

**О ПАРАДОКСАЛЬНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ
ПРИМЕНЕНИЯ КРИТЕРИЯ ГУРВИЦА
ДЛЯ ПОИСКА ВЗВЕШЕННЫХ РЕШЕНИЙ
В «ИГРЕ С ПРИРОДОЙ»**

**ABOUT PARADOXICAL RESULT
OF USE THE HURWITZ CRITERION
TO SEARCH FOR BALANCED SOLUTIONS
IN THE “GAME WITH NATURE”**

Выполнен анализ чувствительности критерия Гурвица к выбору альтернатив при управлении значением коэффициента его оптимизма. На двух случайных совокупностях из 50 и 150 матриц эффективности последовательно показано, что, как правило, критерий Гурвица не указывает на промежуточные альтернативы между двумя базовыми, соответствующими выбору по критериям Вальда и максимакса. Поиск промежуточных решений, предположительно скрытых на стыке этих двух альтернатив, посредством уменьшения шага градаций коэффициента оптимизма также подтвердил низкую чувствительность критерия Гурвица.

Ключевые слова: критерий, альтернатива, стратегия, матрица, оптимизм.

The analysis of the sensitivity of the Hurwitz criterion to selection of alternatives in the control of the value of optimism coefficient is done. On the two random collections including 50 and 150 efficiency matrices is shown that, as a rule, the Hurwitz criterion does not indicate the intermediate between two basic alternatives corresponding to the choice on the Vald criteria and maximax. The search between two alternatives by reducing the step of the optimism coefficient gradation had confirmed the low sensitivity of the Hurwitz criterion.

Keywords: criterion, alternative, strategy, matrix, optimism.

Введение

Критерий Гурвица хорошо известен в теории принятия решений как критерий взвешенного оптимизма, дающий ЛПП (лицу, принимающему решение) возможность варьировать значением коэффициента оптимизма в соответствии со своим отношением к риску при выборе стратегий в задачах «игры с природой» [1–5]. При этом принято считать [6–9], что, варьируя коэффициентом оптимизма, можно эффективно управлять предпочтениями ЛПП в зависимости от специфики задачи выбора стратегии.

Так, в частности, Л.Г. Лабскер [8] отмечает, что чем более опасной представляется для ЛПП ситуация, тем меньший коэффициент оптимизма ему следует выбирать. Как подчеркивает

Г.Л. Бродецкий [9], возможность выбора коэффициента оптимизма дает ЛПП дополнительный управляющий параметр для адаптации критерия Гурвица к системе своих предпочтений в конкретной ситуации выбора решения.

С другой стороны, для разрешения неопределенности в задачах такого рода используются субъективные предпочтения ЛПП, и на практике применяется целый ряд критериев, ориентированных на различные ситуации и различное отношение ЛПП к риску [3–7].

Критерий оптимизма – пессимизма (Гурвица) вводится как смесь критериев Вальда и максимакса: $K_H = \alpha \max_j x_{ij} + (1 - \alpha) \min_j x_{ij}$, где α – коэффициент оптимизма ($0 \leq \alpha \leq 1$).

В работах [10–11] при анализе результатов выбора альтернатив на 50 случайных матрицах эффективности мы обратили внимание на то обстоятельство, что критерий Гурвица сводил процедуру поиска решения к бинарной задаче выбора между альтернативами, рекомендуемыми

¹ Доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем в экономике и управлении АНО ВО «Российский новый университет».

² Аспирант АНО ВО «Российский новый университет».

двумя экстремальными и противоположными по своей семантике критериями: Вальда (максимина) и максимакса.

В настоящей работе проводятся уточнение и обобщение этого неожиданного результата, а также исследуется возможность поиска дополнительных (промежуточных) альтернатив на стыке между двумя базовыми. Для формализации представляемых результатов будем использовать следующие обозначения: K_V, K_S, K_L, K_H, K_M – критерии Вальда, Сэвиджа, Лапласа, Гурвица и максимакса соответственно; $\alpha = [0,1]$ – коэффициент оптимизма критерия Гурвица; λ_{nm} – коэффициенты взаимной (парной) корреляции пар критериев ($0 \leq \lambda_{nm} \leq 1$), например для критериев Лапласа и Сэвиджа – λ_{LS} . Отметим, что критерий Сэвиджа, в отличие от остальных, формируется на матрице риска.

1. Взаимодействие критерия Гурвица с классическими критериями

В работах [10–11] мы исследовали случайную выборку из 50 матриц эффективности с размерностью 6×6 с нормальным распределением двузначных чисел в качестве показателей эффективности (математическое ожидание, равное 0,5 и среднеквадратичное отклонение 0,13, что соответствует мезокуртическому распределению). Перерасчет матриц эффективности в матрицы риска для получения критерия Сэвиджа проводился по стандартному алгоритму [2].

Результаты выбора альтернатив по всем критериям для каждой исходной матрицы с целью их сравнения сводились в соответствующую таблицу. Прежде всего ожидалось, что во всех без исключения случаях выбор по критерию Гурвица при $\alpha = 0$ будет совпадать с выбором по критерию Вальда, а при $\alpha = 1$ – по критерию максимакса.

Проведенный в настоящей работе полный анализ указанной выборки показывает следующее распределение результатов выбора по критерию Гурвица при изменении α от нуля до единицы.

1. Совпадение выбора по критериям Вальда и максимакса при всех значениях коэффициента оптимизма – 11 матриц (22%).

2. Выбор ограничен либо предельно оптимистичным, либо предельно осторожным решением – 33 матрицы (66%).

3. Выбор третьей, промежуточной, альтернативы при средних значениях коэффициента оптимизма – 6 матриц (12%).

Достаточно неожиданным результатом оказалось значимое количество совпадений (более

20%) альтернатив, рекомендуемых как оптимистичным, так и пессимистичным критериями. При этом следует подчеркнуть, что проведенный в [11] анализ заведомо большой совокупности (10 000 матриц полезности с нормальным распределением элементов) дал такой же результат: около 22% случаев совпадения выбора по критериям Вальда и максимакса. Следовательно, можно с достаточной степенью уверенности полагать, что указанный результат, противоречащий сложившимся представлениям, статистически достоверен.

Кроме того, сравнение результатов выбора альтернатив показало, что для 33 матриц (66%) при любых промежуточных значениях коэффициента оптимизма α выбор по критерию Гурвица не давал новых альтернатив и сводился к рекомендации либо критерия Вальда, либо – максимакса.

Среди этих 33 матриц в 14 случаях (42%) выбор по критериям Лапласа и Сэвиджа указывал на третью (промежуточную) альтернативу, которую критерий Гурвица с шагом коэффициента оптимизма 0,1 «не чувствовал». При этом выбор по критериям Лапласа и Сэвиджа указывал как на разные, так и на одинаковые (см., например, табл. 2) альтернативы.

Таблица 1

Совпадение выбора по критериям Лапласа и Сэвиджа

Матрица № 27	Выбор альтернатив по критериям				
	K_M	K_L	K_H	K_S	K_V
α					
0	A_1	A_6	A_5	A_6	A_5
0,1			A_5		
0,2			A_5		
0,3			A_5		
0,4			A_5		
0,5			A_1		
0,6			A_1		
0,7			A_1		
0,8			A_1		
0,9			A_1		
1,0	A_1				

Отметим, что в качестве умеренно оптимистичного критерия мы рассматривали, наряду с нейтральным критерием Лапласа, также и критерий минимаксного сожаления Сэвиджа. Как показано в [10], коэффициент их взаимной корреляции (для рассматриваемой выборки из 50 матриц) $\lambda_{LS} = 0,64$. Кроме того, как показано в

[11], графики зависимости коэффициентов взаимной корреляции λ_{LH} и λ_{SH} от α существенно близки, что также свидетельствует о сопоставимости степени оптимизма этих критериев вопреки сложившемуся представлению о крайней осторожности критерия Сэвиджа, в частности по сравнению с критерием Лапласа.

Таким образом, критерий Гурвица в большинстве случаев (88%) оказался малочувствительным инструментом для выбора взвешенных альтернатив: процедура поиска решения сводилась либо к принятию единственной альтернативы, либо к задаче бинарного выбора между двумя альтернативами, рекомендуемыми противоположными по своей семантике критериями: Вальда и максимакса.

Далее. Априори ожидалось, что при изменении коэффициента оптимизма выбор по критерию Гурвица будет указывать на альтернативы, рекомендуемые не только критериями Вальда и максимакса, но и промежуточными по семантике критериями Лапласа и Сэвиджа. Конкретно, по мере увеличения коэффициента α , выбор альтернатив по критерию Гурвица должен был бы последовательно совпадать с выбором по критериям Вальда, Сэвиджа, Лапласа и максимакса.

Однако, как видим, вопреки ожиданиям, при промежуточных значениях коэффициента оптимизма α -критерий Гурвица достаточно редко указывал на третью альтернативу (см., например, табл. 2). Лишь в шести случаях (12%) при средних значениях коэффициента оптимизма α -критерий Гурвица указывал на третью альтернативу, которую, как правило, также рекомендовали критерии Лапласа и Сэвиджа.

Таблица 2

Выбор трех альтернатив по критерию Гурвица

Матрица № 2	Выбранные альтернативы по критериям				
	K_M	K_L	K_H	K_S	K_V
α	A_4	A_2	A_5	A_2	A_5
0			A_5		
0,1			A_5		
0,2			A_5		
0,3			A_5		
0,4			A_5		
0,5			A_2		
0,6			A_2		
0,7			A_2		
0,8			A_2		
0,9			A_4		
1,0	A_4				

Отметим при этом, что «область локализации» третьей альтернативы для разных матриц располагалась в интервале шириной от одной до четырех градаций α .

Конкретно третья альтернатива, выявляемая критерием Гурвица, в трех случаях совпадала с ожидаемой альтернативой, рекомендуемой критерием Лапласа и при этом в двух случаях еще и с рекомендуемой критерием Сэвиджа. В трех других случаях критерием Гурвица выбиралась «независимая» альтернатива, на которую ни один из четырех рассматриваемых классических критериев не указывал.

Для уточнения и обобщения полученных нетривиальных результатов исходная выборка была нами расширена до 150 матриц с теми же параметрами нормального распределения. Анализ расширенной совокупности дал следующий интегральный результат.

1. Совпадение выбора по критериям Вальда и максимакса – 23% матриц.

2. Выбор ограничен либо предельно оптимистичным, либо предельно осторожным решением – 62% матриц.

3. Выбор третьей, промежуточной, альтернативы при средних значениях коэффициента оптимизма – 15% матриц.

Как видим, результат качественно изменился весьма незначительно. Несколько увеличилось количество случаев с выбором третьей альтернативы за счет соответствующего сокращения случаев бинарного выбора.

Таким образом, для рассмотренного достаточно общего случая выбор промежуточных альтернатив остается маловероятным событием, что противоречит сложившимся представлениям об использовании критерия Гурвица.

Возникает естественный вопрос: возможно ли обнаружение «скрытых» промежуточных альтернатив путем увеличения количества градаций коэффициента оптимизма. Действительно, не исключено, что промежуточные альтернативы могут появляться в весьма узком диапазоне значений α .

В этой связи появляется задача оценивания чувствительности критерия Гурвица к вариациям коэффициента α при уменьшении его шага в области перехода от одной альтернативы к другой (на стыке альтернатив). Поэтому был проведен поиск на стыке двух крайних альтернатив, противоположных по семантике выбора, по крайней мере, еще одной (скрытой) альтернативы, соответствующей взвешенному (промежуточному) выбору.

2. Результаты поиска скрытых альтернатив

Для поиска скрытых альтернатив использовался очевидный прием последовательного уменьшения шага градаций коэффициента α на стыке альтернатив, на которые указывают критерии Вальда и максимакса, до тех пор, пока не будет обнаружена смена предпочтения между двумя имеющимися альтернативами. В качестве основного инструмента исследования использовался расчет критерия Гурвица для стыковых значений коэффициента оптимизма, выполненный в программе MS EXCEL, с выбором соответствующей стратегии.

Исследованию подлежали 39 матриц (за исключением 11 матриц с согласованным выбором по критериям Вальда и максимакса). Априори они были распределены на три группы. Первую составили 14 бинарных матриц, в которых критериями Лапласа и Сэвиджа рекомендуется выбор промежуточных альтернатив, их и предполагалось обнаружить при «заострении» критерия Гурвица. Эта группа рассматривалась как наиболее перспективная. Во вторую были включены 18 бинарных матриц, в которых указания на третью альтернативу не фигурировали. К третьей группе мы отнесли 7 матриц с третьей альтернативой для поиска возможных дополнительных альтернатив на двух имеющихся стыках.

Исследование матриц первой группы дало следующие результаты. На одной из матриц (см. табл. 3) при значении $\alpha = 0,6 \div 0,7$ в десятом знаке после запятой обнаружена третья ожидаемая альтернатива A_6 , рекомендуемая критерием Лапласа.

Таблица 3

Обнаружение третьей ожидаемой альтернативы

Матрица № 4	Оценки эффективности по критериям				
	K_M	K_L	K_H	K_S	K_V
α					
0			A_3		
0,1			A_3		
0,2			A_3		
0,3			A_3		
0,4			A_3		
0,5			A_3		
0,6			A_3		
0,6666666666	A_5	A_6	$A_3 A_6$	A_3	A_3
0,6666666665			$A_3 A_6 A_5$		
0,6666666667			A_5		
0,7			A_5		
0,8			A_5		
0,9			A_5		
1			A_5		

Еще на одной матрице (см. табл. 4) на стыке значений α между 0,6 и 0,7 во втором знаке после запятой обнаружена третья «независимая» альтернатива A_4 , хотя критерии Лапласа и Сэвиджа указывали на другие альтернативы (A_5 и A_6 соответственно).

Таблица 4

Обнаружение третьей «свободной» альтернативы

Матрица № 44	Оценки эффективности по критериям				
	K_M	K_L	K_H	K_S	K_V
α					
0			A_6		
0,1			A_6		
0,2			A_6		
0,3			A_6		
0,4			A_6		
0,5			A_6		
0,6	A_1	A_5	A_6	A_6	A_5
0,65			A_6		
0,66			$A_1 A_4$		
0,7			A_1		
0,8			A_1		
0,9			A_1		
1			A_1		

На остальных 12 матрицах на различных «глубинах» коэффициента оптимизма критерия Гурвица (от одного до десяти знаков после запятой) был выявлен переход между двумя альтернативами, т.е. третья альтернатива не найдена. Таким образом, в принципе, скрытые альтернативы могут быть обнаружены.

Поиск, в принципе возможных, независимых альтернатив на матрицах второй группы, априори мы оценивали как малоперспективный, и действительно, полноценный поиск дополнительных альтернатив на стыке альтернатив, соответствующих реализациям критериев Вальда и максимакса, дал отрицательный результат.

Апостериори в исследованной выборке из 33 матриц с бинарным выбором выявились две группы матриц по другому признаку – соответственно с плавным и дискретным переходом от одной альтернативы к другой на стыке между ними. Плавным переходом мы называем такую ситуацию, когда на предельной глубине стыкового значения коэффициента оптимизма обнаруживается сочетание двух имеющихся альтернатив.

В противном случае такой переход мы называем дискретным. Всего наблюдалось 21 плавный и 12 дискретных переходов. Ниже в качестве примера приведена таблица, составленная для матрицы с плавным переходом.

Таблица 5

Пример матрицы с плавным переходом

Матрица № 36	Оценки эффективности по критериям				
	K_M	K_L	K_H	K_S	K_V
α	A_5	A_4	A_4	A_4	A_4
0					
0,1					
0,2					
0,3					
0,4					
0,5					
0,6					
0,7					
0,8					
0,882352941					
0,9					
1					

Анализ третьей группы матриц (с третьей альтернативой) на предмет обнаружения дополнительных (свободных) альтернатив также дал отрицательный результат, хотя и позволил уточнить интервал, в котором лежит в каждом случае третья альтернатива. Так, например, для приведенной выше матрицы № 2 установлено, что третья альтернатива, рекомендуемая критериями Лапласа и Эвиджа, лежит в интервале значений $\alpha = 0,44 \div 0,895$. Для матрицы № 18 (см. табл. 6) третья независимая альтернатива соответствует интервалу значений $\alpha = 0,62 \div 0,714285$.

Таблица 6

Уточнение интервала третьей альтернативы

Матрица № 18	Оценки эффективности по критериям				
	K_M	K_L	K_H	K_S	K_V
α	A_1	A_3	A_3	A_3	A_3
0					
0,1					
0,2					
0,3					
0,4					
0,5					
0,6					
0,62					
0,714285					
0,714286					
0,8					
0,9					
1					

Эти любопытные частные результаты могут оказаться полезными при рассмотрении некоторых конкретных задач «игры с природой».

Таким образом, можно констатировать, что вероятность обнаружения промежуточных альтернатив путем «заострения» критерия Гурвица весьма мала, хотя и отлична от нуля. Тем не менее, в «перспективной» группе из 14 матриц были обнаружены две такие альтернативы (14%), и этим обстоятельством, видимо, не следует пренебрегать.

В совокупности с вышеизложенными фактами проявления малой чувствительности критерия Гурвица это означает, что для практической реализации управления взвешенным выбором решений представляется целесообразным, наряду с управлением коэффициентом оптимизма, отобрать наиболее устойчивые по степени своего оптимизма критерии и зафиксировать их средневзвешенное положение на шкале оптимизма критерия Гурвица. Тем самым к равномерной интервальной шкале оптимизма можно будет «привязать» дополнительную неоднородную порядковую шкалу, которую можно будет задействовать во всех случаях бинарного выбора по критерию Гурвица.

Заключение

Таким образом, для рассмотренного случая (50 матриц полезности с размерностью 6x6 и нормальным распределением показателей полезности) показано, что использование критерия Гурвица редко позволяет обнаруживать взвешенные альтернативы и тем самым управлять соотношением оптимизм – пессимизм. Эти факты приобретают признаки закономерности при анализе выборки, расширенной до 150 матриц.

Что же касается доли совпадений выбора единственной (оптимальной) альтернативы по всем критериям, то она остается практически постоянной для трех выборок: 50, 150 и 10 000 матриц эффективности с нормальным распределением показателей.

Проведенный поиск «скрытых» альтернатив при наращивании числа градаций коэффициента оптимизма на стыках альтернатив показал принципиальную возможность их обнаружения, а также позволил уточнить интервал, в котором лежит в каждом случае третья альтернатива.

Представляется безусловно интересным выяснить, насколько общий характер имеют обнаруженные нами особенности применения критерия Гурвица и уточнить масштаб и границы их проявления.

Авторы благодарят Г.А. Чеботарева за участие в обсуждении.

Литература

1. Vald, A. Contribution of the theory of statistical estimation and testing hypothesis // *Annals Math. Statist.* – 1939. – Vol. 10. – P. 299–326.

2. Savage, L.J. *The foundation of statistics.* – N.Y. : Wiley, 1954.

3. Arrow, K.J., Hurwitz, L. An optimality criterion for decision making under ignorance // *Uncertainty and expectations in economics.* – Oxford : Basil Blackwell and Mott, 1972.

4. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. – М. : Наука, 1976. – 328 с.

5. Жуковский В.И., Солдатова Н.Г. Гарантированные риски и исходы в «игре с природой» // *Проблемы управления.* – 2014. – № 1. – С. 14–26.

6. Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А. *Системный анализ в управлении : учебное пособие.* – М. : Финансы и статистика, 2007. – 368 с.

7. Дрогобыцкий И.Н. *Системный анализ в экономике : учебное пособие.* – М. : Финансы и статистика, 2009. – 425 с.

8. Лабскер Л.Г. *Теория критериев оптимальности и экономические решения.* – М. : Кнорус, 2012. – 744 с.

9. Бродецкий Г.Л. *Системный анализ в логистике. Выбор в условиях неопределенности.* – М. : Academia, 2010. – 336 с.

10. Клименко И.С., Плуталов М.А., Чеботарев Г.А. Сравнительный анализ критериев выбора стратегий в «игре с природой» // *Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление».* – 2015. – Выпуск 1. – С. 57–61.

11. Клименко И.С., Плуталов М.А., Чеботарев Г.А. К вопросу об оценивании оптимизма критериев выбора стратегий в «игре с природой» // *Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление».* – 2015. – Выпуск 2. – С. 19–23.