

16. *Laptev V.I.* Nonideal States of Water: A Description Alternative to the Method of Activities // Russian Journal of Physical Chemistry. Vol. 78. Suppl. 1. 2004. P. S25–S33.

Литература

1. *Vlasov A.A.* Teoriya mnogikh chastits. M.; L.: Gos. izd-vo tekhniko-teoret. lit., 1950.
2. *Vukalovich M.P., Novikov I.I.* Uravnenie sostoyaniya real'nykh gazov. M.; L.: Gos. energet. izd-vo, 1948.
3. *Vukalovich M.P., Rivkin S.A., Aleksandrov A.A.* Tablitsy teplofizicheskikh svoystv vody i vodyanogo para. M.: Izd-vo standartov, 1969.
4. *Galiley G.* Besedy i matematicheskie dokazatel'stva, kasayushchiesya dvukh novykh otrasley nauki // Izbrannyye trudy: v 2 t. M.: Nauka, 1964. T. 2.
5. *Dzhua M.* Istoriya khimii / per. s ital. G.V. Bykova. M.: Mir, 1975.
6. *Laptev V.I.* Vklad vodorodnykh svyazey v mol'nye khimicheskie potentsialy vody po linii nasyshcheniya // Zhurnal fizicheskoy khimii. 1997. T. 71. № 11. S. 1990–1994.
7. *Laptev V.I.* Printsipy ab initio v modelirovanii nanorazmernogo ob"ekta kak konechnogo chisla uzlov kristallicheskoy reshetki // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2017. Vyp. 2. S. 13–23.
8. *Laptev V.I.* Prostoy metod rascheta kriticheskoy plotnosti veshchestva // Zhurnal fizicheskoy khimii. 1994. T. 68. № 6. S. 1004–1007.
9. *Mayer Dzh., Geppert-Mayer M.* Statisticheskaya mekhanika. M.: Mir, 1980.
10. *Makovel'skiy A.O.* Drevnegrecheskie atomisty. Baku: Izd-vo AN AzSSR, 1946.
11. *Maksvell Dzh.K.* Trudy po kineticheskoy teorii / per. s angl. 2-e izd. M.: Binom. Laboratoriya znaniy, 2015.
12. *Mel'vin-Khyuz E.A.* Fizicheskaya khimiya: v 2 kn. / per. s angl. M.: Inostrannaya literatura, 1962.
13. *Mendeleev D.I.* O rasshirenii zhidkosti ot nagrevaniya // Sochineniya: v 25 t. M.; L.: Izd-vo AN SSSR. T. 5. 1947.
14. *Mendeleev D.I.* Ob uprugosti gazov // Sochineniya v 25 t. M.; L.: GONTI, Red. khim. lit. T. 6. 1939.
15. *Fauler R., Guggengeym E.* Statisticheskaya termodinamika. M.: Inostrannaya literatura, 1949.
16. *Laptev V.I.* Nonideal States of Water: A Description Alternative to the Method of Activities // Russian Journal of Physical Chemistry. Vol. 78. Suppl. 1. 2004. P. S25–S33.

DOI: 10.25586/RNUV9187.19.02.P.027

УДК 004; 003.26

А.М. Шаймарданов, А.А. Нечай, С.В. Лепехин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Предлагается совершенствование способов построения математических моделей широтно-импульсных систем второго рода, а также широтно-импульсных систем – 1 и широтно-импульсных систем – 2 с переменной непрерывной частью.

Ключевые слова: широтно-импульсная модуляция, математическая модель, широтно-импульсная система первого и второго рода.

A.M. Shajmardanov, A.A. Nechaj, S.V. Lepekhin

MATHEMATICAL MODELS OF AUTOMATIC
CONTROL SYSTEMS WITH PULSE-WIDTH
MODULATION

It is proposed to improve the methods of constructing mathematical models of pulse-width systems of the second kind, as well as pulse-width systems – 1 and pulse-width systems – 2 with a variable continuous part.

Keywords: pulse width modulation, mathematical model, pulse width system of the first and second kind.

Введение

В настоящее время широтно-импульсная модуляция (ШИМ) активно используется в системах электропитания промышленных объектов (насосах подачи топлива, вентиляторах охлаждающих систем, подъемно-транспортном оборудовании, лифтах, системах приводов антенн, системах управления КА с широтно-импульсным управлением исполнительными органами). Цифровые устройства наиболее естественно вписываются в структуру систем управления с ШИМ. Это обусловлено принципом действия преобразователей кодов в аналоговые величины, в которых значения кода в дискретный момент времени преобразуются в длительность импульса, что эквивалентно ШИМ первого рода.

В широтно-импульсных системах (ШИС) первого рода длительность импульсов является функцией равноотстоящей последовательности управляемой величины. На практике применяются также системы с широтно-импульсной модуляцией второго рода [1; 6–8; 15]. Их характерной особенностью является то, что для формирования управляющего воздействия изменение управляемой величины осуществляется не в равноотстоящие моменты времени. Это затрудняет применение к ним методов, рассмотренных в работе [4]. Для исследования систем с ШИМ-2 используются импульсные характеристики и передаточные функции [2; 5; 10–14], полученные методом переменных состояния.

Во многих импульсных системах параметры и структура непрерывной части изменяются в течение каждого периода дискретности синхронно со значениями управляющего воздействия. Широтно-импульсные стабилизаторы напряжения являются примером таких систем. Анализ этого вида ШИС посвящено незначительное количество работ [6; 15], причем рассматривались системы с модуляцией только второго рода. Линейные импульсные системы с изменяющейся непрерывной частью исследовались в [3].

Таким образом, наиболее развиты методы получения математических моделей систем ШИМ-1 с неизменной непрерывной частью. Новые результаты исследований таких систем не нашли еще применения при анализе широтно-импульсных систем второго рода. Немногочисленные работы посвящены исследованию ШИС-2 со скачкообразно меняющейся непрерывной частью, и отсутствуют результаты анализа таких систем при широтно-импульсной модуляции первого рода.

Для развития методов исследования ШИМ необходимо совершенствование способов построения математических моделей широтно-импульсных систем второго рода, а также ШИС-1 и ШИС-2 с переменной непрерывной частью.

Математические модели широтно-импульсных систем первого рода

Большой класс систем ШИС-1 структурно можно представить в виде схемы (рис. 1).

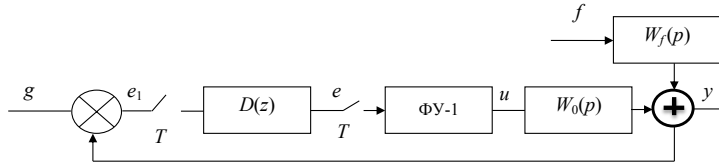


Рис. 1. Широтно-импульсная система первого рода

Непрерывная часть описывается передаточными функциями по управляющему воздействию $W_0(p)$ и по возмущению $W_f(p)$, $f(t)$ – действующее на систему возмущение. На выходе формирующего устройства (ФУ-1) последовательность импульсов, модулированных по длительности:

$$U(t) = \begin{cases} hsgne(i), & \text{при } iT \leq t < (i + \gamma_i)T, \\ 0, & \text{при } (i - \gamma_i)T \leq t < (i + 1)T, \end{cases} \quad (1)$$

где h – постоянная амплитуда;

γ_i – скважность импульсов на i -м периоде дискретности $i = 0, 1$.

На практике обычно используются формирующие устройства, имеющие линейную модуляционную характеристику с насыщением [3; 6]:

$$\gamma_i = \text{sat} \left[\frac{1}{\beta} |e_{(i)}| \right]. \quad (2)$$

Линейный дискретный фильтр с периодом дискретности T преобразует последовательность значений ошибки управления

$$e_1(i) = g(i) - y(i) \quad (3)$$

в последовательность входных величин формирующего устройства. Процесс преобразования в операторной форме записывается в виде соотношения

$$E(z) = D(z)E_1(z). \quad (4)$$

Особенность получения математической модели импульсной системы состоит в необходимости одновременного учета дискретных и непрерывных элементов.

1. Уравнения состояния широтно-импульсных систем первого рода

Одной из основных проблем описания ШИС уравнениями состояния является получение уравнений, описывающих непрерывную часть системы совместно с формирующим устройством.

Непрерывная часть системы с ШИМ-1 (см. рис. 1) может быть описана уравнениями состояния [3; 7]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + mf, \\ y &= c^T x + du + \zeta f, \end{aligned} \quad (5)$$

где x – n -мерный вектор переменного состояния;

A – матрица размерности $n \times n$;

Выпуск 2/2019

 m, c – векторы – столбцы длины n ; d, η – постоянные коэффициенты; y – выходная величина.

Вывод уравнений состояния широтно-импульсных систем основан на получении решения первого из уравнений (5), имеющего следующий вид [4; 7; 8]:

$$x(t) = e^{A(t-\tau)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} m f(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Вычисление (6) при управлении (1) наиболее удобно производить, если уравнения состояния (5) записаны в канонической форме [1; 6], поскольку при этом матрица A – диагональная.

Обычно решение (6) определяется при совпадении с началом периодов дискретности по крайней мере одного момента наблюдения вектора переменных состояния [4; 8; 15].

Вывод уравнений состояния приведенной непрерывной части (ПНЧ) в этом случае можно произвести следующим образом (для сокращения количества проводимых соотношений полагается $f=0$).

Пусть скважность управляющего воздействия на i -м периоде дискретности равна γ_i , а на $(i+1)$ -м – γ_{i+1} . Решение уравнений (5) по правилу (6) позволяет найти уравнения состояния:

$$\begin{aligned} x(i+1+\varepsilon_1) &= A_{0\varepsilon}^* x(i+\varepsilon_0) + b_{0\varepsilon}^* h \operatorname{sgn} u(i) + b_{1\varepsilon}^* h \operatorname{sgn} u(i+1), \\ y(i+1+\varepsilon_t) &= c^T x(i+1+\varepsilon_1), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_{0\varepsilon}^* &= e^{A(1+\varepsilon_1-\varepsilon_0)T}, \\ b_{0\varepsilon}^* &= \begin{cases} \int_{(1+\varepsilon_1-\varepsilon_0)T}^{(1+\varepsilon_1-\varepsilon_0)T} e^{A\sigma} b d\sigma, & \text{при } 0 \leq \varepsilon_0 < \gamma_i, \\ 0, & \text{при } \gamma_i \leq \varepsilon_1 \leq 1, \end{cases} \\ b_{1\varepsilon}^* &= \begin{cases} \int_0^{\varepsilon_1 T} e^{A\sigma} b d\sigma, & \text{при } 0 \leq \varepsilon_1 < \gamma_{i+1}, \\ \int_{(\varepsilon_1-\gamma_{i+1})T}^{\varepsilon_1 T} e^{A\sigma} b d\sigma, & \text{при } \gamma_{i+1} \leq \varepsilon_1 < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнения (7) записаны в нормальной форме, когда $d=0$.

При вычислении $b_{0\varepsilon}^*$ и $b_{1\varepsilon}^*$, если матрица A – неособенная, можно использовать соотношение

$$\int_{a_0}^{a_1} e^{A\sigma} b d\sigma = A^{-1} e^{Aa_1} \left(E - e^{A(a_0-a_1)} \right) b, \quad (8)$$

где E – единичная матрица;

a_0, a_1 – произвольные пределы интегрирования.

Шаймарданов А.М., Нечай А.А., Лепехин С.В. Математические модели систем...

Из полученной модели приведенной непрерывной части (7) как частные случаи следуют известные уравнения систем с ШИМ [6; 7] Например, уравнение

$$x(i+1) = A_0^* x(i) + b_0^* h \operatorname{sgn} u(i) \quad (9)$$

получается при $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 1$ или $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0$, когда

$$A_0^* = e^{AT}, \quad b_0^* = \int_{(1-\gamma_i)T}^T e^{A\sigma} b d\sigma = A^{-1} e^{AT} (E - e^{A\gamma_i T}) b. \quad (10)$$

Если же считать $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon$, то получается уравнение

$$x(i+\varepsilon) = A_\varepsilon^* x(i) + b_\varepsilon^* h \operatorname{sgn} u(i), \quad (11)$$

$$A_\varepsilon = e^{A\varepsilon T}, \quad b_\varepsilon^* \begin{cases} \int_0^{\varepsilon T} e^{A\sigma} b d\sigma, & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma_i, \\ \int_{(\varepsilon-\gamma_i)T}^{\varepsilon T} e^{A\sigma} b d\sigma, & \text{при } \gamma_i \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (12)$$

Для получения модели замкнутой системы необходимо уравнения (7) дополнить разностными уравнениями дискретного фильтра (4) и замыкания.

2. Передаточные функции широтно-импульсных систем первого рода

Передаточные функции являются иной формой математической модели систем.

Строго говоря, для ШИС понятие передаточной функции не применимо [7; 15]. Однако из практических соображений оно используется, но при этом понимается, что передаточная функция неизменна лишь в течение одного периода дискретности и меняется от периода к периоду.

Для импульсных систем разработан метод дискретных Z – передаточных функций. Наиболее распространен переход к передаточной функции непрерывной части от уравнений состояния:

$$W_0(z, \gamma) = c^T (zE - A_0^*)^{-1} b_0^* = \frac{B_0(z, \gamma)}{C_0(z)}, \quad (13)$$

где E – единичная $n \times n$ матрица.

Такой способ получения передаточных функций является универсальным, поскольку принципиально уравнения состояния могут быть составлены для любой непрерывной части. Кроме того, имеется возможность рассматривать и управления для неравноотстоящих последовательностей (7), из которых следует:

$$W_0(z, \gamma, \varepsilon_0) = c^T (zE - A_{0\varepsilon}^*)^{-1} (b_{0\varepsilon}^* + b_{1\varepsilon}^*) = \frac{B_0(z, \gamma, \varepsilon_0, \varepsilon_1)}{C_0(z)}. \quad (14)$$

При получении (14) полагалось, что $\operatorname{sgn} u(i) = \operatorname{sgn} u(i+1)$.

Необходимость выполнения матричных операций (13) и (14) может существенно усложнить анализ системы. Поэтому, если для исследований ШИС нужно получить $B_0(z, \gamma)$ и $C_0(z)$, предпочтительнее использовать другой способ [8] (рис. 2).

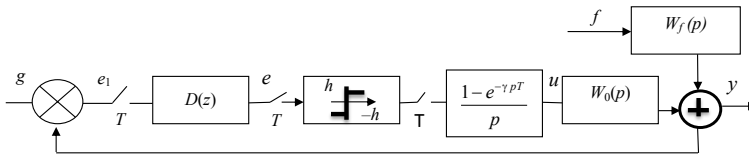


Рис. 2. Структурная схема с ШИМ

Формирующее устройство описывается передаточной функцией

$$W_{\phi}(p) = \frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p}, \tag{15}$$

при этом постоянство амплитуды управления учитывается введением идеального релейного звена. Тогда передаточная функция ПНЧ находится по той же формуле, что и для систем с амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ) [1; 3]:

$$W_{0\epsilon}(z, \gamma) = Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} = z^{-1} Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}. \tag{16}$$

Преимущества этого способа заключаются как в простоте получения $W_0(z, \gamma)$, так и в возможности определения передаточной функции разомкнутой части широтно-импульсной системы. Для получения передаточной функции разомкнутой части $W_0(z, \gamma)$ нужно преобразовать структурную схему (рис. 1) так, как показано на рисунке 3, и провести вычисления [4].

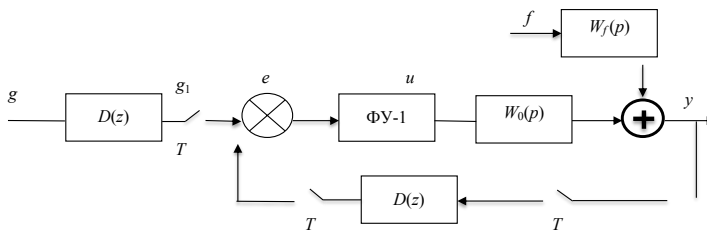


Рис. 3. Преобразование структурной схемы ШИС-1 для получения передаточной функции разомкнутой части

$$W_0(z, \gamma) = W_0(z, \gamma) D(z). \tag{17}$$

3. Математические модели широтно-импульсных систем с синхронным скачкообразным изменением параметров непрерывной части

Вследствие скачкообразного изменения параметров непрерывная часть системы описывается двумя различными уравнениями состояния в течение периода дискретности, которые можно записать в нормальной форме:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1 x(t) + b_1 u(t), & \text{при } iT \leq t < (i + \gamma_i)T, \\ A_2 x(t) + b_2 U(t), & \text{при } (i + \gamma_i)T \leq t < (i + 1)T. \end{cases} \tag{18}$$

Использование решения (6) и согласование значений переменных состояния на интервалах постоянства непрерывной части внутри периодов дискретности приводят к уравнениям состояния ПНЧ в дискретной форме:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= A_{\Delta}^*(\gamma_i)x(i) + b_{\Delta}^*(\gamma_i)hsgnu(i), \\ y(i) &= c^T x(i), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\Delta}^*(\gamma_i) &= e^{A_1\gamma_i T} + A_2(1-\gamma_i)T, \\ b_{\Delta}^*(\gamma_i) &= e^{A_2(1-\gamma_i)T} \int_0^{\gamma_i T} e^{A_1\sigma} b_1 d\sigma + \int_0^{(1-\gamma_i)T} e^{A_2\sigma} b_2 d\sigma. \end{aligned} \quad (20)$$

Если передаточные функции непрерывной части имеют однократные действительные или комплексно-сопряженные полюса, то они могут быть представлены в виде

$$W_0(p) = \begin{cases} W_1(p) = \sum_{v=1}^n \frac{R_{v1}}{p - p_{v1}}, & \text{при } iT \leq t < (i + \gamma_i)T, \\ W_2(p) = \sum_{v=1}^n \frac{R_{v2}}{p - p_{v2}}, & \text{при } (i + 1)T \leq t < (i + 1)T. \end{cases} \quad (21)$$

Тогда входящие в (18) матрицы и векторы принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{diag} \{p_1 \dots, p_{n1}\}, \quad A_2 = \text{diag} \{p_1 \dots, p_{n2}\}, \\ b_1^T &= (R_{11}, \dots, R_{n1}), \quad b_2^T = (R_{12}, \dots, R_{n2}). \end{aligned} \quad (22)$$

Выполнение матричных операций (20) приводит к соотношениям

$$A_{\Delta}^*(\gamma_i) = \text{diag} \{d_{11}^{\gamma_i} d_{12}^{1-\gamma_i}, \dots, d_{n1}^{\gamma_i} d_{n2}^{1-\gamma_i}\}, \quad d_{vj} = e^{p_{vj} T}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} b_{\Delta}^{*T}(\gamma_i) &= \left(\frac{R_{11} d_{12}^{1-\gamma_i} (d_{11}^{\gamma_i} - 1)}{P_{11}} + \frac{R_{12} (d_{12}^{1-\gamma_i} - 1)}{P_{12}} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_{n1} d_{n1}^{1-\gamma_i} (d_{n1}^{\gamma_i} - 1)}{P_{n1}} + \frac{R_{n2} (d_{n2}^{1-\gamma_i} - 1)}{P_{n2}} \right). \end{aligned}$$

В астатической системе $P_{11} = P_{12} = 0$, поэтому

$$d_{11}^{\gamma_i} d_{12}^{1-\gamma_i} = 1, \quad \frac{R_{11} d_{12}^{1-\gamma_i} (d_{11}^{\gamma_i} - 1)}{P_{11}} + \frac{R_{12} (d_{12}^{1-\gamma_i} - 1)}{P_{12}} = R_{11} T \gamma_i + R_{12} (1 - \gamma_i) T. \quad (24)$$

Использование уравнений состояния (19) для получения модели замкнутой системы, в том числе передаточных функций, можно производить как в ШИС с постоянной непрерывной частью. Например, аналогично (13) определяется передаточная функция приведенной непрерывной части:

$$W_{0\Delta}(z, \gamma) = c^T (zE - A_{\Delta}^*(\gamma))^{-1} b_{\Delta}^*(\gamma). \quad (25)$$

Применять непосредственно методы [6] для получения передаточной функции ПНЧ широтно-импульсных систем с переменной непрерывной частью не удастся.

Математические модели широтно-импульсных систем второго рода

1. Уравнения состояния систем с широтно-импульсной модуляцией второго рода

Содержащееся обычно в таких системах (рис. 4) звено обратной связи $W_{oc}(p)$ учтено в передаточной функции непрерывной части $W_0(p)$. С выхода формирующего устройства второго рода (ФУ-2) на вход непрерывной части поступает последовательность импульсов:

$$u(t) = \begin{cases} h \operatorname{sgn} e(i), & \text{при } iT \leq t < (i + \gamma_i)T, \\ 0, & \text{при } (i + \gamma_i)T \leq t \leq (i + 1)T. \end{cases} \quad (26)$$

Значение скважности $\gamma_i = \tau_i T^{-1}$ определяется путем непрерывного сравнения сигнала обратной связи с модулирующим сигналом. Величина τ_i равна наименьшему положительному корню уравнения

$$|e(\tau - iT)| - \beta \tau T^{-1} = 0, \quad (27)$$

если таковой имеется на $[0, T]$. В противном случае $\tau_i = T$, т.е. $\gamma_i = 1$.

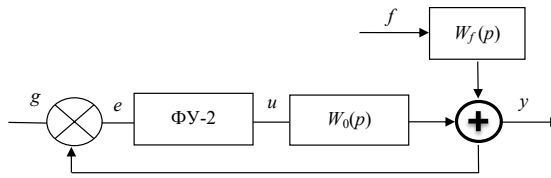


Рис. 4. Структурная схема системы с ШИМ-2

Таким образом, последовательность значений $e(i + \gamma_i)$ является неравноотстоящей. Это обстоятельство приводит к усложнению методов анализа систем с ШИМ-2, в том числе к получению их математических моделей.

Чтобы методика исследования с ШИМ-2 с наименьшими изменениями была пригодна и для ШИС-2, нужно стремиться наиболее простым способом учесть модуляционную характеристику (27) при получении модели ПНЧ. Этому требованию удовлетворяют уравнения (7), полученные для неравноотстоящих моментов наблюдения вектора переменных состояния.

Если в (7) положить $\varepsilon_0 = \gamma_i$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon$, то получаются уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} x(i - 1 + \varepsilon) &= A_{\varepsilon}^* x(i + \gamma_i) + b_{1\varepsilon}^* h \operatorname{sgn} u(i + 1), \\ y(i + 1 + \varepsilon) &= c^T x(i + 1 + \varepsilon). \end{aligned} \quad (28)$$

Значение модуляционной характеристики стоит в поиске значения $\varepsilon \in [0, 1]$, при котором выполняется равенство

$$|g(i + 1 + \varepsilon) - y(i + 1 + \varepsilon)| - \beta \varepsilon = 0. \quad (29)$$

Уравнения (27)–(28) описывают замкнутую систему с ШИМ-2 и в полученном виде пригодны для расчета процессов. Если моделирование ведется на цифровой вычислительной машине, то необходимо многократно вычислять значения (28) и с шагом $\Delta \varepsilon \ll T$ проверять выполнимость (29).

Учет возмущающего воздействия производится в уравнениях состояния непрерывной части с последующим использованием решения (6), т.е. так, как и в широтно-импульсной системе первого рода.

2. Передаточные функции широтно-импульсных систем второго рода

В общем случае передаточную функцию приведенной непрерывной части можно найти следующим образом:

$$W_{02}(z, \gamma, \varepsilon) = c^T (zE - A_\varepsilon^*)^{-1} b_{1\varepsilon}^* = \frac{B_{02}(z, \gamma, \varepsilon)}{C_{02}(z)}. \quad (30)$$

Для исследования ШИС-2 особенно важно определить передаточную функцию приведенной непрерывной части в том случае, когда значения выходной величины рассматриваются в моменты формирования задних фронтов импульсов, т.е. при $\varepsilon = \gamma_{i+1}$. При этом появляется возможность использовать понятие передаточной функции формирующего устройства, которую для ШИС-2 удобно определить следующим образом.

Известно значение передаточной функции ПНЧ системы с АИМ для смещенного аргумента:

$$W_0(z, \gamma, \varepsilon) = \begin{cases} Z_\varepsilon \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} - z^{-1} Z_\varepsilon \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}_{\varepsilon=1+\varepsilon-\gamma}, & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma, \\ Z_\varepsilon \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} - Z_\varepsilon \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}_{\varepsilon=\varepsilon-\gamma}, & \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (31)$$

Для систем с ШИМ-1 значения (34) применяются в записанном виде для случаев $\varepsilon = 0$ при законе модуляции (2).

Применительно к системам с ШИМ-2 из (30) можно записать аналогичное выражение

$$\gamma_i = \text{sat} \frac{1}{\beta} e(i + \gamma_i), \quad (32)$$

но при этом $(i + 1 + \gamma_{i+1})T - (i + \gamma_i)T \neq T$.

Будем считать, что в широтно-импульсной системе второго рода модуляционная характеристика имеет вид (35), а период дискретности меняется по следующему закону:

$$T^* = (1 + \gamma_2 - \gamma_1)T. \quad (33)$$

Например, на $(i + 1)$ -м шаге

$$T_{i+1}^* = (1 + \gamma_{i+1} - \gamma_i)T. \quad (34)$$

Тогда при $\varepsilon = \gamma$ из соотношений (33) следует соотношение

$$W_0^*(z, \gamma, \gamma) = \left\{ Z_\varepsilon \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} \right\}_{\varepsilon=\gamma} - Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} = \frac{B_{02}^*(z, \gamma, \gamma)}{C_0(z)}, \quad (35)$$

в котором период дискретности считается равным T^* . Затем в (33) нужно подставить из (34) значение T^* и упорядочить последовательность величин скажности, как это сделано при переходе от (36) к (37). В результате получается передаточная функция ПНЧ системы с ШИМ-2 в следующем виде:

$$W_{02}(z, \gamma_1, \gamma_2) = \left[Z_\varepsilon \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}_{\varepsilon=\gamma_2} - Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}_{T^*=(1+\gamma_2-\gamma_1)T} \right]. \quad (36)$$

3. Математические модели широтно-импульсных систем второго рода с синхронным и скачкообразным изменением параметров непрерывной части

В связи с особенностью закона модуляции (30) математическую модель систем с ШИМ-2 при учете коммутируемых параметров непрерывной части наиболее удобно составлять для неравноотстоящих моментов. Это можно сделать, если решение уравнения состояния непрерывной части (21) при управлении (29) найти таким образом, как (7) были определены для ШИС-1. В результате получим

$$x(i+1+\varepsilon_1) = A_\varepsilon^\Delta x(i+\varepsilon_0) + b_{0\varepsilon}^\Delta h \operatorname{sgnu}(i) + b_{1\varepsilon}^\Delta h \operatorname{sgnu}(i+1),$$

где

$$A_\varepsilon^\Delta = A_0^\Delta A_1^\Delta, \quad b_{0\varepsilon}^\Delta = A_1^\Delta b_{0\varepsilon}^\Delta; \quad (37)$$

$$A_0^\Delta = \begin{cases} e^{A_1(\gamma_i-\varepsilon_0)T+A_2(1-\gamma_i)T}, & \text{при } 0 \leq \varepsilon_0 < \gamma_i, \\ e^{A_2(1-\varepsilon_0)T}, & \text{при } \gamma_i \leq \varepsilon_0 < 1; \end{cases} \quad (38)$$

$$A_1^\Delta = \begin{cases} e^{A_1\varepsilon_1 T}, & \text{при } 0 \leq \varepsilon_1 < \gamma_{i+1}, \\ e^{A_1\gamma_{i+1}T+A_2(\varepsilon_1-\gamma_{i+1})T}, & \text{при } \gamma_{i+1} \leq \varepsilon_1 < 1; \end{cases} \quad (39)$$

$$b_0^\Delta = \begin{cases} e^{A_2(1-\gamma_i)T} \int_0^{(\gamma_i-\varepsilon_0)T} e^{A_1\sigma} b_1 d\sigma + \int_0^{(1-\gamma_i)T} e^{A_2\sigma} b_2 d\sigma, & \text{при } 0 \leq \varepsilon_0 < \gamma_i, \\ \int_0^{(1-\varepsilon_0)T} e^{A_2\sigma} b_2 d\sigma, & \text{при } \gamma_i \leq \varepsilon_0 < 1. \end{cases} \quad (40)$$

Если непрерывная часть имеет только однократные полюса, т.е. возможные разложения (22) и (23), то соотношения (37)–(40) принимают вид

$$A_0^\Delta = \begin{cases} \operatorname{diag} \{ d_{11}^{\gamma_i-\varepsilon_0} d_{12}^{1-\gamma_i}, \dots, d_{n1}^{\gamma_i-\varepsilon_0} d_{n2}^{1-\gamma_i} \}, & \text{при } 0 \leq \varepsilon_0 < \gamma_i, \\ \operatorname{diag} \{ d_{12}^{1-\varepsilon_0}, \dots, d_{n2}^{1-\varepsilon_0} \}, & \text{при } \gamma_i \leq \varepsilon_0 < 1; \end{cases} \quad (41)$$

$$A_1^\Delta = \begin{cases} \operatorname{diag} \{ d_{11}^{\varepsilon_1}, \dots, d_{n1}^{\varepsilon_1} \}, & \text{при } 0 \leq \varepsilon_1 < \gamma_{i+1}, \\ \operatorname{diag} \{ d_{11}^{\gamma_{i+1}} d_{12}^{\varepsilon_1-\gamma_{i+1}}, \dots, d_{n1}^{\gamma_{i+1}} d_{n2}^{\varepsilon_1-\gamma_{i+1}} \}, & \text{при } \gamma_i \leq \varepsilon_0 < 1; \end{cases} \quad (42)$$

$$b_0^\Delta = \begin{cases} \left(\frac{R_{11}d_{12}^{1-\gamma_i}(d_{11}^{\gamma_i-\varepsilon_0}-1)}{P_{11}} + \frac{R_{12}(d_{12}^{1-\gamma_i}-1)}{P_{12}}, \dots, \frac{R_{n1}(d_{n2}^{1-\gamma_i-\varepsilon_0}-1)}{P_{n1}} + \right. \\ \left. + \frac{R_{n2}(d_{n2}^{1-\gamma_i}-1)}{P_{n2}} \right), & \text{при } 0 \leq \varepsilon_0 < \gamma_i, \\ \left(\frac{R_{12}(d_{12}^{1-\varepsilon_0}-1)}{P_{12}}, \dots, \frac{R_{n2}(d_{n2}^{1-\varepsilon_0}-1)}{P_{n2}} \right), & \text{при } \gamma_i \leq \varepsilon_0 < 1; \end{cases} \quad (43)$$

$$b_1^\Delta = \begin{cases} \left(\frac{R_{11}(d_{11}^{\varepsilon_1}-1)}{P_{11}}, \dots, \frac{R_{n2}(d_{n1}^{\varepsilon_1}-1)}{P_{n1}} \right), & \text{при } 0 \leq \varepsilon_1 < \gamma_{i+1}, \\ \left(\frac{R_{11}d_{12}^{\varepsilon_1-\gamma_{i+1}}(d_{11}^{\gamma_{i+1}}-1)}{P_{11}} + \frac{R_{12}(d_{12}^{\varepsilon_1-\gamma_{i+1}}-1)}{P_{12}}, \dots, \frac{R_{n1}d_{12}^{\varepsilon_1-\gamma_{i+1}}(d_{n1}^{\gamma_{i+1}}-1)}{P_{n1}} + \right. \\ \left. + \frac{R_{n2}(d_{n2}^{\varepsilon_1-\gamma_{i+1}}-1)}{P_{n2}} \right), & \text{при } \gamma_{i+1} \leq \varepsilon_1 < 1. \end{cases} \quad (44)$$

Модуляционная характеристика и уравнение замыкания не зависят от переменности параметров непрерывной части и определяются уравнениями (30) или (32), образуя совместно с (40) математическую модель замкнутой системы.

Выводы

Рассмотренные методы описания замкнутой системы с широтно-импульсной модуляцией позволяют исследовать различные классы широтно-импульсных систем.

Наиболее универсальным является метод переменных состояния, с помощью которого возможно получение математических моделей широтно-импульсных систем первого рода с постоянными и синхронно меняющимися параметрами непрерывной части. Определяемые при этом разностные уравнения являются готовым алгоритмом для расчета процессов в замкнутых системах.

Для импульсных систем с неизменной непрерывной частью менее трудоемким является способ описания ПНЧ дискретной передаточной функцией.

При рассмотрении математических моделей использованы, главным образом применительно к системам с ШИМ-1, известные способы их нахождения, а также получены новые результаты.

1. Для систем с широтно-импульсной модуляцией первого рода получены уравнения ПНЧ для неравноотстоящих значений переменных состояния на двух соседних периодах дискретности. Наибольшая практическая значимость этих уравнений состоит в возможности их применения к системам с ШИМ-2 при учете закона модуляции второго рода.

2. Выведено правило формирования дискретной передаточной функции ПНЧ широтно-импульсной системы второго рода, позволяющее упростить получение математической модели замкнутой системы аналогично тому, как в системах с ШИМ-1. Это позволяет с помощью известных таблиц Z-преобразований получать рекуррентные соотношения для расчета переходных процессов в ШИС-2 относительно выходной координаты и проща, без выполнения матричных операций, находить уравнения состояния.

3. Выделен класс широтно-импульсных систем с коммутируемыми синхронно с управляющим воздействием параметров непрерывной части. Получены математические модели этих систем в форме уравнений состояния.

Литература

1. Александров Ф.И., Сиваков А.Р. Импульсные полупроводниковые преобразователи и стабилизаторы постоянного напряжения. Л.: Энергия. 2017. 188 с.
2. Борисов А.А., Краснов С.А., Нечай А.А. Технология блокчейн и проблемы ее применения в различных информационных системах // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». 2018. № 2. С. 63–67.
3. Ковальков В.К. Влияние входного фильтра на устойчивость процессов в импульсном стабилизаторе напряжения // Изв. вузов СССР. Приборостроение. 2016. № 11. С. 48–51.
4. Ковальков В.К., Соболев Л.Б. Расчет пульсаций в сглаживающих фильтрах импульсных преобразователей на ЦВМ / под ред. Ю.И. Конева. М.: Сов. радио. 1977. № 9. С. 131–137.
5. Лоскутов А.И., Дуников А.С., Артюшкин А.Б., Нечай А.А. Математическая модель системы символьной синхронизации наземной приемно-регистрирующей станции телеметрической информации в условиях флуктуаций амплитуды сигнала // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». 2017. № 1. С. 11–19.
6. Лучко С.В., Крыжановский В.И. Математические модели автоматических систем с широтно-импульсной модуляцией // Изв. вузов СССР. Приборостроение. 2015. № 8. С. 31.
7. Лучко С.В. Расчет импульсных и цифровых автоматических систем. Л., 2016. С. 146.
8. Львов Е.Л. Импульсные передаточные функции электрической цепей с полностью управляемыми ключами при питании от источников постоянного напряжения // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1982. № 2. С. 1361–1368.
9. Львов Е.Л. Импульсные передаточные функции электрической цепи с частично-управляемым ключами при питании от источников постоянного напряжения // Изв. вузов СССР. Электроника. 1982. С. 939–946.
10. Нечай А.А., Копьев А.И. Метод управляемого распределения ресурсов между ядрами процессора // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». 2018. № 2. С. 101–107.
11. Нечай А.А. Моделирование системы управления робототехническим комплексом ликвидации чрезвычайных ситуаций на основе многомерных копула-функций // Современные проблемы создания и эксплуатации вооружения, военной и специальной техники: сб. ст. III Всерос. науч.-практ. конф. 2016. С. 287–292.
12. Новиков А.Н., Нечай А.А., Малахов А.В. О подходе к обоснованию рациональной номенклатуры эталонной базы измерительных комплексов на основе нечетких моделей // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». 2017. № 1. С. 72–79.
13. Полончик О.А., Артюшкин А.Б., Нечай А.А., Полончик Е.О. Радиолокационные системы дистанционного зондирования земли на базе спутников со стабилизацией вращением // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». 2017. № 1. С. 35–41.
14. Свиначук А.А., Нечай А.А. Использование квантовых вычислений при выборе управленческого решения // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». 2018. № 2. С. 31–36.
15. Цыпкин Я.З. Частотные критерии абсолютной устойчивости нелинейных импульсных автоматических систем // Автоматика и телемеханика. 2016. Т. 25. № 3. С. 281–289.

Literatura

1. *Aleksandrov F.I., Sivakov A.R.* Impul'snye poluprovodnikovye preobrazovateli i stabilizatory postoyannogo napryazheniya. L.: Energiya. 2017. 188 s.
2. *Borisov A.A., Krasnov S.A., Nechay A.A.* Tekhnologiya blokcheyn i problemy ee primeneniya v razlichnykh informatsionnykh sistemakh // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2018. № 2. S. 63–67.
3. *Koval'kov V.K.* Vliyanie vkhodnogo fil'tra na ustoychivost' protsessov v impul'snom stabilizatore napryazheniya // Izv. vuzov SSSR. Priborostroenie. 2016. № 11. S. 48–51.
4. *Koval'kov V.K., Sobolev L.B.* Raschet pul'satsiy v sglazhivayushchikh fil'trakh impul'snykh preobrazovateley na TSVM / pod red. Yu.I. Koneva. M.: Sov. radio. 1977. № 9. S. 131–137.
5. *Loskutov A.I., Dunikov A.S., Artyushkin A.B., Nechay A.A.* Matematicheskaya model' sistemy simvol'noy sinkhronizatsii nazemnoy priemno-registrirovuyushchey stantsii telemetricheskoy informatsii v usloviyakh fluktuatsiy amplitudy signala // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2017. № 1. S. 11–19.
6. *Luchko S.V., Kryzhanovskiy V.I.* Matematicheskie modeli avtomaticheskikh sistem s shirotно-impul'snoy modulyatsiyey // Izv. vuzov SSSR. Priborostroenie. 2015. № 8. S. 31.
7. *Luchko S.V.* Raschet impul'snykh i tsifrovyykh avtomaticheskikh sistem. L., 2016. S. 146.
8. *L'vov E.L.* Impul'snye peredatochnye funktsii elektricheskoy tsepey s polnost'yu upravlyaemymi klyuchami pri pitanii ot istochnikov postoyannogo napryazheniya // Izv. vuzov SSSR. Elektromekhanika. 1982. № 2. S. 1361–1368.
9. *L'vov E.L.* Impul'snye peredatochnye funktsii elektricheskoy tsepi s chastichno-upravlyaemymi klyuchami pri pitanii ot istochnikov postoyannogo napryazheniya // Izv. vuzov SSSR. Elektronika. 1982. S. 939–946.
10. *Nechay A.A., Kop'ev A.I.* Metod upravlyaemogo raspredeleniya resursov mezhdru yadrami protsessora // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2018. № 2. S. 101–107.
11. *Nechay A.A.* Modelirovanie sistemy upravleniya robototekhnicheskim kompleksom likvidatsii chrezvychaynykh situatsiy na osnove mnogomernyykh kopula-funktsiy // Sovremennyye problemy sozdaniya i ekspluatatsii vooruzheniya, voennoy i spetsial'noy tekhniki: sb. st. III Vseros. nauch.-prakt. konf. 2016. S. 287–292.
12. *Novikov A.N., Nechay A.A., Malakhov A.V.* O podkhode k obosnovaniyu ratsional'noy nomenklatury etalonnoy bazy izmeritel'nykh kompleksov na osnove nechetkikh modeley // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2017. № 1. S. 72–79.
13. *Polonchik O.L., Artyushkin A.B., Nechay A.A., Polonchik E.O.* Radiolokatsionnye sistemy distantsionnogo zondirovaniya zemli na baze sputnikov so stabilizatsiyey vrashcheniem // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2017. № 1. S. 35–41.
14. *Svinarchuk A.A., Nechay A.A.* Ispol'zovanie kvantovykh vychisleniy pri vybore upravlencheskogo resheniya // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2018. № 2. S. 31–36.
15. *Tsyppkin Ya.Z.* Chastotnye kriterii absolyutnoy ustoychivosti nelineynykh impul'snykh avtomaticheskikh sistem // Avtomatika i telemekhanika. 2016. T. 25. № 3. S. 281–289.