

А.Л. Деревянкина, В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ВЫТЯЖКИ ПОЛОГО ВОЛОКНА

Целью данной работы является построение математической модели устойчивости неизоотермической вытяжки полого волокна, учитывающей технологические параметры процесса и свойства заготовки. Рассмотрен неизоотермический процесс вытяжки полого волокна, который описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, составлена и решена система соответствующего стационарного течения. Произведена линеаризация процесса вытяжки капилляра в окрестности найденного стационарного состояния. В дальнейшем с помощью метода разделения переменных и дискретизации конечными разностями анализ линейной устойчивости сведен к задаче на собственные значения.

Ключевые слова: вытяжка оптических волокон, устойчивость, кратность вытяжки, полое волокно.

A.L. Derevyankina, V.P. Pervadchuk, D.B. Vladimirova

A MATHEMATICAL ANALYSIS OF THE STABILITY OF NON- ISOTHERMAL HOLLOW FIBER DRAWING

Constructing a mathematical model of non-isothermal drawing hollow fiber, with the technological parameters of the process and the properties of the workpiece is the main aim of the research. In order to achieve this, a non-isothermal process of drawing hollow fiber, which has form of system of nonlinear partial differential equations, is considered. A system describing the corresponding stationary flow has been compiled and solved. Linearization of the capillary drawing process in the vicinity of the found stationary state was performed. Then, using the separation variables method and discretization by finite differences, the analysis of linear stability was reduced to an eigenvalue problem.

Keywords: drawing of optical fibers, stability, draw ratio, hollow fiber.

Введение

Сегодня волоконная оптика прочно заняла лидирующие позиции среди различных отраслей науки и техники. Волоконно-оптические технологии широко используются в системах дальней и локальной связи, приборостроении, медицинских датчиках и др.

Одним из главных этапов производства волокна является его вытяжка. При этом процессе цилиндрическая заготовка подается в разогретую печь вертикального типа. В результате кварцевое стекло плавится, образуя свободную жидкую струю, которая опускается на приемный барабан. Вращение барабана создает натяжение, которое обеспечивает утончение нити [7]. При этом требуется высокая степень устойчивости параметров, чтобы отклонение диаметра готового волокна не превышало 1 %. Однако, как и любой процесс, вытяжка волокна подвержена внешним флуктуациям, в частности колебанию температуры нагревательного элемента, отклонению диаметра заготовки и др., которые, в свою очередь, могут негативно повлиять на характеристики готового волокна. Поэтому очевидна важность анализа линейной устойчивости рассматриваемого процесса и его реакции на возникающие возмущения.

Деревянкина Анна Леонидовна

старший преподаватель кафедры прикладной математики. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, город Пермь. Сфера научных интересов: устойчивость технологических процессов, вытяжка волокна. Автор более 20 опубликованных научных работ.

Электронный адрес: al_derevyankina@mail.ru

Первадчук Владимир Павлович

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, город Пермь. Сфера научных интересов: математическое моделирование и оптимальное управление сосредоточенными и распределенными системами. Автор более 200 опубликованных научных работ.

Электронный адрес: pervadchuk@mail.ru

Владимирова Дарья Борисовна

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, город Пермь. Сфера научных интересов: математическое моделирование и оптимальное управление сосредоточенными и распределенными системами. Автор более 70 опубликованных научных работ.

Электронный адрес: shumkova_darya@mail.ru

Математическая модель неизотермической процесса вытяжки полого волокна
 Схема вытяжки полого волокна и его характеристики показаны на Рисунке 1.

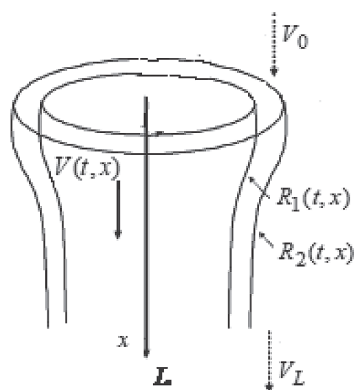


Рисунок 1. Схема вытяжки полого волокна

Рассмотрим одномерную систему координат (здесь пространственная ось ориентирована вниз). Направление аналогично направлению вытяжки (вдоль оси симметрии). Процесс формирования оптического волокна описывается течением одноосной ньютоновской жидкости с переменной вязкостью, зависящей от температуры. Математическая

модель такого процесса описывается системой уравнений в частных производных: первое уравнение – уравнение движения, второе и третье – уравнения неразрывности, четвертое – уравнение теплопроводности (одномерная аппроксимация) [2; 8].

$$\left\{ \begin{aligned} & \rho(\bar{R}_2^2(z,t) - \bar{R}_1^2(z,t)) \left(\frac{\partial \bar{V}(z,t)}{\partial t} + V(z,t) \frac{\partial \bar{V}(z,t)}{\partial z} - g \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial z} \left(3\bar{\mu}(\bar{R}_2^2(z,t) - \bar{R}_1^2(z,t)) \frac{\partial \bar{V}(z,t)}{\partial x} + \gamma(\bar{R}_2(z,t) + \bar{R}_1(z,t)) \right), \\ & \frac{\partial \bar{R}_1^2(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{V}(z,t)\bar{R}_1^2(z,t))}{\partial z} = \frac{P_0\bar{R}_1^2(z,t)\bar{R}_2^2(z,t) - \gamma\bar{R}_1(z,t)\bar{R}_2(z,t)(\bar{R}_1(z,t) + \bar{R}_2(z,t))}{\mu(T)(R_2(z,t)^2 - R_1(z,t)^2)}, \\ & \frac{\partial \bar{R}_2^2(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{V}(z,t)\bar{R}_2^2(z,t))}{\partial z} = \frac{P_0\bar{R}_1^2(z,t)\bar{R}_2^2(z,t) - \gamma\bar{R}_1(z,t)\bar{R}_2(z,t)(\bar{R}_1(z,t) + \bar{R}_2(z,t))}{\mu(R_2^2(z,t) - R_1^2(z,t))}, \\ & (\bar{R}_2^2(z,t) - \bar{R}_1^2(z,t)) \left(\frac{\partial \bar{T}(z,t)}{\partial t} + \bar{V}(z,t) \frac{\partial \bar{T}(z,t)}{\partial z} \right) \rho C_p = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{эф}(\bar{R}_2^2(z,t) - \bar{R}_1^2(z,t)) \frac{\partial \bar{T}(z,t)}{\partial z} \right) - \\ & - 2\bar{R}_1(z,t) \sqrt{1 + \bar{R}_1'^2(z,t)} \alpha_1 (\bar{T}(z,t) - T_n) - \\ & - 2\bar{R}_2(z,t) \sqrt{1 + \bar{R}_2'^2(z,t)} [\omega_2 \varepsilon n_c^2 \sigma_0 (\bar{T}^4(z,t) - T_B^4) + \alpha_2 (\bar{T}(z,t) - T_0)] + \\ & + 4n_c^2 \sigma_0 \bar{R}_2(z,t) R_p (R_p - \bar{R}_2(z,t)) \int_0^1 \frac{(\beta \varepsilon_p T_p^4(\eta,t) - \varepsilon \bar{T}^4(z,t)) ((R_p - \bar{R}_2(z,t)) + |\bar{R}_2'(z,t)|(z - \eta))}{((\eta - z)^2 + (R_p - \bar{R}_2(z,t))^2)^2} d\eta, \\ & \bar{V}(z,0) = V_s(z), \quad \bar{V}(0,t) = V_0, \quad \bar{V}(L,t) = V_L \\ & \bar{R}_1(z,0) = R_{1s}(z), \quad \bar{R}_1(0,t) = R_{10} \\ & \bar{R}_2(z,0) = R_{2s}(z), \quad \bar{R}_2(0,t) = R_{20} \\ & \bar{T}(z,0) = T_s(z), \quad \bar{T}(0,t) = \bar{T}_0, \quad \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Здесь z – продольная координата, $z \in [0, L]$; t – время; $\bar{R}_2(z,t)$ – внешний радиус капилляра; $R_1(z,t)$ – внутренний радиус капилляра; $\bar{V}(z,t)$ – скорость течения расплава; $\bar{T}(z,t)$ – температура расплава; $\mu(\bar{T}(z,t))$ – вязкость расплава кварца; $T_p(z,t), T_B, T_n, T_0$ – соответственно, температура печи, газа внутри и снаружи трубы, температура окружающей среды; $\lambda_T, \lambda_{эф}$ – коэффициенты молекулярной теплопроводности расплава и эффективный, учитывающий как молекулярную, так и лучистую проводимость; ν – коэффициент отражения; $\varepsilon_p, \varepsilon$ – степень черноты нагревательного элемента и расплава; ρ, C_p – плотность и удельная теплопроводность расплава соответственно; g – коэффициент поверхностного натяжения; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи с внутренней и внешней поверхности печи; P_0 – разность между внутренним и внешним давлениями; R_p – радиус печи; V_0, V_L – скорость подачи и вытяжки волокна; $V_s(z), R_{1s}(z), R_{2s}(z), T_s(z)$ – функции, соответствующие начальному состоянию системы; R_{10}, R_{20}, T_0 – соответственно, внутренний и внешний радиусы заготовки и ее температура.

Обезразмерим данную систему следующим образом [3; 5]:

$$z = \frac{\bar{z}}{L}, t = \frac{\bar{t}V_L}{L} V(z,t) = \frac{\bar{V}(z,t)}{V_L}, R_1(z,t) = \frac{\bar{R}_1(z,t)}{L}, R_2(z,t) = \frac{\bar{R}_2(z,t)}{L}, T(z,t) = \frac{\bar{T}(z,t)}{T_0},$$

$$\lambda = \frac{\lambda_{эф}}{\lambda_0}, \mu = \frac{\bar{\mu}}{M_0}$$

В результате система примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} & (R_2^2(z,t) - R_1^2(z,t)) \left(\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} + V(z,t) \frac{\partial V(z,t)}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{3}{Re} \frac{\partial}{\partial z} \left((R_2^2(z,t) - R_1^2(z,t)) \mu \frac{\partial V(z,t)}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{(R_2^2(z,t) - R_1^2(z,t))}{Fr} + \frac{1}{We} \frac{\partial (R_1(z,t) + R_2(z,t))}{\partial z}, \\ & \frac{\partial R_1^2(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial (V(z,t) R_1^2(z,t))}{\partial z} = \frac{La R_1^2(z,t) R_2^2(z,t) - \frac{1}{Ma} R_1(z,t) R_2(z,t) (R_1(z,t) + R_2(z,t))}{\mu (R_2^2(z,t) - R_1^2(z,t))}, \\ & \frac{\partial R_2^2(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial (V(z,t) R_2^2(z,t))}{\partial z} = \frac{La R_1^2(z,t) R_2^2(z,t) - \frac{1}{Ma} R_1(z,t) R_2(z,t) (R_1(z,t) + R_2(z,t))}{\mu (R_2^2 - R_1^2)} \\ & (R_2^2(z,t) - R_1^2(z,t)) \left(\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} + V(z,t) \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right) = \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda (R_2^2(z,t) - R_1^2(z,t)) \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right) - \\ & - 2R_1(z,t) \sqrt{1 + R_1'^2(z,t)} St_1 (T(z,t) - T_n) - 2R_2(z,t) \sqrt{1 + R_2'^2(z,t)} St_2 (T(z,t) - 1) - \\ & - 2\chi_1 R_2(z,t) \sqrt{1 + R_2'^2(z,t)} St_2 (T^4(z,t) - T_B^4) + \\ & + 4\chi_2 R_2(z,t) R_p (R_p - R_2(z,t)) \int_0^1 \frac{(\beta \varepsilon_p T_p^4(\eta,t) - \varepsilon T^4(z,t)) ((R_p - R_2(z,t)) + k |R_2'(z,t)| (z - \eta))}{((\eta - z)^2 + (R_p - R_2(z,t))^2)^2} d\eta, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$V(z,0) = \frac{V_s(z)}{V_L}, \quad V(0,t) = \frac{1}{E}, \quad V(L,t) = 1$$

$$R_1(z,0) = \frac{R_{1s}(z)}{L}, \quad R_1(0,t) = \frac{R_{10}}{L}$$

$$R_2(z,0) = \frac{R_{2s}(z)}{L}, \quad R_2(0,t) = \frac{R_{20}}{L}$$

$$T(z,0) = \frac{T_s(z)}{T_0}, \quad T(0,t) = \frac{\bar{T}_0}{T_0}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0$$

где $Re = \frac{c V_L L}{\mu}$ – число Рейнольдса; $Fr = \frac{V_L^2}{Lg}$ – число Фруда; $We = \frac{\rho L V_L^2}{\gamma}$ – число Вебера; $Pe = \frac{\rho C_p V_L L}{\lambda_0}$ – число Пекле; $\chi_1 = \frac{\omega_2 \varepsilon n_c^2 \sigma_0 T_0^3}{\rho C_p V_L}$, $\chi_2 = \frac{n_c^2 \sigma_0 T_0^3}{\rho C_p V_L}$ – безразмерные ком-

плексы; $St_1 = \frac{\alpha_1}{\rho C p v_0}$, $St_2 = \frac{\alpha_2}{\rho C p v_0}$ – критерий Стэнтона; $La = \frac{\bar{P}_0 L}{m_0 V_L}$, $Ma = \frac{\mu_0 V_L}{z}$ – критерий взаимодействия капиллярных сил и сил молекулярного трения соответственно.

Стационарное решение неизотермического процесса вытяжки полого волокна

Для дальнейшего анализа устойчивости необходимо найти решение соответствующей стационарной системы, которая имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned}
 & (\bar{R}_2^2(z) - \bar{R}_1^2(z)) \left(\bar{V}(z) \frac{d\bar{V}(z)}{dz} \right) = \\
 & = \frac{3}{Re} \cdot \frac{d}{dz} \left((\bar{R}_2^2(z) - \bar{R}_1^2(z)) \mu \frac{d\bar{V}(z)}{dz} \right) + \\
 & + \frac{(\bar{R}_2^2(z) - \bar{R}_1^2(z))}{Fr} + \frac{1}{We} \cdot \frac{d(\bar{R}_1(z) + \bar{R}_2(z))}{dz}, \\
 & \frac{d(\bar{V}(z)\bar{R}_1^2(z))}{dz} = \frac{La\bar{R}_1^2(z)\bar{R}_2^2(z) - \frac{1}{Ma}\bar{R}_1(z)\bar{R}_2(z)(\bar{R}_1(z) + \bar{R}_2(z))}{\mu(\bar{R}_2^2(z) - \bar{R}_1^2(z))}, \\
 & \frac{d(\bar{V}(z)\bar{R}_2^2(z))}{dz} = \frac{La\bar{R}_1^2(z)\bar{R}_2^2(z) - \frac{1}{Ma}\bar{R}_1(z)\bar{R}_2(z)(\bar{R}_1(z) + \bar{R}_2(z))}{\mu(\bar{R}_2^2(z) - \bar{R}_1^2(z))}, \\
 & (\bar{R}_2^2(z) - \bar{R}_1^2(z)) \left(\bar{V}(z) \frac{d\bar{T}(z)}{dz} \right) = \frac{1}{Pe} \frac{d}{dz} \left(\lambda(\bar{R}_2^2(z) - \bar{R}_1^2(z)) \frac{d\bar{T}(z)}{dz} \right) - \\
 & - 2\bar{R}_1(z) \sqrt{1 + \bar{R}_1'^2(z)} St_1 (\bar{T}(z) - \bar{T}_n) - 2\bar{R}_2(z) \sqrt{1 + \bar{R}_2'^2(z)} St_2 (\bar{T}(z) - 1) - \\
 & - 2\chi_1 \bar{R}_2(z) \sqrt{1 + \bar{R}_2'^2(z)} St_2 (\bar{T}^4(z) - T_B^4) + \\
 & + 4\chi_2 \bar{R}_2(z) R_p (R_p - \bar{R}_2(z)) \int_0^1 \frac{(\beta \varepsilon_p T_p^4 - \varepsilon \bar{T}^4(\eta)) ((R_p - \bar{R}_2(z)) + k |\bar{R}_2'(z)| (z - \eta))}{((\eta - z)^2 + (R_p - \bar{R}_2(z))^2)^2} d\eta, \\
 & \bar{V}(0) = \frac{1}{E}, \quad \bar{V}(L) = 1 \\
 & \bar{R}_1(0) = \frac{R_{10}}{L} \\
 & \bar{R}_2(0) = \frac{R_{20}}{L} \\
 & \bar{T}(0) = \frac{\bar{T}_0}{T_0}, \quad \frac{d\bar{T}}{dz} \Big|_{z=L} = 0
 \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Здесь $\bar{V}(z), \bar{R}_1(z), \bar{R}_2(z), \bar{T}(z)$ – параметры стационарного течения, к которому стремится реальный процесс. Именно это состояние в дальнейшем будет исследовано на устойчивость.

*Математическая модель устойчивости неизотермического процесса
вытяжки полого волокна*

Известно, что если какая-то нелинейная система линеаризована в окрестности своего стационарного состояния, то анализ такой линеаризованной системы может заменить анализ исходной системы [8].

Соответственно, на первом этапе была выполнена линеаризация: определяющие состояние системы параметры разделялись на основные и возмущающие:

$$\begin{aligned} V(z,t) &= \bar{V}(z) [1 + \tilde{V}(z,t)]; \\ T(z,t) &= \bar{T}(z) [1 + \tilde{T}(z,t)]; \\ R_1(z,t) &= \bar{R}_1(z) [1 + \tilde{R}_1(z,t)]; \\ R_2(z,t) &= \bar{R}_2(z) [1 + \tilde{R}_2(z,t)]. \end{aligned}$$

В роли основных параметров выступают стационарные решения системы (3). В результате была получена система, описывающая эволюцию возмущающих воздействий. Для упрощения записи всюду далее

$$\begin{aligned} \tilde{V}(z,t) &= \tilde{V}, \tilde{T}(z,t) = \tilde{T}, \tilde{R}_1(z,t) = \tilde{R}_1, \tilde{R}_2(z,t) = \tilde{R}_2, \\ \bar{V}(z) &= \bar{V}, \bar{T}(z) = \bar{T}, \bar{R}_1(z) = \bar{R}_1, \bar{R}_2(z) = \bar{R}_2; \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} &= \frac{3}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2} + \beta_1(z) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + \beta_2(z) \tilde{V} \\ &+ \alpha_1(z) \frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial z} + \alpha_2(z) \tilde{R}_2 + \theta_1(z) \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial z} \\ &+ \theta_2(z) \tilde{R}_1 + \varphi_1(z) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \varphi_2(z) \tilde{T}, \\ \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial t} &+ \beta_3(z) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + \vartheta_4(z) \tilde{V} + \\ &+ \theta_3(z) \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial z} + \theta_4(z) \tilde{R}_1 + \alpha_3(z) \tilde{R}_2 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial t} &+ \beta_3(z) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + \beta_5(z) \tilde{V} + \\ &+ \theta_3(z) \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial z} + \theta_5(z) \tilde{R}_1 + \alpha_4(z) \tilde{R}_2 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} + \varphi_3(z) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \varphi_4(z) \tilde{T} + \alpha_5(z) \frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial z} \\ &+ \alpha_6(z) \tilde{R}_2 + \theta_6(x) \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial x} + \theta_7(z) \tilde{R}_1 + \beta_6(z) \tilde{V}. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Соответствующие коэффициенты зависят только от стационарного решения исходной системы:

$$\alpha_1(z) = \frac{6m \bar{V}' \bar{R}_2^2}{\bar{V} \text{Re} \bar{R}^2} + \frac{\bar{R}_2}{\text{We} \bar{V} \bar{R}^2},$$

$$\alpha_2(z) = \frac{-2\bar{R}_2^2 \bar{V}}{\bar{R}^2} + \frac{6}{\bar{R}^2 \bar{V} \text{Re}} \frac{d}{dz} \left(\mu \bar{R}_2^2 \frac{d\bar{V}}{dz} \right) + \frac{2\bar{R}_2^2}{\bar{V} Fr \bar{R}^2} + \frac{\bar{R}_2'}{We \bar{V} \bar{R}^2},$$

$$\beta_1(z) = \frac{3}{\text{Re} \bar{V} \bar{R}^2} \left((\mu \bar{R}^2 \bar{V})' + (\mu \bar{R}^2 \bar{V}') \right) - \bar{V},$$

$$\beta_2(z) = \frac{3}{\text{Re} \bar{V} \bar{R}^2} \frac{d}{dx} (\mu \bar{R}^2 \bar{V}') - 2 \bar{V}',$$

$$\theta_1(z) = \frac{-6 \bar{R}_1^2 \bar{V}' M}{\bar{R}^2 \bar{V} \text{Re}} + \frac{\bar{R}_1}{We \bar{V} \bar{R}^2},$$

$$\theta_2(z) = \frac{-6}{\bar{R}^2 \bar{V} \text{Re}} \frac{d}{dx} \left(\mu \bar{R}_1^2 \frac{d\bar{V}}{dx} \right) + \frac{2\bar{V}' \bar{R}_1^2}{\bar{R}^2} - \frac{2\bar{R}_1^2}{\bar{V} Fr \bar{R}^2} + \frac{\bar{R}_1'}{We \bar{V} \bar{R}^2},$$

$$\varphi_1(z) = -\frac{3a_2 \mu \bar{T} \bar{V}'}{\text{Re} \bar{V}},$$

$$\varphi_2(z) = -\frac{1}{\text{Re} \bar{R}^2 \bar{V}} \frac{d}{dx} \left(3\mu a_2 \bar{T} \bar{R}^2 \frac{d\bar{V}}{dx} \right)$$

$$\beta_3(z) = \frac{\bar{V}}{2},$$

$$\beta_4(z) = \frac{1}{2\bar{R}_1^2} \frac{d}{dx} (\bar{R}_1^2 \bar{V}),$$

$$\theta_3(z) = \bar{V},$$

$$\theta_4(z) = \frac{1}{\bar{R}_1^2} \frac{d}{dx} (\bar{R}_1^2 \bar{V}) - \frac{1}{2\bar{R}_1} \times$$

$$\times \left(\frac{2La \bar{R}_1 \bar{R}_2^2 - \frac{2}{Ma} \bar{R}_1 \bar{R}_2 - \frac{1}{Ma} \bar{R}_2^2}{\mu \bar{R}^2} - \frac{2\bar{R}_1 \left(La \bar{R}_1^2 \bar{R}_2^2 - \frac{1}{Ma} \bar{R}_1 \bar{R}_2 (\bar{R}_1 + \bar{R}_2) \right)}{\mu (\bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2)^2} \right),$$

$$\alpha_3(z) = -\frac{\bar{R}_2}{2\bar{R}_1^2} \left(\frac{2La \bar{R}_1^2 \bar{R}_2 - \frac{2}{Ma} \bar{R}_1 \bar{R}_2 - \frac{1}{Ma} \bar{R}_1^2}{m \bar{R}^2} \right) +$$

$$+ \frac{\bar{R}_2}{2\bar{R}_1^2} \left(\frac{2\bar{R}_2 \left(La \bar{R}_1^2 \bar{R}_2^2 - \frac{1}{Ma} \bar{R}_1 \bar{R}_2 (\bar{R}_1 + \bar{R}_2) \right)}{\mu (\bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2)^2} \right)$$

$$\beta_5(z) = \frac{1}{2\bar{R}_2^2} \frac{d}{dz} (\bar{R}_2^2 \bar{V}),$$

$$\alpha_4(z) = \frac{1}{\bar{R}_2^2} \frac{d}{dz} (\bar{R}_2^2 \bar{V}) - \frac{1}{2\bar{R}_2} \left(\frac{2La\bar{R}_1^2\bar{R}_2 - \frac{2}{Ma}\bar{R}_1\bar{R}_2 - \frac{1}{Ma}\bar{R}_1^2}{\mu\bar{R}^2} - \frac{2\bar{R}_2 \left(La\bar{R}_1^2\bar{R}_2^2 - \frac{1}{Ma}\bar{R}_1\bar{R}_2(\bar{R}_1 + \bar{R}_2) \right)}{\mu(\bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2)^2} \right),$$

$$\theta_5(z) = -\frac{\bar{R}_1}{2\bar{R}_2^2} \left(\frac{2La\bar{R}_1\bar{R}_2^2 - \frac{2}{Ma}\bar{R}_1\bar{R}_2 - \frac{1}{Ma}\bar{R}_2^2}{\mu\bar{R}^2} \right) - \frac{\bar{R}_1}{2\bar{R}_2^2} \left(\frac{2\bar{R}_1 \left(La\bar{R}_1^2\bar{R}_2^2 - \frac{1}{Ma}\bar{R}_1\bar{R}_2(\bar{R}_1 + \bar{R}_2) \right)}{\mu(\bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2)^2} \right),$$

$$\varphi_3(z) = \frac{(\lambda\bar{R}^2\bar{T})' + \lambda\bar{R}^2\bar{T}'}{\bar{R}^2\bar{T}Pe} - \bar{V},$$

$$\varphi_4(z) = \frac{1}{\bar{R}^2\bar{T}} \left(\frac{1}{Pe} \frac{d}{dx} \left(\lambda\bar{R}^2 \frac{d\bar{T}}{dz} \right) - 2\bar{R}_1\bar{T}\sqrt{1+\bar{R}_1'^2} St_1 - 2\bar{R}_1\bar{T}\sqrt{1+\bar{R}_1'^2} St_1 - 2\bar{R}_2\bar{T}\sqrt{1+\bar{R}_2'^2} St_2 - 8\bar{R}_2\bar{T}^4\sqrt{1+\bar{R}_2'^2} \chi_1 - \bar{V}\bar{R}^2 \frac{d\bar{T}}{dx} - 16\chi R_p \varepsilon (R_p - \bar{R}_2) \bar{T}^4 \int_0^1 \frac{R_p - \bar{R}_2 + k\bar{R}_2'(z-\eta)}{[(\eta-z)^2 + (R_p - \bar{R}_2)^2]^2} d\eta \right),$$

$$\beta_6(z) = -\frac{\bar{V}\bar{T}'}{\bar{T}},$$

$$\alpha_5(z) = \frac{1}{\bar{R}^2\bar{T}} \left(\frac{2}{Pe} \frac{d}{dz} \left(\lambda\bar{R}_2^2 \frac{d\bar{T}}{dz} \right) - 2\bar{R}_2'\bar{R}_2^2 St_2(\bar{T}-1) - 2\bar{R}_2'\bar{R}_2^2 (\bar{T}^4 - \bar{T}_B^4) \chi_1 + 4\chi_2 R_p \bar{R}_2^2 (R_p - \bar{R}_2) k \int_0^1 \frac{(\beta\varepsilon_p T_p^4 - \varepsilon\bar{T}^4)(z-\eta)}{[(\eta-z)^2 + (R_p - \bar{R}_2)^2]^2} d\eta \right),$$

$$\begin{aligned} \alpha_6(z) = & \frac{1}{\bar{R}^2 \bar{T}} \left(\frac{2}{Pe} \frac{d}{dz} \left(\lambda \bar{R}_2^2 \frac{d\bar{T}}{dz} \right) - 2\bar{R}_2 \bar{T} \left(1 + \frac{3}{2} \bar{R}_2'^2 \right) St_2 (\bar{T} - 1) - \right. \\ & \left. - 2\bar{R}_2 (\bar{T}^4 - \bar{T}_B^4) \left(1 + \frac{3}{2} \bar{R}_2'^2 \right) \chi_1 - 2\sqrt{\bar{R}_2}^2 \frac{d\bar{T}}{dz} \right. \\ & \left. + 4\chi_2 R_p \bar{R}_2 \int_0^1 (\beta \varepsilon_p T_p^4 - \varepsilon \bar{T}^4) \frac{(R_p - \bar{R}_2)(R_p - 3\bar{R}_2) + k\bar{R}_2'(z - \eta)(R_p - 2\bar{R}_2)}{[(\eta - z)^2 + (R_p - \bar{R}_2)^2]^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(4\bar{R}_2)(R_p - \bar{R}_2)(R_p - \bar{R}_2 + k\bar{R}_2'(z - \eta))}{[(\eta - z)^2 + (R_p - \bar{R}_2)^2]^3} d\eta \right), \\ \theta_7(z) = & \frac{1}{\bar{R}^2 \bar{T}} \left[-\frac{2}{Pe} \frac{d}{dz} \left(\lambda \bar{R}_1^2 \frac{d\bar{T}}{dz} \right) - 2St_1 \bar{R}_1 (\bar{T} - \bar{T}_H) \left(1 + \frac{3}{2} \bar{R}_1'^2 \right) + 2\sqrt{\bar{R}_1}^2 \frac{d\bar{T}}{dz} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{R}^2 = \bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2$.

На следующем этапе был применен метод разделения переменных [5; 6], а именно выполнена замена:

$$\tilde{R}_1(z, \tau) = r_1(z) e^{-i\omega\tau};$$

$$\tilde{R}_2(z, \tau) = r_2(z) e^{-i\omega\tau};$$

$$\tilde{T}(z, \tau) = t(z) e^{-i\omega\tau};$$

$$\tilde{V}(z, \tau) = v(z) e^{-i\omega\tau}.$$

В результате была получена система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3\mu}{Re} v''(z) + \beta_1(z) v'(z) + [\beta_2(z) + i\omega] v(z) + \alpha_1(z) r_2'(z) + \alpha_2(z) r_2(z) + \\ + \theta_1(z) r_1'(z) + \theta_2(z) r_1(z) + \varphi_1(z) t'(z) + \varphi_2(z) t(z) = 0, \\ \beta_3(z) v'(z) + \beta_4(z) v(z) + \theta_3(z) r_1'(z) + (\theta_4(z) - i\omega) r_1(z) + \alpha_3(z) r_2(z) = 0, \\ \beta_3(z) v'(z) + \beta_5(z) v(z) + \theta_3(z) r_2'(z) + (\alpha_4(z) - i\omega) r_2(z) + \theta_5(z) r_1(z) = 0, \\ \frac{\lambda}{Pe} t''(z) + \varphi_3(z) t'(z) + (\varphi_4(z) + i\omega) t(z) + \alpha_5(z) r_2'(z) + \alpha_6(z) r_2(z) + \\ + \theta_6(z) r_1'(z) + \theta_7(z) r_1(z) + \beta_6(z) v(z) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

С помощью дискретизации конечно-разностным методом (центральная аппроксимация) перейдем к системе линейных алгебраических уравнений.

В матричном виде система имеет вид

$$(iA - \omega E)X = 0,$$

где E – единичная матрица; A – матрица коэффициентов при переменных; $X = \begin{pmatrix} v_k \\ r_{1k} \\ r_{2k} \\ t_k \end{pmatrix}$ – вектор-столбец значений переменных на каждом шаге.

Стоит отметить, что размерность вышеперечисленных матриц зависит от количества узлов, выбранного при дискретизации системы (4).

По матричной форме видно, что ω являются собственными значениям матрицы коэффициентов А. Так как собственная частота является комплексным числом, то $\omega = \omega_2 + i\omega_i$, где ω_i – коэффициент нарастания. Именно этот коэффициент позволяет судить о том, затухают или нарастают колебания. Если все $\omega_i < 0$, можно говорить, что колебания затухают, значит, исследуемое состояние (стационарное течение) устойчиво, при $\omega_i > 0$ – неустойчиво [5; 6]. Тем самым задача анализа устойчивости свелась к задаче на собственные числа матрицы коэффициентов. При этом стоит отметить, что для определения устойчивости достаточно оценивать только максимальное значение мнимой части $\omega_i^{(1)}$.

В качестве примера сформулируем алгоритм заполнения матрицы А в случаи числа точек дискретизации 3 и, соответственно, количество уравнений – 12.

Коэффициенты при											
v_1	r_{11}	r_{21}	t_1	v_2	r_{12}	r_{22}	t_2	v_3	r_{13}	r_{23}	t_3
V_{11}	R_{111}	R_{121}	T_{11}	VV_{V1}	0	0	0	0	0	0	0
V_{21}	R_{211}	R_{221}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V_{31}	R_{311}	R_{321}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V_{41}	R_{411}	R_{421}	T_{41}	0	0	0	TTT_1	0	0	0	0
VV_{11}	RR_{111}	RR_{121}	TT_{11}	V_{12}	R_{112}	R_{122}	T_{12}	VV_{V2}	0	0	0
VV_{21}	RR_{221}	0	0	V_{22}	R_{212}	R_{222}	0	0	0	0	0
VV_{21}	0	RR_{221}	0	V_{32}	R_{312}	R_{322}	0	0	0	0	0
0	RR_{411}	RR_{421}	TT_{41}	V_{42}	R_{412}	R_{422}	T_{42}	0	0	0	TTT_2
0	0	0	0	VV_{12}	RR_{112}	RR_{122}	TT_{12}	V_{13}	R_{113}	R_{123}	T_{13}
0	0	0	0	VV_{22}	RR_{222}	0	0	V_{23}	R_{213}	R_{223}	0
0	0	0	0	VV_{22}	0	RR_{222}	0	V_{33}	R_{313}	R_{323}	0
0	0	0	0	0	RR_{412}	RR_{422}	TT_{42}	V_{43}	R_{413}	R_{423}	T_{43}

Здесь $VV_{V_i} = \frac{3\mu}{Re} \frac{1}{H^2}$; $TTT_i = \frac{\lambda}{Pe} \frac{1}{H^2}$;

$$\begin{aligned}
 V_{1i} &= -\frac{6\mu}{\text{Re}} \frac{1}{H^2} + \frac{\beta_{1i}}{H} + \beta_{2i}; R_{11i} = \theta_{1i} \frac{1}{H} + \theta_{2i}; \\
 R_{12i} &= \frac{\alpha_{1i}}{H} + \alpha_{2i}; T_{1i} = \frac{\varphi_{1i}}{H} + \varphi_{2i}; V_{2i} = -\frac{\beta_{3i}}{H} - \beta_{4i}; \\
 R_{21i} &= -\theta_{3i} \frac{1}{H} - \theta_{4i}; R_{22i} = -\alpha_{3i}; V_{3i} = -\alpha_{5i}; \\
 R_{31i} &= -\theta_{5i}; R_{32i} = -\frac{\theta_{3i}}{H} - \alpha_{4i}; V_{4i} = -\beta_{6i}; \\
 R_{41i} &= \theta_{6i} \frac{1}{H} + \theta_{7i}; R_{42i} = \alpha_{5i} \frac{1}{H} + \alpha_{6i}; T_{4i} = -\frac{\lambda}{\text{Pe}H^2} + \frac{\varphi_{3i}}{H} + \varphi_{4i}; \\
 VV_{1i} &= \frac{3\mu}{\text{Re}} \frac{1}{H^2} - \frac{\beta_{1i}}{H}; RR_{11i} = -\theta_{1i} \frac{1}{H}; RR_{12i} = -\frac{\alpha_{1i}}{H}; \\
 TT_{1i} &= -\frac{\varphi_{1i}}{H}; VV_{2i} = \frac{\beta_{3i}}{H}; RR_{22i} = \theta_{3i} \frac{1}{H}; RR_{41i} = \frac{\theta_{6i}}{H}; \\
 RR_{42i} &= -\frac{\alpha_{5i}}{H}; TT_{4i} = \frac{\lambda}{\text{Pe}H^2} - \frac{\varphi_{3i}}{H};
 \end{aligned}$$

H – длина шага дискретизации.

Заключение

Одним из главных этапов производства оптического волокна является его вытяжка. Анализ устойчивости данного процесса необходим для обеспечения качества готового продукта. В данной работе построена модель устойчивости вытяжки полого волокна в условиях неизотермичности: рассмотрена система, описывающая технологический процесс производства в мерном и обезразмеренном виде. Проведена линеаризация в окрестности стационарного решения и дискретизация конечно-разностным методом полученной системы. Задача определения устойчивости сведена к задаче на собственные числа матрицы коэффициентов. Вид и алгоритм формирования матрицы также сформулирован в данной работе.

Литература

1. Butt A.I.K., Abbas M., Ahmad W. (2020) A mathematical analysis of an isothermal tube drawing process. *Alexandria Engineering Journal*, no. 59 (5).
2. Christopher J. Voyce, Fitt Alistair D., Hayes John R., Monro Tanya M. (2009) Mathematical Modeling of the Self-Pressurizing Mechanism for Microstructured Fiber Drawing. *Journal of lightwave technology*, vol. 27, no. 7.
3. Christopher J. Voyce, Fitt Alistair D., Monro T. M. (2004) Mathematical model of the spinning of microstructured fibres. *Opticsexpress*, vol. 12, no. 23.
4. Voyce C.J., Fitt A.D., Monro T.M. (2008) The mathematical modelling of rotating capillary tubes or holey-fibre manufacture. *J. Eng Math*, 60:69–87.
5. Yarin A.L., Gospodinov P., Roussionov V.L. (1994) Stability loss and sensitivity in hollow fiber drawing. *Physics of Fluids*, vol. 6, no. 4.
6. Васильев В.Н., Дульнев Г.Н., Наумчик В.Д. Нестационарные процессы при формировании оптического волокна. Устойчивость процесса вытяжки // Энергоперенос в конвективных потоках. Минск, 1985. С. 64–76.

7. Иванов Г.А., Пervadчук В.П. Технология производства и свойства кварцевых оптических волокон: учеб. пособие. Пермь: Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2011. 171 с.
8. Наумчик В.Д. Квазиодномерная модель процесса вытяжки оптических волокон // Энергоперенос в конвективных потоках. Минск: ИТМО АН БССР, 1985.
9. Пervadчук В.П., Владимирова Д.Б., Деревянкина А.А. Устойчивость процесса вытяжки кварцевых волокон в зависимости от температуры поверхности нагревательного элемента // Фотон-экспресс. 2015. № 6 (126).
10. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.

References

1. Butt A.I.K., Abbas M., Ahmad W. (2020) A mathematical analysis of an isothermal tube drawing process. *Alexandria Engineering Journal*, no. 59 (5).
2. Christopher J. Voyce, Fitt Alistair D., Hayes John R., Monro Tanya M. (2009) Mathematical Modeling of the Self-Pressurizing Mechanism for Microstructured Fiber Drawing. *Journal of lightwave technology*, vol. 27, no. 7.
3. Christopher J. Voyce, Fitt Alistair D., Monro T. M. (2004) Mathematical model of the spinning of microstructured fibres. *Opticsexpress*, vol. 12, no. 23.
4. Voyce C.J., Fitt A.D., Monro T.M. (2008) The mathematical modelling of rotating capillary tubes or holey-fibre manufacture. *J. Eng Math*, 60:69–87.
5. Yarin A.L., Gospodinov P., Roussionv V.L. (1994) Stability loss and sensitivity in hollow fiber drawing. *Physics of Fluids*, vol. 6, no. 4.
6. Vasil'ev V.N., Dul'nev G.N., Naumchik V.D. (1985) *Nestacionarnye processy pri formirovanii opticheskogo volokna. Ustojchivost' processa vytyazhki* [Non-stationary processes during the formation of an optical fiber. Stability of the drawing process]. *Energoperenos v konvektivnyh potokah* [Energy transfer in convective flows]. Minsk, 1985, pp. 64–76 (in Russian).
7. Ivanov G.A., Pervadchuk V.P. (2011) *Tekhnologiya proizvodstva i svojstva kvarcevyh opticheskikh volokon* [Production technology and properties of quartz optical fibers]. Perm', Perm National Research Polytechnic University Publishing, 171 p. (in Russian).
8. Naumchik V.D. (1985) *Kvaziodnomernaya model' processa vytyazhki opticheskikh volokon* [Quasi-one-dimensional model of the optical fiber drawing process]. *Energoperenos v konvektivnyh potokah* [Energy transfer in convective flows]. Minsk, ITMO AN BSSR, 1985 (in Russian).
9. Pervadchuk V.P., Vladimirova D.B., Derevyankina A.L. (2015) *Ustojchivost' processa vytyazhki kvarcevyh volokon v zavisimosti ot temperatury poverhnosti nagrevatel'nogo elementa* [Stability of the drawing process of quartz fibers depending on the surface temperature of the heating element]. *Foton-ekspress*, no. 6 (126) (in Russian).
10. Samarskiy A.A. (1971) *Vvedenie v teoriyu raznostnyh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow, Nauka Publishing, 553 p. (in Russian).