *Kryukovskii A.S., Rastyagaev D.V., Lukin D.S.* Construction of Uniform Asymptotic Solutions of Wave-Type Differential Equations by Methods of Catastrophe Theory // Russian Journal of Mathematical Physics. 2009. Vol. 16, № 2. P. 251–264.