

И.С. Клименко¹
С.В. Холодков²I.S. Klimenko
S.V. Kholodkov**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
И РАСЧЕТА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ
ТЕЧЕНИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО
К ЗАДАЧЕ УДАРА ТВЕРДОГО ТЕЛА
О ДЕФОРМИРУЕМУЮ ПРЕГРАДУ****COMPARATIVE ANALYSIS OF FINITE
ELEMENT AND COMPUTATION
OF PLASTOELASTIC FLOWS
METHODS AS APPLIED
TO BLOW TASK**

В настоящей работе приведен сравнительный анализ двух основных методов решения задачи удара твердого тела о деформируемую преграду. Показаны и обсуждены достоинства и ограничения каждого из методов применительно к специфике постановки конкретных задач подобного типа. Продемонстрирована возможность комбинированного использования обсуждаемых методов при решении статических и динамических задач.

Ключевые слова: математическая модель, твердое тело, деформируемая преграда, сравнительный анализ, достоинства и ограничения методов.

In this paper we present a comparative analysis of the two main methods of solving the problem of the impact of a rigid body about a deformable barrier. The advantages and limitations of each method are showing in relation to the formulation of specificity problems of this type. The possibility of combined using of the discussed methods for solving static and dynamic problems is demonstrated.

Keywords: mathematical model, solid body, deformable barrier, comparative analysis, advantages and limitations of methods.

Введение

В работе [1] нами было проведено исследование распределения полей давления и деформаций, возникающих при ударе твердого тела о деформируемую преграду с использованием численного метода расчета упругопластических течений НАМР. Показано, что при выстрелах из травматического оружия может возникать широкий спектр повреждений – от ссадин и кровоподтеков (гематом), размозжения мягких тканей до проникающих ранений. При этом было отмечено, что применение так называемых лагранжевых сеток, которые лежат в основе метода НАМР, ограничено кругом задач с относительно

небольшими деформациями среды, следовательно, они неприменимы для рассмотрения ситуаций с пробитием моделируемой области. Тем не менее, с их помощью можно получать косвенные данные об уровне возникающих в этом случае нагрузок и тем самым судить о характере протекания процесса, что как нельзя лучше подходит для рассматриваемой задачи удара.

В настоящей работе мы рассматриваем метод конечных элементов (МКЭ) в качестве альтернативы методу НАМР в случае существенных деформаций. Естественным является проведение сравнительного анализа двух названных методов для выявления достоинств и недостатков каждого из них. При этом мы предполагаем более детально исследовать возможности конечно-разностных методов применительно к задачам такого типа, представляющих значительный интерес в рамках теории пластичности.

Теория пластичности, в отличие от теории

¹ Доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем в экономике и управлении НОУ ВПО «Российский новый университет».

² Аспирант НОУ ВПО «Российский новый университет».

упругости, рассматривает тела, которые по своей природе не проявляют свойств упругости либо с самого начала приложения к ним внешнего воздействия (пластическое тело), либо начиная с некоторой стадии такого воздействия (упруго-пластическое тело) [2]. Существенно, что после снятия с таких тел внешних воздействий они не возвращаются к своей исходной форме, т.е. в них сохраняется остаточная деформация.

Распространенными модельными задачами, отражающими наиболее характерные особенности деформирования и разрушения, являются плоские задачи теории упругости и пластичности, и в частности – задачи удара.

Ограниченность класса задач, к которым могут быть применены известные аналитические методы, обусловила целесообразность использования численных методов. К наиболее распространенным и эффективным методам расчета поставленной задачи удара относятся вариационно-сеточный метод конечных элементов (МКЭ) [3] и метод упругопластических течений НАМР [2], представляющий собой разновидность метода конечных разностей (МКР).

1. Достоинства и ограничения метода упругопластических течений НАМР

При реализации этого метода движение рассматривается в переменных Лагранжа [4] с построением сетки в декартовых координатах. Так как задача имеет только два измерения, то вид области сбоку представляет собой простой прямоугольник однородного поперечного сечения. Область, занятая средой, делится на четырехугольники сеткой j - k , которая движется вместе со средой (см. [1]).

Для расчета упругопластических течений необходимо задать уравнение состояния. Уравнение состояния должно описывать упругую, упругопластическую и гидродинамическую стадии движения. Для последних двух режимов движения должны быть сформулированы соответствующие критерии текучести.

Характеристики, представляющие интерес – это новые координаты узлов расчетной сетки. Их можно получить как в виде таблицы, так и в виде изображения деформированной области. Преимущество данного метода в том, что моделируется динамический процесс, а значит, можно исследовать разные ситуации: т.е. можно получить нужные характеристики в любой момент времени.

Одним из основных требований к программе с использованием метода НАМР является возможность вычисления давлений в деформируемой области и на основании этих данных –

построение полей давления и деформаций, возникающих при взаимодействии с ударником.

При проведении расчетов начальная скорость ударника была задана равной 100 м/с (0,1 м/мс), что приблизительно соответствует штатной скорости пули травматического пистолета (энергия которой ≈ 85 Дж).

Основным вопросом при разработке и применении травматического оружия является вопрос, связанный с недопустимостью возникновения поражений внутренних органов. В реальных условиях такое поражение происходит при пробитии пульей наружных покровов.

Поэтому второе основное требование, предъявляемое к созданному нами приложению, используемому метод НАМР, состоит в получении наглядных представлений об уровнях нагрузок, действующих в биологических тканях при ударе, и тем самым косвенно судить о характере процесса. Естественно, что в качестве физико-механических свойств деформируемой преграды в программе были заданы параметры биологической ткани тела человека.

Основные параметры, используемые при моделировании, были заданы следующим образом: плотность $\rho = 1000$ кг/м³, скорость звука = 1600 м/с, модуль объемного сжатия $K = \rho c_0^2 = 25,6 \cdot 10^8$ Па [6].

Очевидно, что следует найти оптимальное значение размеров ячеек сетки, при которых суммарный объем модели гематомы, являющийся основной мерой интенсивности воздействия при ударе, будет изменяться незначительно с уменьшением размеров сетки.

Для этого были проведены количественные расчеты, а именно: строились расчетные сетки с различными параметрами величин ячеек, для определения зависимости распространения полей сжатий и растяжений, а также зависимости объемов гематомы от выбора параметров расчетной сетки.

На рис. 1 приведен график зависимости объема гематомы от размеров ячеек сетки. Очевидно, что на более крупных сетках оценки объемов оказываются достаточно грубыми, поскольку расчетный объем гематомы существенно зависит от размера ячеек. Было проведено восемь расчетов, и по их результатам была построена оптимальная сетка, наглядно демонстрирующая процессы распространения полей сжатия и растяжений (оптимальный размер ячеек расчетной сетки составил 0,5 мм (0,0005 м) при разбиении расчетной области сеткой 401 на 101) в диапазоне скоростей ударника 102–115 м/с (среднее значение 110 м/с). При уменьшении размеров сет-

ки эти объемы различались незначительно. Это подтверждает сходимость используемого метода НАМР, а значит, подтверждает обоснованность его использования.

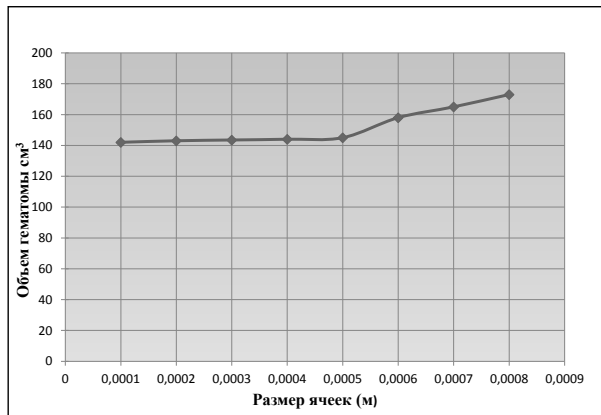


Рис. 1. Зависимость объема гематомы от размера ячеек сетки

Расчеты показывают, что до глубины 1,5 см происходит размоложение тканей, т.е. разрушение их клеточной структуры. На рис. 2 представлено изображение гематомы при достижении ее максимального значения, при котором радиус образовавшейся гематомы равен 3,65 см.

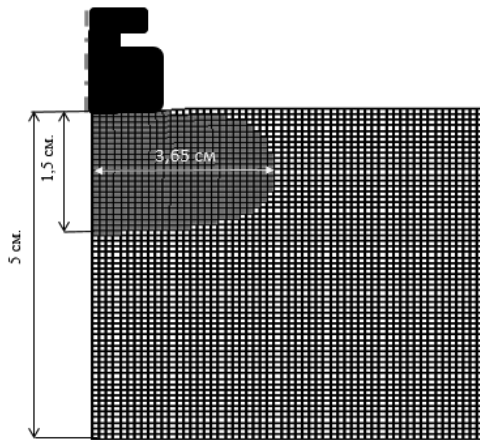


Рис. 2. Изображение гематомы при достижении ее максимального значения

На рис. 3 представлены графики зависимости объемов гематомы и откольной тарелки, полученные на сетке с оптимальным значением величины ячеек расчетной сетки 0,5 мм (0,0005 м) при среднем значении скорости удара 110 м/с.

Как видим, максимальный объем образовавшейся гематомы составил 140 см³ при эффективном ее диаметре $D_{эфф} = 7,3$ см (радиус $3,65$ см $\cdot 2$).

Однако отметим, что программа на основе лагранжевого подхода, который используется в методе упругопластических течений, при описа-

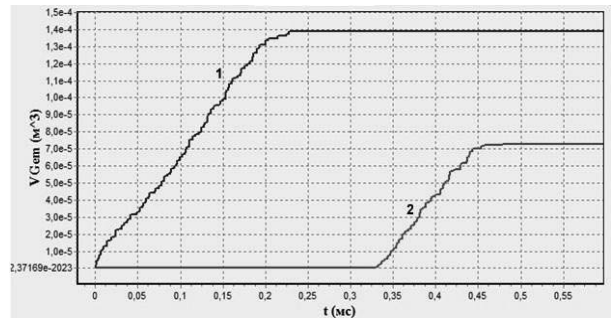


Рис. 3. Объемы гематомы (1) и откольной тарелки (2) при начальной скорости $V = 110$ м/с

нии движения во время удара не может использоваться для расчета процесса проникания (пробития) из-за очень больших деформаций сетки. Следовательно, для моделирования задачи пробития твердого тела целесообразно рассмотреть возможности комбинирования разработанного алгоритма метода упругопластического течения с методом конечных элементов.

2. Достоинства и ограничения метода конечных элементов

При использовании МКЭ для решения задач напряженно-деформированного состояния твердого тела, оно представляется в виде совокупности конечных элементов (КЭ), связанных между собой в узловых точках [3].

Деформируемое тело (конструкция) разбивается на конечные элементы. Конечные элементы могут иметь различную форму и различные размеры. В результате разбиения создается сетка из границ элементов. Пересечения этих границ образуют узлы. Ансамбль из всех конечных элементов и узлов является основой конечно-элементной модели деформируемого тела. Выбор типа, формы и размера конечного элемента (КЭ) зависит от вида напряженно-деформированного состояния, типа и формы, а также нагрузки исследуемого тела. На рис. 4 представлены основные типы КЭ.

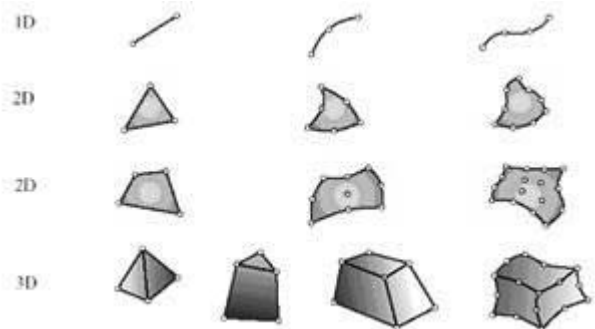


Рис. 4. Типы конечных элементов

Конечные элементы могут описываться одной, двумя или тремя пространственными координатами в зависимости от размерности задачи, для решения которой они предназначены. Соответствующее число внутренних или локальных координат называется собственной размерностью элемента. Плоский (двухмерный) КЭ в виде, например, треугольной или четырёхугольной пластины используется для моделирования плоского напряжённого или плоского деформированного состояния, что вполне подходит для моделирования нашей задачи.

Пример очень мелкого разбиения области на конечные элементы показан на рис. 5.

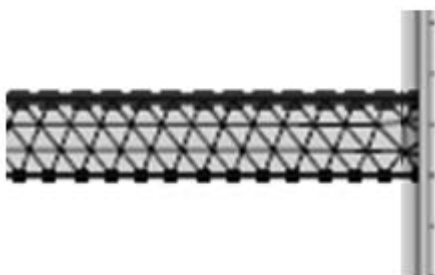


Рис. 5. Пример разбиения области на конечные элементы

Для конечных элементов, используемых в механических расчетах, определяющее соотношение задается с учетом поведения материала, из которого изготовлена конструкция. Например, в качестве такого соотношения во многих случаях используется обобщенный закон Гука, связывающий тензор деформаций и тензор напряжений в точке. На практике применяются три варианта МКЭ: в форме метода перемещений; в форме метода сил; в смешанной форме [3].

В настоящей работе рассматривается вариант МКЭ в форме метода перемещений. Это объясняется тем, что для заданной в такой форме конструкции легче получить основную систему метода перемещений, нежели статически определимую основную систему метода сил.

В алгоритме МКЭ используются общая (глобальная) система координат, привязанная ко всей конечно-элементной модели, и местные (локальные) системы координат, связанные с конкретными конечными элементами, поэтому их называют элементными системами координат. Переход от одной системы координат к другой производится с помощью матриц преобразования. Число степеней свободы одного узла зависит от типа задачи.

В основе математической формулировки МКЭ в форме метода перемещений лежит ва-

риационный принцип Лагранжа, т.е. принцип минимума потенциальной энергии системы. Основными неизвестными здесь являются перемещения узловых точек дискретной схемы, а напряжения определяются путем численного дифференцирования перемещений. При этом напряженно-деформированное состояние i -го элемента однозначно определяется через вектор-столбец узловых параметров (полиномиальные коэффициенты):

$$\{\alpha^i\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \vdots \\ \alpha_r^i \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

С его помощью выражается вектор-столбец узловых перемещений:

$$\{q^i\} = [A^i]\{\alpha^i\}. \quad (2)$$

Здесь r – число узловых неизвестных для i -го конечного элемента, которое равно числу его степеней свободы. Для двухмерного треугольного конечного элемента $r = 6$ (по две степени свободы на каждый из трех узлов).

Связь между смежными конечными элементами вызывает в узловых точках i -го элемента реактивные усилия взаимодействия, и каждый из конечных элементов оказывается нагруженным этими усилиями:

$$\{F^i\} = \begin{Bmatrix} F_1^i \\ F_2^i \\ \vdots \\ F_r^i \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Заданные внешние нагрузки, действующие на каждый конечный i -й элемент, заменяются приложенными в узлах сосредоточенными силами, статистически эквивалентными по своему действию фактической нагрузке. Эти силы включаются в качестве соответствующих добавок в вектор $\{F^i\}$ и учитываются при составлении уравнений равновесия в узлах.

Вектор-столбец узловых нагрузок (вектор усилий) $\{F^i\}$ также однозначно определяет напряженно-деформированное состояние i -го элемента.

Между векторами $\{F^i\}$ и $\{q^i\}$ существует следующая связь:

$$\{F^i\} = [K^i]\{q^i\}, \quad (4)$$

где $[K^i]$ – матрица жёсткости, определяющая упругие свойства i -го элемента.

Поскольку не наложено каких-либо ограничений, касающихся формы конечного элемента, выражение для матрицы жёсткости $[K^i]$ можно

применять для конечных элементов произвольной формы. Матрица $[K']$ является квадратной, и её порядок будет равняться числу степеней свободы рассматриваемого элемента.

Располагая значением матрицы жёсткости для каждого из конечных элементов, можно составить общую (глобальную) матрицу жёсткости $[K]$ в общей системе координат, которая устанавливает связь между узловыми перемещениями дискретной модели $\{q\}$ и внешней нагрузкой исходной конструкции $\{F\}$:

$$[K]\{q\} = \{F\}. \quad (5)$$

Это основное разрешающее матричное уравнение в общей системе координат [4]. Отметим, что для сложных конструкций возникают определённые трудности при выборе подходящей сетки разбиения из имеющегося разнообразия вариантов.

Критерии устойчивости, сходимости и точности в основном определяются погрешностями операций, проводимых в рамках МКЭ. Наряду с обычными ошибками округления и погрешностью приближенных методов линейной алгебры, применяемых в МКЭ, есть и ошибки, обусловленные самой концепцией метода. В первую очередь речь идет о зависимости результатов расчета от выбора (построения) сетки конечных элементов. Кроме того, следует иметь в виду и трудность оценки точности получаемых результатов. Ошибки дискретизации уменьшаются с увеличением числа конечных элементов и соответственно с уменьшением их размеров, причем они стремятся к нулю, когда размер элемента стремится к нулю. Ошибки аппроксимации не обязательно уменьшаются по мере уменьшения размеров элементов или повышения степени аппроксимации, поэтому могут ухудшать сходимость к точному решению или даже приводить к расходимости с ним.

Заключение

Сравнительный анализ рассмотренных методов позволяет сделать следующие выводы. Если расчетные области имеют правильную форму и позволяют построить разностную сетку, то на первый план выдвигаются преимущества ме-

тода конечных разностей (МКР). Однако если геометрические формы оказываются сложными, преимуществом будет обладать метод конечных элементов (МКЭ) в силу своей независимости от геометрии задачи. Достоинства этого метода проявляются в представлении геометрии задачи, построения сетки и определения граничных условий, а также при оценке и интерпретации результатов.

В свою очередь, использование методологии конечных разностей в варианте метода упругопластических течений НАМР позволяет, в отличие от метода конечных элементов (МКЭ), решать динамическую задачу, в частности – исследовать состояние моделируемой области в разные моменты времени.

Таким образом, могут быть сформированы критерии применимости метода НАМР и сделаны выводы о возможности дополнения существующего алгоритма метода упругопластического течения методом конечных элементов для полноценного моделирования задачи пробития твердого тела.

Литература

1. Клименко И.С., Холодков С.В. Распределение полей давления и деформаций, возникающих при ударе твердого тела о деформируемую преграду // Вестник Российского нового университета, 2014. – Вып. 4. – С. 49–54.
2. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений / М.Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидродинамике. – М. : Мир, 1967. – 383 с.
3. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М. : БИНОМ, 2008. – 636 с.
5. Колпаков В.И., Охитин В.Н., Прикладная механика сплошных сред : в 3 т. / науч. ред. В.В. Селиванов // Численные методы в задачах физики взрыва и удара. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 516 с.
6. Применение ультразвука в медицине. Физические основы / под ред. К. Хилла. – М. : Мир, 1989. – 282 с.