
Н.М. Миназетдинов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ
МЕТАЛЛОВ ЭЛЕКТРОДОМ-ИНСТРУМЕНТОМ
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ**

Представлено численно-аналитическое решение нелинейной двумерной задачи, связанной с определением формы границы детали при ее электрохимической обработке электродом-инструментом периодической структуры. Для решения задачи используется ее гидродинамическая интерпретация, согласно которой исходная задача сводится к задаче теории потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости. Результаты числовых расчетов представлены в виде таблиц и графиков.

Ключевые слова: электрохимическая обработка металлов, идеальный процесс, гидродинамическая аналогия, потенциал, идеальная несжимаемая жидкость, гармоническая функция.

N.M. Minazetdinov

**MODELING OF ELECTROCHEMICAL MACHINING
OF METALS WITH AN ELECTRODE – TOOL
OF PERIODIC STRUCTURE**

The paper presents a numerical and analytical solution to a nonlinear two-dimensional problem related to determining the shape of the boundary of a part during its electrochemical treatment with an electrode-tool of a periodic structure. To solve the problem, its hydrodynamic interpretation is used, according to which the initial problem is reduced to the problem of the theory of potential flow of an ideal incompressible liquid. The results of numerical calculations are presented in the form of tables and graphs.

Keywords: electrochemical machining of metals, ideal process, hydrodynamic analogy, potential, ideal incompressible liquid, harmonic function.

Введение

Метод электрохимической обработки (ЭХО) металлов [3], в основе которого лежит процесс анодного растворения металла в проточном электролите, имеет широкое применение в различных отраслях машиностроения. В частности, метод ЭХО применяется для формирования на рабочих поверхностях теплообменных устройств рельефных поверхностей, предназначенных для интенсификации теплопередачи [1].

Для формирования регулярных рельефов на поверхности детали (аноде) можно использовать электрод-инструмент (катод) периодической структуры.

Пусть катод-инструмент образован бесконечной совокупностью прямоугольных выступов, совмещающихся друг с другом при параллельном переносе на некоторое конечное расстояние. Ниже, в рамках модели идеального процесса [3], находится численно-аналитическое решение двумерной задачи, связанной с определением установившейся (стационарной) формы [3] поверхности детали.

Геометрия межэлектродного промежутка

Схема сечения межэлектродного промежутка представлена на рисунке 1.

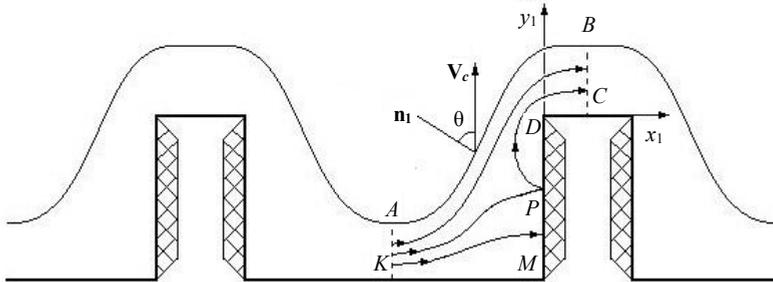


Рис. 1. Геометрия межэлектродного промежутка

Ограничимся рассмотрением области, расположенной между осями симметрии AK и BC . На ней: полигон $KMDC$ – граница катода, отрезки KM и DC – токопроводящие (рабочие) участки катода, на участок DM нанесено диэлектрическое покрытие; линия AB – искомая установившаяся анодная граница. Система декартовых координат (x_1, y_1) связана с катодом, и ее начало выбрано в точке D . Угол между вектором V_c скорости подачи катода и вектором n_1 нормали к анодной границе равен θ . Длины отрезков CD , DM , MK обозначим как l_1 , l_2 и l_3 соответственно.

Модель процесса электрохимической обработки

Используя предпосылки и допущения модели идеального процесса, введем аналитическую функцию $W_1(z_1) = v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1)$ комплексной переменной $z_1 = x_1 + iy_1$. Действительная часть функции $\text{Re } W(z_1) = v(x_1, y_1)$ соответствует силовой функции электрического поля, а мнимая часть $\text{Im } W(z_1) = u(x_1, y_1)$ – потенциалу электрического поля в межэлектродном промежутке [6].

Потенциал $u(x_1, y_1)$ принимает постоянные значения на границах электродов

$$u|_{AB} = u_a, \quad u|_{KM} = u|_{DC} = u_c. \tag{1}$$

На осях симметрии AK , BC и участке DM границы катода, силовые линии электрического поля, ортогональны к ее эквипотенциальным линиям, и функция $v(x_1, y_1)$ на указанных линиях принимает постоянные значения. На отрезке DM существует точка P ветвления эквипотенциальной линии, в которой напряженность электрического поля равна нулю [9].

Нормальная производная потенциала электрического поля на неизвестной установившейся анодной границе AB удовлетворяет условию [5]

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{1}{\kappa a_0} \left(-a_1 + \frac{\rho V_c}{\epsilon} \cos \theta \right), \tag{2}$$

где κ – удельная электропроводность среды; ϵ – электрохимический эквивалент металла; ρ – плотность материала анода; a_0, a_1 – постоянные, характеризующие свойства системы «металл – электролит».

Далее задача формулируется в безразмерных переменных:

$$\Psi = (u - u_c) / (u_a - u_c), \quad z = z_1 / H = x + iy,$$

где Ψ – безразмерный потенциал электрического поля; $H = a_0 \kappa (u_a - u_c) / j_0$ – характерная длина [8]; $j_0 = \rho V_c / \varepsilon$ – характерная плотность тока [4].

Тогда для функции $W(z) = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ гармонически сопряженная функция по отношению к функции $\Psi(x, y)$, выполняются условия

$$\Psi|_{AB} = 1, \quad \Psi|_{KM} = \Psi|_{DC} = 0; \quad (3)$$

$$\left| \frac{dW}{dz} \right|_{AB} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{AB} = b + \cos \theta, \quad b = -\frac{a_1}{j_0}. \quad (4)$$

На линиях AK , MPD и BC функция $\varphi(x, y)$ принимает постоянные значения. Не нарушая общности, будем считать, что

$$\varphi|_{AK} = 0, \quad \varphi|_{MPD} = \varphi_0, \quad \varphi|_{BC} = \varphi_1. \quad (5)$$

Согласно закону Ома плотность тока на границе электродов определяется по формуле

$$j = \kappa \frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{\kappa (u_a - u_c)}{H} \frac{\partial \Psi}{\partial n}.$$

Тогда

$$\varphi_0 = \int_{KM} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \frac{H}{\kappa (u_a - u_c)} \int_{KM} j(s) ds = \frac{H}{\kappa (u_a - u_c)} I_{KM};$$

$$\varphi_1 = \int_{AB} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \frac{H}{\kappa (u_a - u_c)} I_{AB},$$

то есть значения безразмерных постоянных величин φ_0 и φ_1 характеризуют величины I_{KM} и I_{AB} электрического тока, протекающего через границы KM и AB соответственно.

Задача сводится к определению безразмерных координат точек неизвестной установившейся анодной границы AB при выполнении условий (3)–(5).

Согласно гидродинамической аналогии [4, 7], двумерное потенциальное электрическое поле моделируется фиктивным плоскопараллельным потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости. При этом потенциалу электрического поля соответствует функция тока фиктивного течения, а функции тока – потенциал скорости. Гидродинамическим аналогом напряженности \mathbf{E} электрического поля является скорость \mathbf{V} фиктивного течения. Из условия (4) следует, что на искомой границе AB скорость фиктивного течения изменяется по закону

$$V = b + \cos \theta, \quad (6)$$

где θ – аргумент вектора скорости, совпадающий с углом между векторами \mathbf{V}_c и \mathbf{n}_1 (см. рис. 1).

Численно-аналитическое решение задачи

Рассмотрим фиктивное потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости в односвязной области G_z плоскости переменной $z = x + iy$, ограниченной анодной границей AB , полигональной границей $KMDC$ катода и осями симметрии AK и BC . Поток

Миназетдинов Н.М. Моделирование электрохимической обработки металлов...

создается системой непрерывно распределенных источников вдоль линий AK , DP и стоков на линиях BC и MP . Схема расположения линий тока фиктивного течения представлена на рисунке 1. В точке P скорость фиктивного течения жидкости равна нулю.

Для решения задачи введем вспомогательное комплексное переменное $t = \xi + i\delta$, изменяющееся в области $G_t = (\{ |t| < 1, \delta > 0 \})$ (рис. 2), и будем искать функцию $z(t)$, конформно отображающую полуокруг единичного радиуса на область течения. Соответствующие точки на рисунках 1 и 2 обозначены одинаковыми буквами.

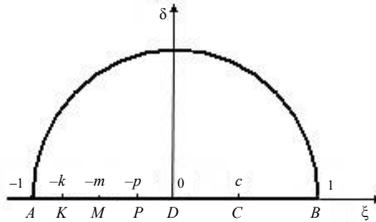


Рис. 2. Плоскость вспомогательной переменной t

Комплексный потенциал $W(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t = \exp(i\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi], \\ 0, & t = \xi, \quad \xi \in [-k, -m] \cup [0, c]. \end{cases}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in [-1, -k], \\ \varphi_0, & \xi \in [-m, 0], \\ \varphi_1, & \xi \in [c, 1]. \end{cases}$$

где σ – полярный угол в плоскости параметрической переменной t . Область изменения комплексного потенциала представлена на рисунке 3, a .

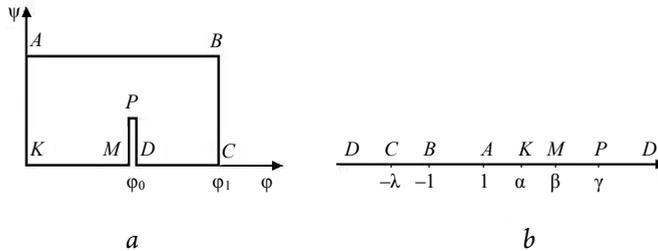


Рис. 3. Вспомогательные области:

- a – область изменения комплексного потенциала W ;
- b – область изменения вспомогательной переменной u

Связь между переменной t и комплексным потенциалом W определяется методом конформных отображений [7]. Отобразим область G_t на верхнюю полуплоскость G_u (рис. 3, b) преобразованием [7]

$$u = -\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right). \tag{7}$$

Используя интеграл Кристоффеля – Шварца [7], найдем производную функции, отображающей область G_u на область изменения комплексного потенциала:

$$\frac{dW}{du} = N \frac{u - \gamma}{\sqrt{(u + \lambda)(u - \alpha)(u - \beta)(u^2 - 1)}}, \quad N = \text{const.} \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{k} \right), \quad \beta = \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{m} \right), \quad \gamma = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right), \quad \lambda = \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{c} \right).$$

Используя формулы (7) и (8), получим

$$\frac{dW}{dt} = M \frac{F(t)}{\sqrt{t-c}}, \quad M = \text{const}; \quad (9)$$

$$F(t) = \frac{(t+p)(1+tp)}{\sqrt{t(1-tc)(t+k)(1+tk)(t+m)(1+tm)}}.$$

Интегрируя выражение (9) на отрезке $[-k, -1]$, найдем величину M :

$$M = \frac{i}{I_0}, \quad I_0 = \int_k^1 \frac{F_1(x)}{\sqrt{(x-k)(x-m)}} dx, \quad (10)$$

$$F_1(x) = \frac{(x-p)(1-xp)}{\sqrt{x(x+c)(1+xc)(1-xk)(1-xm)}}.$$

Интегрируя выражения (9) на отрезках $[-k, -m]$ и $[0, c]$, найдем

$$\varphi_0 = I_1/I_0, \quad I_1 = \int_m^k \frac{F_1(x)}{\sqrt{(k-x)(x-m)}} dx; \quad (11)$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + I_2/I_0, \quad I_2 = \int_0^c \frac{F(x)dx}{\sqrt{c-x}}. \quad (12)$$

Из условия $\int_{-m}^0 \frac{dW}{dt} dt = 0$ следует, что

$$\int_0^m \frac{F_1(x)dx}{\sqrt{(k-x)(m-x)}} = 0. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение функцию Жуковского [2]

$$\chi(t) = \ln \frac{V_0 dz}{dW} = r + i\theta, \quad r = \ln \frac{V_0}{V}, \quad (14)$$

где V – модуль скорости; V_0 – значение скорости в точке B ($t = 1$). Из формулы (6) следует, что $V_0 = b + 1$.

Представим функцию $\chi(t)$ в виде суммы [2]

$$\chi(t) = \chi_0(t) + \omega(t), \quad (15)$$

где $\chi_0(t) = r_0 + i\theta_0$ – функция Жуковского для вспомогательного течения жидкости по заданной схеме при условии, что на границе AB модуль скорости постоянный и равен V_0 ; $\omega(t)$ – функция, аналитическая в области G_t и непрерывная в ее замыкании \bar{G}_t [7].

Миназетдинов Н.М. Моделирование электрохимической обработки металлов...

Согласно схеме течения, функции $\chi(t)$ и $\chi_0(t)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\operatorname{Im}\chi(\xi) = \operatorname{Im}\chi_0(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in [-1, -p] \cup (0, 1], \\ -\pi, & \xi \in (-p, 0). \end{cases} \quad (16)$$

$$V_0 \exp(-r(t)) = b + \cos\theta(t), r_0(t) = 0, t = \exp(i\sigma), \sigma \in [0, \pi]; r(1) = 0. \quad (17)$$

Функции $\chi(t)$ и $\chi_0(t)$ имеют логарифмические особенности в точках $P(t = -p)$ и $D(t = 0)$. По известным граничным условиям и известным особенностям функцию $\chi_0(t)$ можно построить методом особых точек Чаплыгина [2]:

$$\chi_0(t) = \ln \frac{t(1+tp)}{t+p}. \quad (18)$$

Согласно формулам (16), (17) из соотношения (15) следует, что функция $\omega(t)$ должна удовлетворять условиям

$$\operatorname{Im}\omega(\xi) = 0, \quad \xi \in [-1, 1]; \quad \operatorname{Re}\omega(1) = 0; \quad (19)$$

$$b + \cos(\theta_0(\sigma) + \mu(\sigma)) - V_0 \exp(-v(\sigma)) = 0; \quad (20)$$

$$\mu(\sigma) = \operatorname{Im}\omega(\exp(i\sigma)), \quad v(\sigma) = \operatorname{Re}\omega(\exp(i\sigma)).$$

Из условий (19) следует, что согласно принципу симметрии Шварца функцию $\omega(t)$ можно аналитически продолжить на весь круг $|t| \leq 1$ и искать ее в виде [7]

$$\omega(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad (21)$$

где c_k – вещественные коэффициенты, удовлетворяющие равенству

$$\omega(1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = 0 \quad \text{или} \quad c_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k. \quad (22)$$

Всюду далее суммирование ведется от $k = 1$ до $k = \infty$.

Геометрические характеристики течения определяются из параметрической зависимости

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\exp(\chi(t))}{V_0} \frac{dW}{dt} = \frac{M}{V_0} \frac{F_2(t)}{\sqrt{t-c}}; \quad (23)$$

$$F_2(t) = \frac{(1+tp)^2 \sqrt{t} \exp(c_0 + \sum c_k t^k)}{\sqrt{(1-tc)(t+k)(1+tk)(t+m)(1+tm)}}.$$

Интегрируя выражение (23) на отрезках $[0, c]$, $[-m, 0]$, $[-k, -m]$, найдем безразмерные длины отрезков CD, DM, MK :

$$L_1 = \frac{l_1}{H} = \frac{1}{I_0 V_0} \int_0^c \frac{F_2(x)}{\sqrt{c-x}} dx; \quad L_2 = \frac{l_2}{H} = \frac{1}{I_0 V_0} \int_0^m \frac{F_3(x)}{\sqrt{m-x}} dx;$$

$$L_3 = \frac{l_3}{H} = \frac{1}{I_0 V_0} \int_m^k \frac{F_3(x)}{\sqrt{x-m}} dx; \quad F_3(x) = \frac{(1-xp)^2 \sqrt{x} \exp(c_0 + \sum (-1)^k c_k x^k)}{\sqrt{(x+c)(1+xc)(k-x)(1-xk)(1-xm)}}. \quad (24)$$

Для численного решения задачи задаются значения коэффициента a_1 , характерной плотности тока $j_0 = \rho V_c / \varepsilon$ и геометрических параметров L_1, L_2 и L_3 . Коэффициенты разложения (21) и параметры k, m, p, c определяются таким образом, чтобы на искомой анодной границе удовлетворялось условие (20) и выполнялись соотношения (13) и (24). Для этого в разложении (21) сохраняется конечное число n слагаемых, а уравнение (20) выполняется в дискретных точках $\sigma_k = \pi k / n$, где $k = \overline{1, n}$. Система уравнений относительно параметров $c_k, k = \overline{1, n}$ решается совместно с уравнениями (13), (24) методом Ньютона.

После определения коэффициентов $c_k, k = \overline{1, n}$ и параметров k, m, p, c безразмерные координаты точек анодной граница AB определяются с помощью соотношения (23) при условии, что $t = \exp(i\sigma), \sigma \in [0, \pi]$.

Результаты расчетов

Введем обозначения: L_4, L_5 – безразмерные величины межэлектродного зазора в сечениях AK и BC соответственно; y_A – ордината точки A ; $L_6 = |y_A| + L_5$ – высота выступа, полученной стационарной анодной границы AB .

В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$a_1 = -12,818, j_0 = 100 \text{ А/см}^2, L_1 = 1, L_3 = 2.$$

В таблице 1 представлены результаты расчетов величин: $L_4, L_5, y_A, L_6, \Phi_0, \Phi_1$ для трех различных значений L_2 : 1,8; 2,0; 2,2.

Таблица 1

Результаты расчета параметров

L_2	L_4	L_5	y_A	L_6	Φ_0	Φ_1
1,8	1,0669	0,809	-0,7331	1,5421	1,4249	3,4557
2,0	1,077	0,8075	-0,923	1,7305	1,4152	3,4758
2,2	1,0808	0,807	-1,1192	1,9262	1,4146	3,4958

На рисунке 4 представлены графики анодных границ для указанных случаев.

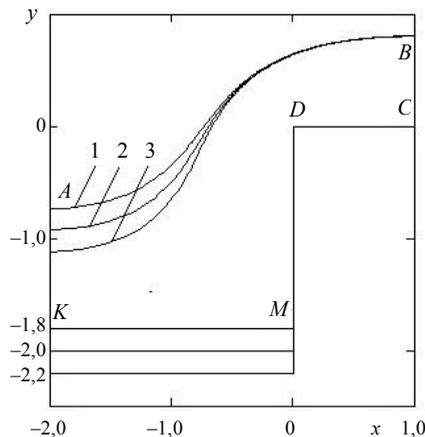


Рис. 4. Результаты расчета анодных границ:

$$1 - L_2 = 1,8; 2 - L_2 = 2,0; 3 - L_2 = 2,2$$

Миназетдинов Н.М. Моделирование электрохимической обработки металлов...

Рассмотрим случай, когда

$$a_1 = -12,818, j_0 = 100 \text{ А/см}^2, L_1 = 1, L_2 = 2.$$

В таблице 2 представлены результаты расчетов величин $L_4, L_5, y_A, L_6, \Phi_0, \Phi_1$ для трех различных значений L_3 : 1,5; 2,0; 2,5.

Таблица 2

Результаты расчета параметров

L_3	L_4	L_5	y_A	L_6	Φ_0	Φ_1
1,5	1,383	0,8084	-0,671	1,4794	0,847	2,891
2,0	1,077	0,8075	-0,923	1,7305	1,4152	3,4738
2,5	0,9633	0,8078	-1,0367	1,8445	1,9813	4,0426

На рисунке 5 представлены соответствующие графики анодных границ.

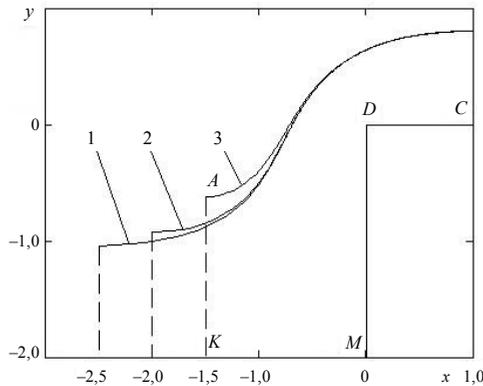


Рис. 5. Результаты расчета анодных границ:

$$1 - L_3 = 2,5; 2 - L_3 = 2,0; 3 - L_3 = 2,5$$

Заключение

На основе математической модели процесса электрохимического формообразования, описанного в работе [5], решена задача расчета координат точек установившейся анодной границы при обработке катодом-инструментом заданной формы, имеющей периодическую структуру. Результаты решения позволяют сделать выводы о влиянии геометрических размеров катода на размеры выступов, получаемых в результате электрохимической обработки рельефной поверхности.

Литература

1. Волгин В.М. Компьютерное моделирование электрохимического формообразования регулярных рельефов // Электрофизические и электрохимические методы обработки материалов. Тула: ТулГУ, 1996. С. 52–61.
2. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
3. Давыдов А.Д., Козак Е. Высокоскоростное электрохимическое формообразование. М.: Наука, 1990. 272 с.
4. Клоков В.В. Электрохимическое формообразование. Казань: Изд-во Казанского университета, 1984. 80 с.

5. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. Определение формы анода с учетом свойств электролита в задачах электрохимической обработки металлов // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44, № 3. С. 179–184.
6. Крылов А.А. Задача Коши для уравнения Лапласа в теории электрохимической обработки металлов // Доклады АН СССР. 1968. Т. 178, № 2. С. 321–323.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
8. Миназетдинов Н.М. Об одной модели кавитационного течения электролита при электрохимической обработке // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». 2020. Вып. 3. С. 41–51.
9. Татур Т.А. Основы теории электромагнитного поля: справочн. пособие для электротехн. спец. вузов. М.: Высш. шк., 1989. 271 с.

Literatura

1. Volgin V.M. Komp'yuternoe modelirovanie elektrohimicheskogo formoobrazovaniya reguljarnyh rel'efov // Elektrofizicheskie i elektrohimicheskie metody obrabotki materialov. Tula: TulGU, 1996. S. 52–61.
2. Gurevich M.I. Teoriya struj ideal'noj zhidkosti. M.: Nauka, 1979. 536 s.
3. Davydov A.D., Kozak E. Vysokoskorostnoe elektrohimicheskoe formoobrazovanie. M.: Nauka, 1990. 272 s.
4. Klovov V.V. Elektrohimicheskoe formoobrazovanie. Kazan': Izdatel'stvo Kazanskogo universiteta, 1984. 80 s.
5. Kotlyar L.M., Minazetdinov N.M. Opredelenie formy anoda s uchetom svojstv elektrolita v zadachah elektrohimicheskoy obrabotki metallov // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2003. Т. 44, № 3. S. 179–184.
6. Krylov A.A. Zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasya v teorii elektrohimicheskoy obrabotki metallov // Doklady AN SSSR. 1968. Т. 178, № 2. S. 321–323.
7. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo. M.: Nauka, 1987. 688 s.
8. Minazetdinov N.M. Ob odnoj modeli kavitacionnogo techeniya elektrolita pri elektrohimicheskoy obrabotke // Vestnik Rossijskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2020. Vyp. 3. S. 41–51.
9. Tatur T.A. Osnovy teorii elektromagnitnogo polya: spravochn. posobie dlya elektrotekhn. spec. vuzov. M.: Vysshaya shkola, 1989. 271 s.

DOI: 10.25586/RNU.V9187.20.04.P.032

УДК 004.658

В.И. Алексеев, И.А. Шевкунов

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОСЕТЕВОЙ ТЕХНОЛОГИИ В АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ

Проведен обзор ряда научных публикаций, который показал, что крайне актуальным является создание новых автоматизированных систем контроля и диагностики, способных повысить отказоустойчивость и продлить срок эксплуатации аэрокосмической техники. Для этого применяются различные подходы, в основе которых лежат математические модели, деревья решений, искусственные нейронные сети и другие алгоритмы.

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, предаварийные ситуации, диагностика.