

А.С. Крюковский¹
В.И. Маслянкин²
Р. К. Хусамов³

A.S. Kryukovsky
V.I. Maslyankin
R.K. Khusamov

ИССЛЕДОВАНИЕ КАСПОИДНОЙ ФОКУСИРОВКИ A_3 МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ⁴

RESEARCH OF A CUSPOID FOCUSING A_3 BY A LOCAL ASYMPTOTIC METHOD

Рассмотрена каспоидная фокусировка типа A_3 , образованная параболическим волновым фронтом. Сопоставлены методы определения параметров универсальной деформации особенности – метода глобальной асимптотики (или метода седловых точек) – и первое приближение метода локальной асимптотики. Построены амплитудная и фазовая структуры волнового поля в окрестности особенности.

Ключевые слова: катастрофы, поля, волны, фокусировка, каустика, равномерные асимптотики, волновой фронт, лучи, амплитуда, фаза.

The cuspid focusing such as A_3 , formed by parabolic wave front is considered. The methods of definition of parameters of universal deformation of a singularity – method of a global asymptotic (or a saddle point method) – and first approximation of a local asymptotic method are compared. The amplitude and phase structures of a wave field in a vicinity of a singularity are constructed.

Keywords: catastrophes, fields, waves, focusing, caustic, uniform asymptotics, wave front, rays, amplitude, phase.

В настоящей работе в соответствии с волновой теорией катастроф [1–4] исследована фокусировка, образованная параболическим волновым фронтом методом локальной асимптотики, и выполнено математическое моделирование амплитудной и фазовой структур волнового поля в окрестности особенности.

На рис. 1 представлена лучевая структура (тонкие линии), их огибающая – каустика (толстая линия) и волновой параболический фронт (штриховая линия), описываемый формулой (1) с $a = 2$. Волна падает сверху вниз вдоль лучевых траекторий, перпендикулярных к волновому фронту из затенённой области:

$$f(\xi) = -\frac{1}{2}a\xi^2. \quad (1)$$

¹ Доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета ИСиКТ АНО ВО «Российский новый университет».

² Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры ИТиЕНД АНО ВО «Российский новый университет».

³ Аспирант АНО ВО «Российский новый университет».

⁴ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-02-04206-а).

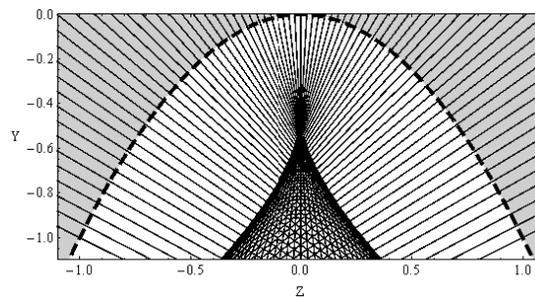


Рис. 1. Лучевая структура, каустика и волновой фронт

В формуле (1) координата ξ волнового фронта соответствует Z , а координата $f(\xi)$ – координате Y .

Расстояние между точкой волнового фронта и точкой наблюдения (Z, Y) определяется формулой:

$$R = \sqrt{(Y - f(\xi))^2 + (Z - \xi)^2}. \quad (2)$$

В соответствии с принципом Ферма (принципом наименьшего действия), уравнение лучевой траектории определяется нулем первой производной функции (2) по ξ :

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} = \frac{(f(\xi) - Y)f'(\xi) + \xi - Z}{R} = 0. \quad (3)$$

Для того чтобы найти положение каустики, необходимо дополнить уравнение (3) нулем второй производной функции (2) по ξ . С учетом выполнения уравнения (3), получаем:

$$(f'(\xi))^2 + (f(\xi) - Y)f''(\xi) + 1 = 0. \quad (4)$$

Учитывая (1), находим, что уравнение каустики в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} Y = -\frac{1}{a} - \frac{3}{2}a\xi^2 \\ Z = -a^2\xi^3 \end{cases} \quad (5)$$

или в неявной форме:

$$Z^2 = -\frac{8}{27}a\left(Y + \frac{1}{a}\right)^3, \quad (6)$$

что очевидно полукубическая парабола. Точка, в которой сливаются ветви каустик, называется каустическим остриём и соответствует каспидной катастрофе A_3 , в то время как сами ветви каустики – катастрофе A_2 . Каустическое остриё в данной задаче образуется в точке с координатами $(Z_c = 0, Y_c = -1/a)$, а в случае $a = 2$ – в точке с координатами $(Z_c = 0, Y_c = -1/2)$, что соответствует рис. 1.

Волновое поле в скалярном приближении Кирхгофа имеет вид:

$$U(Z, Y) \cong \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{k} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) \sqrt{\frac{1 + (f'(\xi))^2}{R}} \exp(ikR) d\xi, \quad (7)$$

где $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ – волновое число, ω – частота, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света, λ – длина волны. Далее будем считать, что $A = 1$, а величины (Z, Y) – координаты точки наблюдения.

Интересно отметить, что если бы фокусировка была идеальной, то есть все лучи сходились бы в одну точку, то в этой точке интенсивность поля была бы бесконечно большой (в случае бесконечного волнового фронта), что явно не имело бы физического смысла. Однако для каспидных фокусировок (и вообще для катастроф с конечной определенностью) это не так. Причем, края волнового фронта при достаточно большом удалении от центрального фокуса вообще мало влияют для значения поля в нём.

Проблема построения асимптотических решений является сложной задачей [5]. Согласно волновой теории катастроф (см., например, [1; 6]), в окрестности каустического острия поле представимо в виде функции Пирси и её производных:

$$U_p \cong \exp[i\theta] \left[l_1 I(\lambda_1, \lambda_2) + l_2 \frac{\partial I(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} + l_3 \frac{\partial I(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \right], \quad (8)$$

$$\text{где } I(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s)] ds \quad (9)$$

– функция Пирси [7]. Для того чтобы перейти от интеграла (7) к разложению (8), воспользуемся методом локальной асимптотики (ЛА) [6; 8; 9]. Локальная связь аргументов функции Пирси λ_1, λ_2 и фазы бегущей волны θ с пространственными координатами Z, Y имеет вид:

$$\lambda_1 \approx \gamma_{1Z}(Z - Z_c) + \gamma_{1Y}(Y - Y_c), \quad (10)$$

$$\lambda_2 \approx \gamma_{2Z}(Z - Z_c) + \gamma_{2Y}(Y - Y_c), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \theta \approx \varphi|_c + \frac{\partial \varphi}{\partial Z}(Z - Z_c) + \frac{\partial \varphi}{\partial Y}(Y - Y_c) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} (Y - Y_c)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} (Z - Z_c)^2 \right) + \\ + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y \partial Z} (Y - Y_c)(Z - Z_c) + \Delta \times \Delta_p \times \\ \times \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Y} (Y - Y_c) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Z} (Z - Z_c) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где [10] $\varphi = kR$,

$$\Delta_p = \rho_Y(Y - Y_c) + \rho_Z(Z - Z_c), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \rho_h = - \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \xi^4} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \xi^3 \partial h} + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^2 \partial h} T_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial h} T_3 \right), \\ h = Z, Y. \end{aligned} \quad (14)$$

В формулах (10–14) координаты (Z_c, Y_c) – это пространственные координаты геометрического центра каустического острия. Все производные вычислены в этой точке. Выражения для коэффициентов $\gamma_{i,j}$ были получены в работе [6] (см. также [8; 9; 11; 12]). Они имеют вид:

$$\gamma_{1Z} = v_k \Delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Z}, \quad \gamma_{1Y} = v_k \Delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Y}, \quad (15)$$

$$\gamma_{2Z} = \frac{v_k}{2} \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Z} T_2 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^2 \partial Z} \right), \quad (16)$$

$$\gamma_{2Y} = \frac{v_k}{2} \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Y} T_2 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^2 \partial Y} \right), \quad (17)$$

где в случае каустического острия

$$\Delta = \left(\frac{24}{\varphi_{\xi\xi\xi\xi}^{(4)}} \right)^{1/4}, \quad T_2 = -\frac{1}{10} \frac{\varphi_{\xi\xi\xi\xi\xi}^{(5)}}{\varphi_{\xi\xi\xi\xi}^{(4)}},$$

$$T_3 = \frac{1}{20} \left(\frac{21}{20} \left(\frac{\varphi_{\xi\xi\xi\xi\xi}^{(5)}}{\varphi_{\xi\xi\xi\xi}^{(4)}} \right)^2 - \frac{\varphi_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}^{(6)}}{\varphi_{\xi\xi\xi\xi}^{(4)}} \right),$$

$$v_k = \text{sign} \left(\varphi_{\xi\xi\xi\xi}^{(4)} \right). \quad (18)$$

На рис. 2–7 коэффициенты подобия (аргументы функции Пирси) λ_1, λ_2 и фаза бегущей

волны θ , вычисленные методом локальной асимптотики, сопоставлены с результатами, полученными методом глобальной асимптотики (ГА) [13; 14], то есть методом седловых точек. Выражения для λ_1 , λ_2 и фазы θ (см., например, [6]) имеют вид:

$$\lambda_2^2 = 4\tilde{\Sigma}^{1/2} \left(\text{sign} \Pi(1-\phi)^{1/2} + \left(2 + \phi + 2(1 + \phi + \phi^2)^{1/2} \right)^{1/2} \right), \quad (19)$$

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{2} \left(\frac{\lambda_2^4 - 144\tilde{\Sigma}}{54\lambda_2} \right)^{1/2}, \quad \theta = \frac{\lambda_2^2}{6} + kR_s, \quad (20)$$

где

$$\tilde{\Sigma} = -\frac{1}{3}k^2 \left(\dot{R}_{(1)} \dot{R}_{(2)} + \dot{R}_{(2)} \dot{R}_{(3)} + \dot{R}_{(3)} \dot{R}_{(1)} \right) \quad (21)$$

$$\Pi = k^3 \dot{R}_{(1)} \dot{R}_{(2)} \dot{R}_{(3)},$$

$$\phi = \left(1 - \frac{1}{4} \Pi^2 \tilde{\Sigma}^{-3} \right)^{1/3}, \quad \dot{R}_{(j)} = R_{(j)} - R_s,$$

$$R_s = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 R_{(j)}. \quad (22)$$

Значения $R_{(j)}$ – это значения функции (2) в седловых точках, то есть при тех значениях ξ , которые являются решениями уравнения (3). Внутри каустического острия таких действительных решений три, и именно эту область мы будем рассматривать ниже при сопоставлении с локальной асимптотикой.

На рис. 2 и 3 показаны линии равного уровня фазы бегущей волны θ .

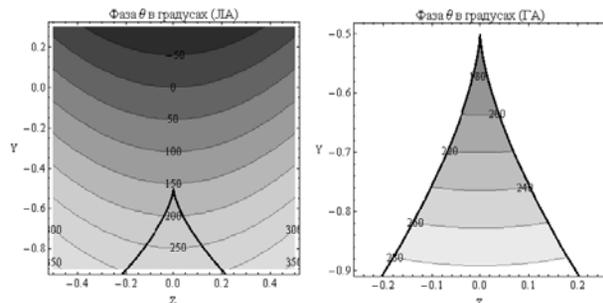


Рис. 2

Рис. 3

Линии равного уровня фазы бегущей волны, метод ЛА – рис. 2, метод ГА – рис. 3

Видно, что линии уровня имеют кривизну, центр которой находится в верхней части рисунка. На небольших расстояниях от центральной точки линии почти прямые (см. рис. 3). Поскольку при построении локальных выражений для фазы использовались квадратичные поправки, совпадение результатов, полученных методами локальной и глобальной асимптотики, очень хорошее.

На рис. 4 и 5 показаны линии равного уровня аргумента λ_1 . На рис. 4 линии уровня параллельны вертикальной оси. При вычислении аргумента использовалось только первое, линейное, приближение. Поэтому небольшая кривизна линий равного уровня, заметная на рис. 5 (нижняя часть), отсутствует на рис. 4.

На рис. 6 и 7 показаны линии равного уровня аргумента λ_2 . На рис. 6 линии уровня параллельны горизонтальной оси. Сопоставляя рис. 6 и рис. 7, видим, что кривизна линий уровня на рис. 7 заметна, что наводит на мысль о необходимости учета второго приближения. Отметим, что при увеличении параметра k (волнового числа) всё большее число осцилляций втягивается в область, хорошо описываемую первым приближением.

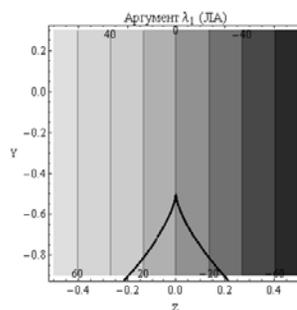


Рис. 4

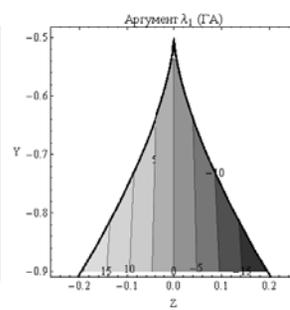


Рис. 5

Линии равного уровня аргумента λ_1 , метод ЛА – рис. 4, метод ГА – рис. 5

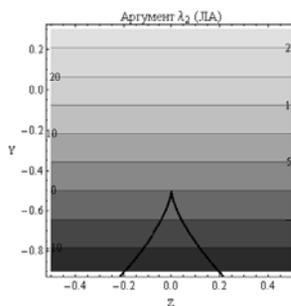


Рис. 6

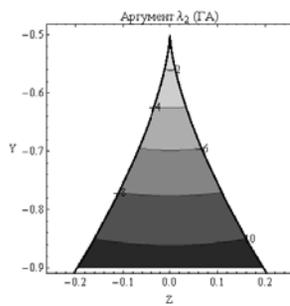


Рис. 7

Линии равного уровня аргумента λ_2 , метод ЛА – рис. 6, метод ГА – рис. 7

Локальные выражения для коэффициентов асимптотических разложений имеют вид:

$$l_1 \approx \Delta B|_{\xi=0}, \quad l_2 \approx -i\Delta^2 v_k \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} + B \times T_2 \right)_{\xi=0},$$

$$l_3 \approx -\frac{i}{2} \Delta^3 v_k \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial B}{\partial \xi} T_2 + B \times T_3 \right)_{\xi=0}, \quad (23)$$

где

$$B = \sqrt{k} \exp[-i\pi/4] \sqrt{\frac{1 + (f'(\xi))^2}{2\pi R}}. \quad (24)$$

Для расчета функции Пирси и ее производных использован метод поворота контура интегрирования [15]. Для этого функция Пирси и ее производные представлялись в виде:

$$I(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^{+\infty} \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s)] ds + \int_0^{+\infty} \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 - \lambda_1 s)] ds, \quad (25)$$

$$\frac{\partial I(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = \int_0^{+\infty} i s \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s)] ds - \int_0^{+\infty} i s \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 - \lambda_1 s)] ds, \quad (26)$$

$$\frac{\partial I(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = \int_0^{+\infty} i s^2 \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s)] ds + \int_0^{+\infty} i s^2 \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 - \lambda_1 s)] ds, \quad (27)$$

и внутренняя переменная интеграла s заменялась выражением $s \exp[i\pi/18]$ для линий равного уровня и на $s \exp[i\pi/38]$ – для 3D-изображения. Уменьшение угла поворота контура интегрирования, увеличивая точность, расширяет диапазон параметров, при которых интегралы сходятся, но увеличивает время вычислений.

Результаты вычислений представлены на рис. 8–11 (длина волны $\lambda = 0,02$). На рис. 8–10 показана амплитуда, а на рис. 11 – фаза.

Амплитудная структура характеризуется центральным фокальным пятном, соответствующим точке слияния ветвей каустики, и мелкой

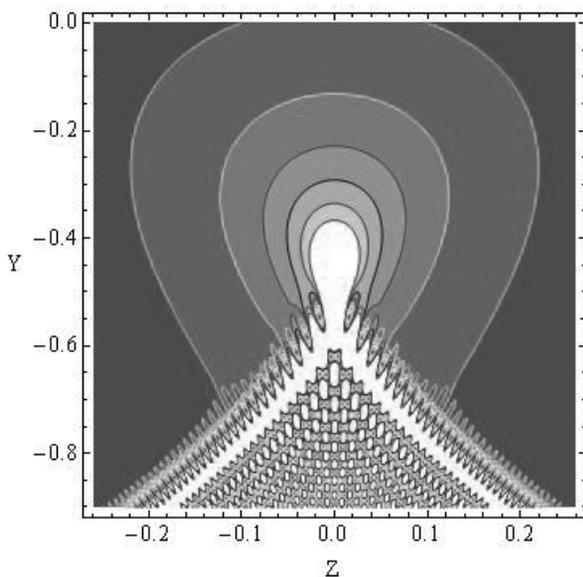


Рис. 8. Линии равного уровня амплитуды волнового поля

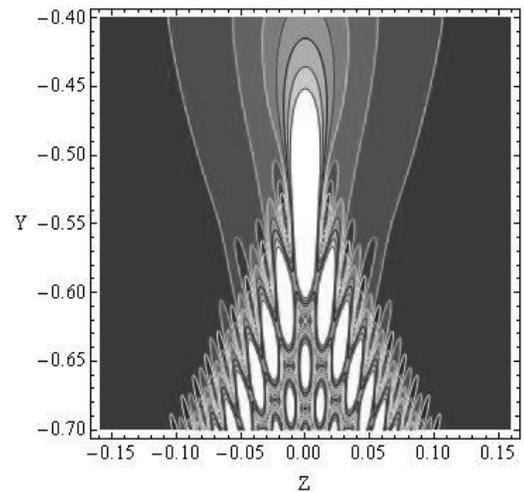


Рис. 9. Линии равного уровня амплитуды волнового поля (фрагмент рис. 8)

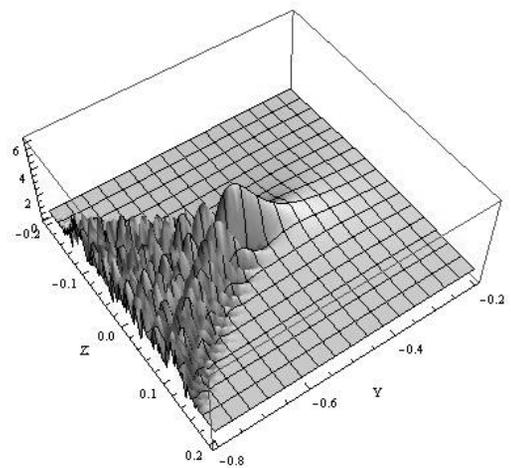


Рис. 10. 3D-изображение амплитуды волнового поля

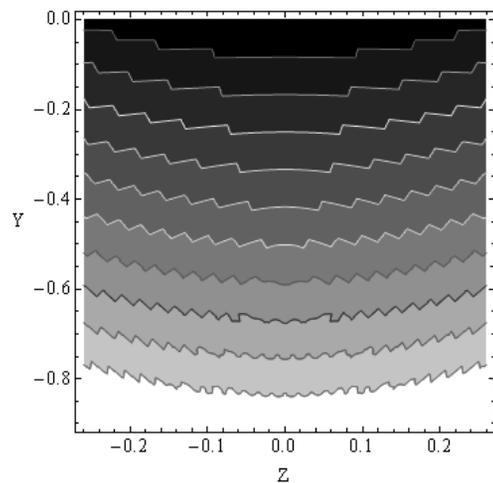


Рис. 11. Линии равного уровня фазы волнового поля

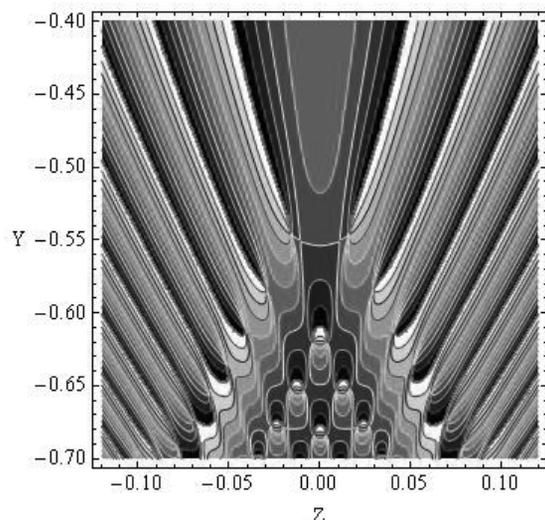


Рис. 12. Линии равного уровня фазы волнового поля без учета фазы бегущей волны

интерференционной структурой внутри ветвей. Линии максимумов и минимумов повторяют направления ветвей каустик. Линии равного уровня фазы волнового фронта (рис. 11) являются суммой фазы бегущей волны (рис. 2 и 3) и фазы функции Пирси и ее производных (рис. 12), что приводит к характерной ряби на линиях равных уровней.

Таким образом, в работе исследованы методы построения асимптотических решений в области фокусировки каспоидного типа. Сопоставлены методы получения коэффициентов подобия: метод локальной асимптотики и метод глобальной асимптотики и построены амплитудная и фазовая структуры. Такие особенности возникают в различных оптических и радиофизических задачах, например при математическом моделировании распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере Земли [16–17].

Литература

1. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Волновые катастрофы – фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн // Радиотехника и электроника. – 2006. – Т. 51. – № 10. – С. 1155–1192.
2. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т. 12. – № 8. – С. 15–25.
3. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспоидных катастроф // Распространение и

дифракция волн в неоднородных средах : сборник. – М. : МФТИ, 1989. – С. 56–60.

4. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта // Дифракция и распространение электромагнитных волн : сборник. – М. : МФТИ, 1993. – С. 20–37.

5. Крюковский А.С. К вопросу об асимптотически сходящихся рядах катастроф // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2016. – Выпуск 3.

6. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с вырожденными седловыми точками : препринт / ИРЭ АН СССР. – М., 1984. – 41 (413). – 75 с.

7. Pearcey, T. The structure of an electromagnetic field in the neighborhood of a cusp of a caustic // Philos. Mag. – 1946. – V. 37. – P. 311–317.

8. Крюковский А.С. Локальные равномерные асимптотики волновых полей в окрестности основных и краевых каспоидных каустик // Радиотехника и электроника. – 1996. – Т. 41. – № 1. – С. 59–65.

9. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф : монография. – М. : РосНОУ, 2013. – 368 с.

10. Балькина А.М., Крюковский А.С. Математическое моделирование дифракционных полутеневых полей каспоидного типа // Вестник Российского нового университета. – 2007. – Выпуск 2. – С. 61–64.

11. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического острия в плоско-слоистой среде // Вопросы дифракции электромагнитных волн : межвед. сборник. – М. : МФТИ, 1982. – С. 40–45.

12. Крюковский А.С., Лукин Д.С. К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое // Радиотехника и электроника. – 1981. – Т. 26. – № 6. – С. 1121–1126.

13. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. – Казань : Каз. авиационный ин-т, 1988. – 199 с.

14. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции : учебное пособие. – М. : МФТИ, 1999. – 134 с.

15. Лукин Д.С., Ипатов Е.Б., Палкин Е.А. Ал-

горитм численного расчета специальных функций типа быстроосциллирующих интегралов // Вопросы дифракции электромагнитных волн : межвед. сборник. – М. : МФТИ, 1982. – С. 21–35.

16. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере // Вестник Российского нового университета. – 2009. – Выпуск 2. Управ-

ление, вычислительная техника и информатика. – С. 7–14.

17. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Математическое моделирование распространения радиоволн в нестационарной плазме с учетом кривизны поверхности Земли и ионосферных слоев // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2016. – Выпуски 1–2. – С. 34–40.