

Н.М. Миназетдинов

**ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ
ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ**

В работе представлено решение предельной квазистационарной задачи электрохимической обработки металлов, связанной с определением формы поверхности детали при ее обработке двугранным симметричным электродом-инструментом. Полученные результаты позволяют определить геометрические характеристики обрабатываемой поверхности в различные моменты времени и представлены в виде таблиц и графиков.

Ключевые слова: электрохимическая обработка металлов, гидродинамическая аналогия, потенциал, идеальная несжимаемая жидкость.

N.M. Minazetdinov

**ONE LIMITING QUASISTATIONARY PROBLEMS
OF ELECTROCHEMICAL MACHINING OF METALLS**

The paper presents a solution of the limiting quasi-stationary problem of electrochemical processing of metals associated with determining the shape of the surface of a part when processing it with a symmetric dihedral electrode-tool. The results obtained make it possible to determine the geometric characteristics of the treated surface at different points in time and are presented in the form of tables and graphs.

Keywords: electrochemical machining of metals, hydrodynamic analogy, potential, ideal incompressible liquid.

Введение

При электрохимической обработке металлов (ЭХО) изделие нужной формы и размеров получают путем обратного копированием формы электрода-инструмента (катода) за счет анодного растворения металла с поверхности заготовки (анода) [1].

Предельная электрохимическая обработка

Режим прекращения анодного растворения обрабатываемой поверхности при неподвижном катоде называется предельной электрохимической обработкой [2]. В этом случае, после прекращения активного процесса анодного растворения, формируется предельная анодная граница, на которой локальная плотность тока j_a достигает некоторого предельного значения $j_{пр}$. Величина $j_{пр}$ зависит от различных параметров, в том числе от состава электролита, свойств обрабатываемого металла и определяется экспериментально.

Распределение плотности тока j_a на поверхности заготовки зависит от геометрии катода. В связи, с чем на поверхности заготовки можно выделить обрабатываемые участки, здесь межэлектродные зазоры малы и выполняется условие $j_a \geq j_{пр}$. И необрабатываемые участки, в точках которых из-за увеличения межэлектродных зазоров плотность тока убывает до значений меньших чем $j_{пр}$, и растворения металла прекращается.

Используя математическую модель предельного режима ЭХО, представленную в работе [2], рассмотрим двумерную задачу, связанную с определением конфигурации анодной границы при её обработке двугранным симметричным катодом. В модели задачи, в отличие от схемы, рассмотренной в работе [2], задается начальная форма поверхности заготовки, и выделяются ее обрабатываемые и необрабатываемые участки.

Миназетдинов Наиль Миргазиянович

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и естественнонаучных дисциплин Российского нового университета, Москва. Сфера научных интересов: приложения методов теории струйных течений идеальной жидкости в задачах теории электрохимической обработки металлов. Автор 37 опубликованных научных работ.
E-mail: nminazetdinov@yandex.ru

Геометрия межэлектродного промежутка

Сечение катода координатной плоскостью x_1, y_1 представляет симметричный угол DCD_1 (рис. 1а). Система координат x_1, y_1 связана с катодом, а ее начало совпадает с вершиной C . Ось симметрии катода совпадает с осью ординат. Углы наклона лучей CD и CD_1 относительно оси абсцисс характеризуются величиной α . Перед началом процесса электрохимического формообразования анодная граница описывается прямой DBD_1 . Начальная величина межэлектродного зазора в сечении CB равна S_1 .

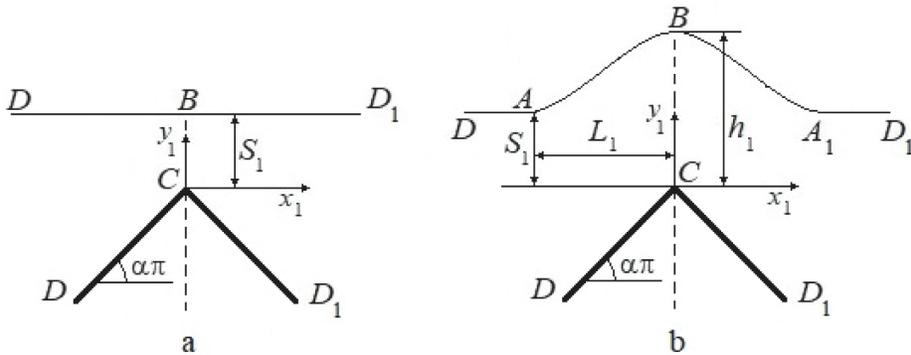


Рис. 1. Геометрия межэлектродного промежутка. а – до начала процесса обработки; б – получаемая в процессе обработки.

В процессе обработки формируется предельная анодная граница, состоящая из обработанного участка AA_1 , на которой выполняется условие $j_a = j_{cr}$ и необрабатываемых участков AD и A_1D_1 (рис. 1б), параллельных оси абсцисс. Ординаты точек A и A_1 равны S_1 . Межэлектродный зазор в сечении CB равен h_1 . Половина ширины обработанного участка равна L_1 . Далее, в силу симметрии межэлектродного промежутка относительно оси ординат, ограничимся рассмотрением ее левой симметричной части.

Численно-аналитический метод решения задачи

Введём аналитическую функцию $W_1(z_1) = v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1)$ комплексной переменной $z_1 = x_1 + iy_1$. Действительная часть $v(x_1, y_1)$ соответствует функции тока, а мнимая часть $u(x_1, y_1)$ – потенциалу электрического поля [3]. Потенциал $u(x_1, y_1)$ принимает постоянные значения на границах электродов

$$u_{DAB} = u_a, u_{CD} = u_c. \quad (1)$$

На искомой границе АВ выполняется условие

$$j_a = \kappa \frac{\partial u}{\partial n_1} = j_{\text{пр}}, \quad (2)$$

здесь $\frac{\partial}{\partial n_1}$ производная в направлении внешней к области межэлектродного промежутка нормали к анодной поверхности АВ; κ – удельная электропроводность среды.

На оси симметрии ВС линия тока электрического поля, ортогональна к её эквипотенциальным линиям, и функция $v(x_1, y_1)$ принимает постоянное значение. Можно считать, что на линии ВС функция $v(x_1, y_1)$ равна нулю

$$v_{BC} = 0. \quad (3)$$

В соотношениях (1) – (3) произведем замену [2]

$$\psi = \frac{(u - u_c)}{(u_a - u_c)}, \quad \varphi = \frac{v}{(u_a - u_c)}, \quad z = \frac{z_1}{H} = x + iy, \quad (4)$$

где $H = \frac{\kappa(u_a - u_c)}{j_{\text{пр}}}$ – характерный размер длины; $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ гармонически сопряженные функции [3].

Задача сводится к определению формы границы АВ при выполнении следующих условий для безразмерного комплексного потенциала $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ электрического поля

$$\psi_{DAB} = 1, \psi_{CD} = 0. \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{AB} = 1, \quad (6)$$

$$\varphi_{BC} = 0. \quad (7)$$

Область изменения переменной W представлена на рисунке 2а.

Рассматриваемая задача электрохимической обработки при ее гидродинамической интерпретации [2] равносильна задаче по определению свободной поверхности фиктивного плоскопараллельного течения идеальной несжимаемой жидкости, текущей около заданной поверхности [4]. Поток направлен от источника, расположенного в бесконечно удаленной точке D , к стокам, непрерывно распределенными вдоль линии BC .

Если ввести функцию $\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = V_x - iV_y = Ve^{-i\theta}$, где V величина скорости фиктивного течения, θ – угол, образуемый вектором скорости в какой-нибудь точке плоскости течения с осью абсцисс, то согласно равенству (6), на границе АВ скорость фиктивного течения удовлетворяет условию [4]

$$\left| \frac{dW}{dz} \right|_{AB} = V = 1. \quad (8)$$

Вдоль границы AD скорость монотонно уменьшается от значения $V = 1$ в точке A до нуля в точке D .

Об одной предельной квазистационарной задаче электрохимической обработки металлов

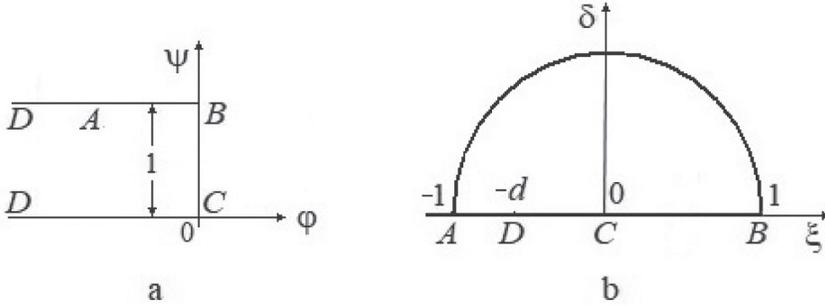


Рис. 2. Вспомогательные области:

- а) область изменения комплексного потенциала W ;
- б) область изменения вспомогательной переменной t .

Для построения функций, определяющих решение задачи, введем параметрическую комплексную переменную $t = \xi + i\delta$, изменяющуюся в области G_t ($|t| < 1, \delta > 0$) (рис. 2б).

Согласно условиям (5), (7), функция $W(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t = \exp(i\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi], \\ 1, & t = \xi, \quad \xi \in [-1, -d], \\ 0, & t = \xi, \quad \xi \in (-d, 0], \end{cases} \quad (9)$$

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \xi \in [0, 1].$$

Используя метод конформных отображений [3], получим

$$\frac{dW}{dt} = N \frac{t+1}{\sqrt{t(t+d)}(1+d \cdot t)}, \quad N = \frac{(1+d)\sqrt{d}}{\pi} i. \quad (10)$$

Введем функцию [4]

$$\chi(t) = \ln \left(\frac{dW}{dz} \right) = \ln V - i\theta, \quad (11)$$

На границе области G_t функция $\chi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \chi(\exp(i\sigma)) = 0, \quad \sigma \in [0, \pi], \quad (12)$$

$$\operatorname{Im} \chi(\xi) = -\theta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in [-1, -d], \\ -\alpha\pi, & \xi \in (-d, 0), \\ 0, & \xi \in (0, 1]. \end{cases} \quad (13)$$

Функция $\chi(t)$ имеет логарифмические особенности в точках $C(t=0)$, $D(t=-d)$. Применяя метод особых точек Чаплыгина [4], найдем

$$\chi(t) = \alpha \ln \frac{t+d}{t(1+d \cdot t)}. \quad (14)$$

Используя формулы (10), (14) и равенство

$$dz = \exp(-\chi(t)) \frac{dW}{dt} dt, \quad (15)$$

установим соответствие между плоскостью переменной z и областью G_t . При условии, что образ точки $t(C) = 0$ переходит в начало координат плоскости z , это соответствие задается формулой

$$z(t) = N \int_0^t F(\tau) d\tau, \quad F(\tau) = \frac{\tau + 1}{\tau^{0,5-\alpha} (\tau + d)^{\alpha+1} (1 + d \cdot \tau)^{1-\alpha}}. \quad (16)$$

Формула (16) позволяет определить геометрические параметры межэлектродного промежутка.

Безразмерная величина межэлектродного зазора в сечении BC равна

$$h = \frac{h_1}{H} = \text{Im} z(1). \quad (17)$$

Координаты точек анодной границы AB найдем с помощью формулы

$$z(e^{i\gamma}) = z(1) + Ni \int_0^\gamma F(e^{i\sigma}) e^{i\sigma} d\sigma, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi. \quad (18)$$

Безразмерные координаты точки A равны $x_A = -\frac{L_1}{H} = -L$, $y_A = \frac{S_1}{H} = S$ (рис. 1b), тогда

$$L = -\text{Re} z(-1), \quad (19)$$

$$S = \text{Im} z(-1). \quad (20)$$

Предельная квазистационарная задача электрохимической обработки

Предположим, что катод совершает поступательное перемещение в сторону обрабатываемой заготовки с постоянной скоростью V_c . Величина сдвига Δ_1 катода за время T , относительно ее исходного положения, равна $\Delta_1 = V_c T$. Задачи, связанные с определением предельной анодной границы в момент времени $T = \frac{\Delta_1}{V_c}$ или после совершения катодом сдвига Δ_1 , называются предельно квазистационарными [5].

Безразмерная величина Δ перемещения катода относительно ее исходного положения за время T равна $\Delta = \frac{V_c T}{H}$. Если в качестве характерного времени выбрать величину $\frac{H}{V_c} = \frac{\kappa(u_a - u_c)}{(j_{\text{нр}} V_c)}$, то можно ввести в рассмотрение безразмерное время τ [5]

$$\tau = \frac{V_c T}{H} = \frac{j_{\text{нр}} V_c}{\kappa(u_a - u_c)} T, \quad (24)$$

Рассмотрим двумерную предельную квазистационарную задачу электрохимической обработки двугранным симметричным катодом, сечение которого представлено на рисунке 1а. Левая симметричная часть межэлектродного промежутка представлена на рисунке 3: на ней CD – граница катода, BC – ось симметрии, AB – обрабатываемый участок анодной границы, AD – необрабатываемый участок.

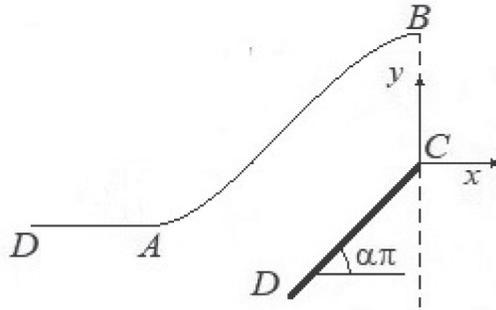


Рис. 3. Геометрия межэлектродного промежутка

Формулы, полученные при решении рассмотренной задачи электрохимической обработки неподвижным катодом, остаются в силе, за исключением формулы (20).

С учетом безразмерного сдвига Δ катода относительно его исходного положения, определяемого величиной S , безразмерная ордината точки A в системе координат, связанной с катодом равна

$$y_A = S - \tau . \tag{25}$$

Используя формулу (25), соотношение (20) представим в виде

$$S - \tau = \text{Im}(z(-1)) . \tag{26}$$

Для численного решения задачи задаются геометрические величины α , S и безразмерное время τ . Параметр d определяется из условия (26). Величины h , L и координаты точек предельной анодной границы определяются с помощью формул (17)-(19).

Результаты расчётов

В качестве примера рассмотрим случай, когда $\alpha = 0,25$ и $S = 0,05$. В таблице 1 представлены результаты расчетов безразмерных геометрических характеристик: h , L , y_A и математического параметра d для различных значений τ .

Таблица 1

Результаты расчета параметров

τ	h	L	y_A	d
0	0,638	1,728	0,05	0,801
1	0,623	2,831	-0,95	0,978
2	0,621	3,843	-1,95	0,998
2,5	0,621	4,343	-2,45	0,999

На рисунке 4 представлены графики анодных границ для указанных случаев.

Выполнены расчеты анодной границы при фиксированных значениях $S = 0,1$ и $\tau = 1$ для различных значений α . В таблице 2 представлены результаты расчетов геометрических характеристик для следующих значений параметра α : $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$.

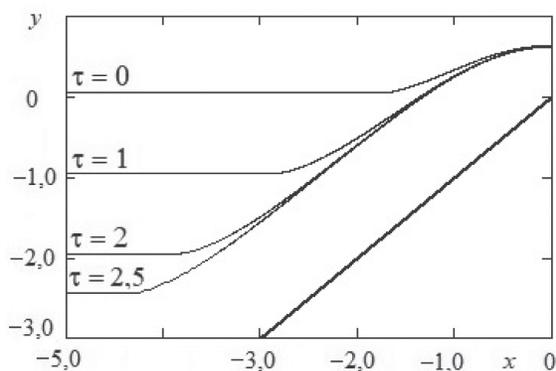


Рис. 4. Результаты расчета анодных границ.

Таблица 2

Результаты расчета параметров

α	h	L	y_A	d
$\frac{1}{6}$	0,714	4,015	-0,9	0,996
$\frac{1}{4}$	0,623	2,779	-0,9	0,975
$\frac{1}{3}$	0,553	2,146	-0,9	0,940
$\frac{1}{2}$	0,456	1,477	-0,9	0,861

На рисунке 5 приведены графики обработанных участков анодных границ для указанных значений.

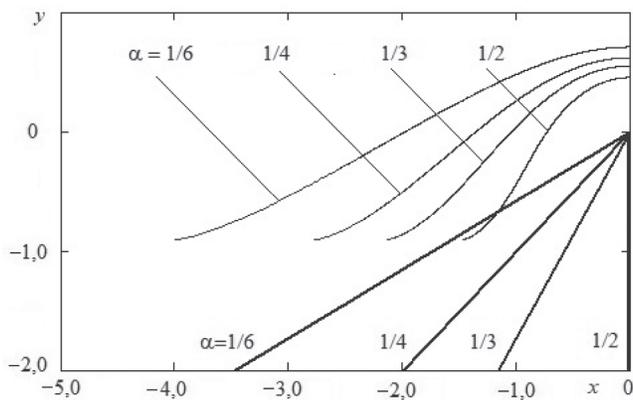


Рис. 5. Результаты расчета анодных границ.

Заключение

В работе представлено решение и результаты расчетов конкретной предельно-квазистационарной задачи теории электрохимической обработки металлов. Связь времени и величины сдвига катода, относительно ее исходного положения, позволяет определить форму предельной анодной границы в различные моменты времени.

Литература

1. Давыдов А.Д., Козак Е. Высокоскоростное электрохимическое формообразование. М.: Наука, 1990. 272 с.
2. Клоков В.В. Обратные задачи предельной электрохимической обработки. Труды семинара по краевым задачам. Изд-во Казанского ун-та. 1976. Вып. 13. С.151 – 162.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
4. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
5. Житников В.П., Ошмарина Е.М., Федорова Г.И. Точные решения двух задач предельного квазистационарного электрохимического формообразования // Известия вузов. Математика. 2011. № 12. С. 21-29.

References

1. Davydov A.D., Kozak E. *Vysokoskorostnoe elektrokhimicheskoe formoobrazovanie*. M.: Nauka, 1990. 272 s.
2. Klokov V.V. *Obratnye zadachi predel'noj elektrohimicheskoy obrabotki*. Trudy seminaro po kraevym zadacham. Izd-vo Kazanskogo un-ta. 1976. Vyp. 13. S.151 – 162.
3. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsij kompleksnogo peremennogo*. M.: Nauka, 1987. 688 s.
4. Gurevich M.I. *Teoriya struj ideal'noj zhidkosti*. M.: Nauka, 1979. 536 s.
5. Zhitnikov V.P., Oshmarina E.M., Fedorova G.I. *Tochnye resheniya dvuh zadach predel'nogo kvazistacionarnogo elektrohimicheskogo formoobrazovaniya* // Izvestiya vuzov. Matematika. 2011. № 12. S. 21-29.