

Е.А. Палкин¹
А.Е. Сергеев²

E.A. Palkin
A.E. Sergeev

ОСОБЕННОСТИ ФОКУСИРОВКИ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА СФЕРЕ

FOCUSING FEATURES OF SURFACE ACOUSTIC WAVES ON A SPHERE

В статье рассмотрены возможности геометрического описания распространения релеевских волн на сферической поверхности. Геометрическими объектами являются семейства лучей различной природы: «геометрооптические» лучи, соответствующие стационарным точкам фазовой функции в интегральном представлении волнового поля, и «дифракционные» лучи, источником которых являются граничные точки апертуры линейного излучателя. Анализ зон фокусировки лучей и их интерференции сопоставлен с прямым расчетом волнового поля.

Ключевые слова: лучевые семейства, криволинейный источник, апертурная фокусировка, фокусировка Лобачевского, сенсоры поверхностной акустической волны.

The possibilities of geometrical description for Reley's wave propagation along spherical surface are considered. The geometrical objects under consideration are the ray families of different nature: the geometrical optics rays, corresponding to the stationary points of the phase function in wave field integral presentation, and the diffraction rays, being produced by the terminal points of the line source aperture. The focusing regions and rays interference analysis is compared with the direct calculation of wave field structure.

Keywords: ray families, curved line source, aperture focusing, Lobachevsky's focusing, surface acoustic wave sensors.

1. Введение

В теории распространения волн принято считать, что в свободном, однородном, изотропном пространстве волны распространяются по прямой, направление которой задается нормалью к волновому фронту. Более того, часто пространство с указанными свойствами определяется именно по отношению к конкретному типу волн, распространяющихся прямолинейно с постоянной скоростью. Например, вакуум – это среда, в которой электромагнитная волна распространяется прямолинейно со скоростью «с», скоростью света. Всякое отклонение от этого условия трактуется как неоднородность (и/или анизотропность) среды распространения. Од-

нако такие модели работают только в пространствах нулевой кривизны. Поэтому, например, при объяснении эффекта отклонения светового пучка в гравитационных полях используют как модель эффективной неоднородной среды, так и модель пространств конечной кривизны геометрии Н.И. Лобачевского. Пространства конечной кривизны для моделей волнового распространения могут естественным образом возникать и на малых, по сравнению с космическими, масштабах, если исследуются поверхностные волны, распространяющиеся по $(n - 1)$ -мерным границам n -мерных объектов, погруженных в n -мерное пространство.

В данной работе рассматриваются особенности распространения поверхностных волн Релея на сфере [1–3] как простой пример пространства конечной кривизны. Геометрическое описание процесса распространения таких волн сводится к анализу лучевых семейств и их особенностей,

¹ Кандидат физико-математических наук, профессор, проректор по научной работе НОУ ВПО «Российский новый университет».

² Аспирант Московского физико-технического института (ГУ МФТИ).

отражающих не только «классические» волновые эффекты: дифракцию, интерференцию, фокусировку, – но и специфические эффекты, обусловленные «собственной кривизной» среды распространения.

Использование геометрических моделей дает простой инструмент для анализа многочисленных возможностей в изменении конфигурации источников поверхностных волн, зон неоднородностей, отклонений поверхности от идеальной формы и др. В частности, относительно просто проводить оптимизацию датчиков, работающих на эффекте распространения поверхностных акустических волн.

2. Лучевые семейства поверхностных акустических волн на сфере

Поле поверхностной волны (волны Релея), излучаемой криволинейным источником S на однородной сфере, может быть представлено в следующей интегральной форме:

$$U(\theta_1, \varphi_1, t_{ep}) = U_0 \operatorname{Re} \left[\exp(-ikV_R t_{ep}) \left[\int_{t_n}^{t_k} \frac{\exp(ikR\theta(t))}{\sqrt{\sin \theta(t)}} dl \right] \right], \quad (1)$$

где источник представляет собой кривую линию на сфере, заданную параметрически:

$$\begin{cases} \theta_0(t) \\ \varphi_0(t) \end{cases}, \quad t \in [t_n, t_k], \quad (2)$$

точка наблюдения Q определена координатами (θ_1, φ_1) на поверхности сферы (рис. 1). Здесь мы использовали интегральное представление для релеевской волны из [4], полученное для источника в виде отрезка дуги большого круга, модифицировав его для случая источника в виде произвольной кривой. U_0 – амплитудный множитель, заданный мощностью излучателя, V_R – фазовая скорость, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число поверхностной волны, t_{ep} – временная компонента и R – радиус сферы. Угол θ – центральный угол между элементом линейного источника S и точкой наблюдения $Q(\theta_1, \varphi_1)$, который из геометрии задачи задается как:

$$\theta(t) = \arccos(\cos \theta_0(t) \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0(t)) + \sin \theta_0(t) \sin \theta_1). \quad (3)$$

Обозначения углов в (1), (2) соответствуют рис. 1. Интегрирование в (1) ведется вдоль излучающей линии, начало и конец которой заданы угловыми координатами (θ_n, φ_n) и (θ_k, φ_k) . Источник расположен так, что пересекает точку $(\pi/2, 0)$ на сфере, а отсчет $\theta_0(t)$ производится от значения $\pi/2$.

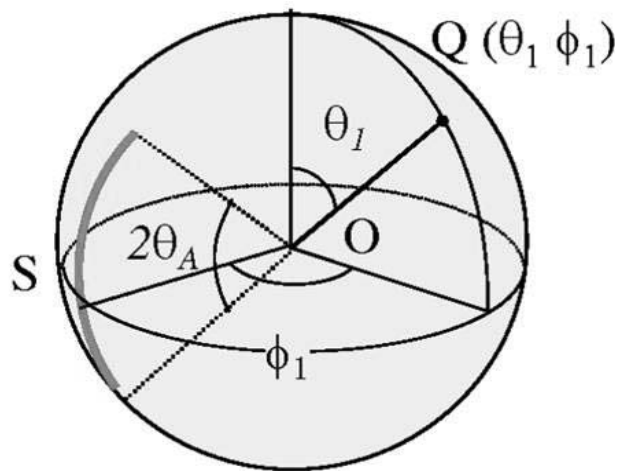


Рис. 1. Сфера и источник S на сфере

Элемент длины источника dl можно найти из соотношения:

$$dl = \arccos(\cos \theta_0 \cos(\theta_0 + \theta'_0 dt) \cos(\varphi_0 + \varphi'_0 dt - \varphi_0) + \sin \theta_0 \sin(\theta_0 + \theta'_0 dt)),$$

поэтому

$$dl = \sqrt{(\theta'_0)^2 + (\varphi'_0)^2 \cos^2 \theta_0} dt. \quad (4)$$

В итоге формула (1) примет вид:

$$U(\theta_1, \varphi_1, t_{ep}) = U_0 \operatorname{Re} \left[\exp(-ikV_R t_{ep}) \rightarrow \left[\int_{-t_n}^{t_k} \frac{\exp(ikR\theta(t))}{\sqrt{\sin \theta(t)}} \sqrt{\theta'_0{}^2 + \varphi'_0{}^2 \cos^2 \theta(t)} dt \right] \right]. \quad (5)$$

Основной вклад в значение интеграла (5) при $kR \gg 1$ дают следующие особые точки (см., например, [5–7]):

а) стационарные точки фазовой функции осциллирующего ядра, для которых

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = 0, \quad (6)$$

соответствуют геометрооптическим лучам на сфере;

б) концевые точки интеграла t_k и t_n , порождающие краевые лучи на сфере;

в) полюса, связанные с особенностями амплитуды поля элементарного источника в антиподных точках, где $\sin \theta(t) = 0$, т.е. $\theta = 0, \theta = \pi$.

Анализ геометрии этих особых точек позволяет относительно просто интерпретировать расчетные картины распределения поля релеевских волн, которые могут быть получены вычислением по формуле (5).

3. Моделирование лучевых структур и волнового поля «линейного» источника на поверхности сферы

Рассмотрим распространение поверхностных акустических волн (ПАВ), излучаемых источником, представляющим собой отрезок дуги большого круга. Условно его будем называть «линейным».

В свободном пространстве излучение линейного источника интерпретируется лучевой картиной, состоящей из семейства геооптических лучей, исходящих ортогонально источнику, и двух семейств краевых лучей, радиально расходящихся от концевых точек. Однако на сфере геооптические лучи представляют собой не параллельные прямые (в плоскости источника), а большие круги на сфере, которые имеют общую точку на угловом расстоянии $\theta = \pi/2$ (рис. 2). Таким образом, геооптические лучи, «параллельные» в окрестности источника, фокусируются на указанном расстоянии в соответствии с моделью Н.И. Лобачевского. Фокусировка данного типа обусловлена исключительно кривизной пространства, в котором распространяется волна, потому мы назовем такой тип фокусировки фокусировкой Лобачевского.

Концевые точки источника, генерирующие краевые лучи, определяют два лучевых семейства, которые в окрестности концевых точек имеют радиально расходящуюся структуру, но далее также формируют фокальные точки указанного типа в антиподах на расстоянии $\theta = \pi$.

Поскольку дифракционные лучи иллюстрируют дифракционную расходимость излучения, источником которого является источник конечной апертуры, то для поверхности сферы,

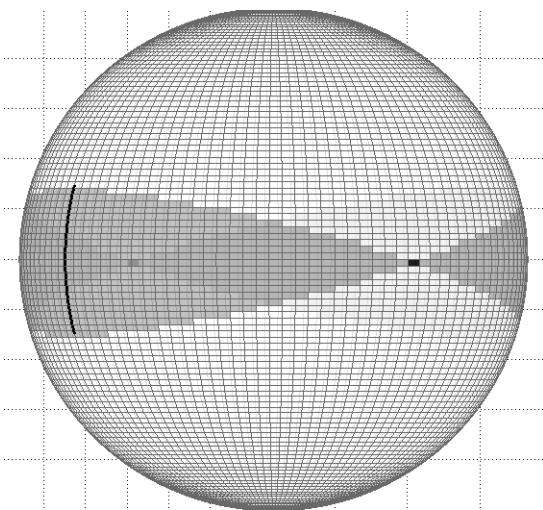


Рис. 2. Лучевая картина от линейного источника на сфере

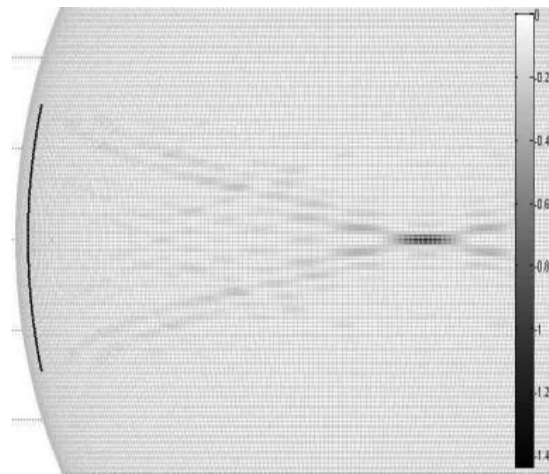


Рис. 3. Распределение энергии поля от линейного источника на сфере при $kR = 400$

вследствие эффекта фокусировки Лобачевского, можно компенсировать фокусировкой дифракционную расходимость, выбрав оптимальные размеры источника в зависимости от длины волны (см. [4; 8–10]).

Иллюстрацией лучевого описания распространения ПАВ, излучаемой «линейным» источником, служат рис. 2 и 3. На рис. 2 представлена лучевая картина, а на рис. 3 – структура волнового поля, определенная по формуле (5).

На рис. 2 в белой зоне присутствуют только два краевых луча, а геооптических лучей нет, в серой зоне – 1 геооптический луч и два краевых, в черной зоне – бесконечное число геооптических лучей (число лучей равно числу рассматриваемых элементов источника) и два краевых луча. В антиподе, при $\theta = \pi$, формируется точная копия лучевой структуры, которая имеет место в окрестности заданного источника.

Распределение энергии поля полностью согласуется с представлениями о фокусировке и интерференции рассмотренных лучевых семейств рис. 2. Результаты расчетов поля совпадают с результатами, полученными в [8] именно для такого вида источников.

4. Моделирование лучевых структур и волнового поля «криволинейного» источника на поверхности сферы

В случае, если источником поверхностных волн является линия переменной кривизны, на сфере возникают зоны фокусировки и дивергенции лучей, которые конкурируют с фокусировкой Лобачевского и дифракционной расходимостью. В итоге, как геометрическая структура лучевых семейств, так и суммарное волновое поле достаточно сложны для анализа. По этой причине вопросы оптимизации распределения поля ПАВ по

поверхности сферы эффективнее решаются с использованием геометрических лучевых моделей.

В качестве простейшего криволинейного источника ПАВ на сфере рассмотрим симметричный отрезок параболы. Геометрия лучевой картины представлена на рис. 4.

На рис. 4 в белой зоне присутствуют два крайних дифракционных луча, источниками которых являются концевые точки источника; в светло-серой зоне – только 1 геометрооптический луч и два крайних; в черной зоне (в центре) – 3 геометрооптических луча, организующих фокальную

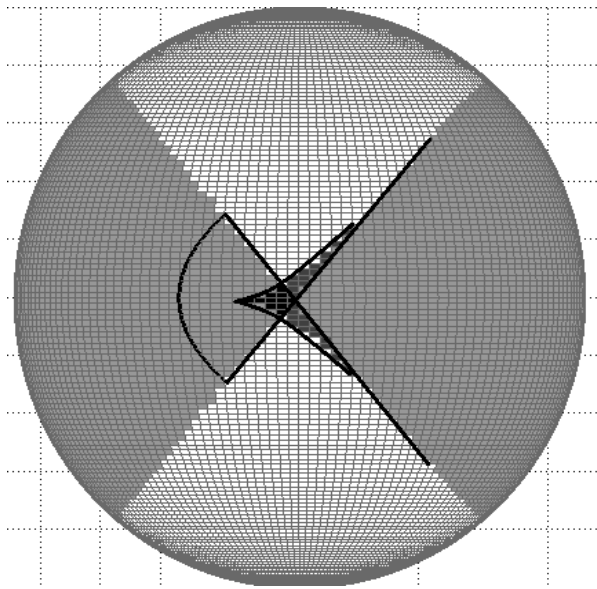


Рис. 4. Лучевая картина от параболического источника на сфере

структуру типа A_3 с ограничениями, обусловленными конечной апертурой источника, и два крайних; в темно-серой (симметрично снизу и сверху от оси симметрии рисунка) – 2 геометрооптических и два крайних, причем в точках сопряжения граничных геометрооптических лучей и каустических ветвей особенностей A_2 образуются особенности B_3 ; на границе светло-серой и белой зон имеем особенность B_2 (классификация указанных особенностей рассмотрена, например в [5–7]).

Лучевая картина и соответствующее распределение амплитуды волнового поля (рис. 5) аналогичны излучающей параболы на плоскости. Так же наблюдается особенность типа A_3 – «каустическое острие» и усиление поля на крайних особенностях: взаимодействие каустик типа A_2 и крайних лучей. Но, в отличие от плоского случая, на сфере наблюдается повторная симметричная фокусировка типа A_3 в антипode (геометрия этой особенности на рис. 4 не показана) и «повторная» фокусировка Лобачевского для дифракционных лучей в антиподных точках по отношению к крайним точкам источника.

5. Применение эффектов фокусировки и автоколлимации ПАВ на сфере

Особенности фокусировки ПАВ на сферической поверхности позволяют сформировать автоколлимированный (нерасходящийся) волновой пучок, способный многократно огигать сферу. Оценка размера линейного источника, обеспечивающего данное свойство, дается формулой [4; 9]:

$$\theta_{\text{онт.уст}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{kR}} = \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \quad (7)$$

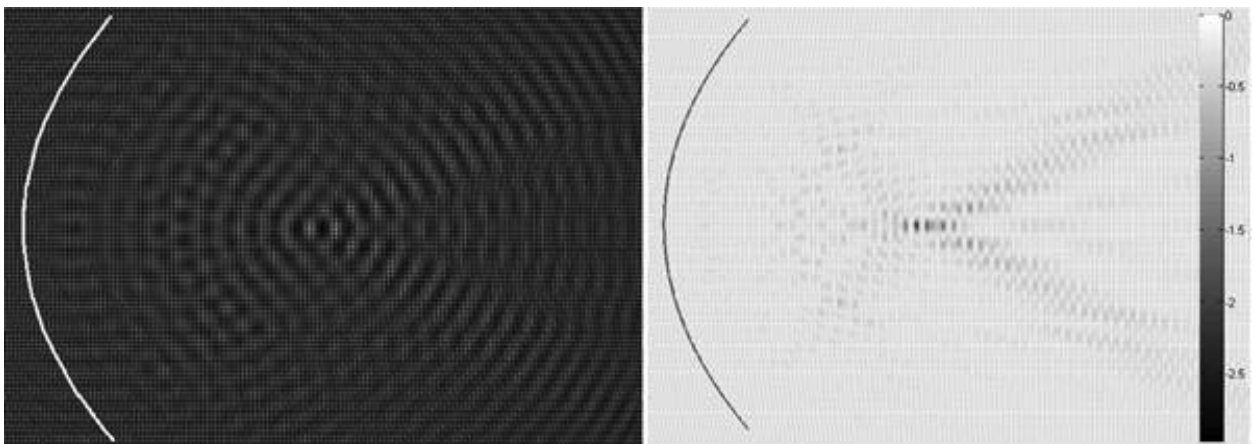


Рис. 5. Распределение амплитуд (слева) и энергии (справа) поля от параболического источника на сфере при $kR = 200$

Эта формула, в частности, показывает, что оптимальный угловой размер источника равен углу коллимации и уменьшается с увеличением волнового параметра kR . Другими словами, более тонкий коллимированный пучок формируется при большем значении kR .

Принцип действия шарового ПАВ-датчика следующий [4]. На экваторе непьезоэлектрического шара с тонкой пьезоэлектрической пленкой или же пьезоэлектрического монокристаллического шара размещена чувствительная пленка, на которую направляется коллимированный пучок. Генерация и детектирование волны после одного, двух и так далее проходов происходит с помощью встречно-штыревого преобразователя (ВШП). Скорость и ослабление ПАВ изменяются вследствие поглощения молекул детектируемого вещества чувствительной пленкой. Хотя для небольших концентраций такое изменение очень мало, из-за многократных (до 50 раз) проходов оно значительным образом усиливается. Это и позволяет детектировать небольшое линейное ослабление ПАВ.

Учитывая, что с помощью источника переменной кривизны можно создать также и зону фокусировки ПАВ в контролируемой области сферы, то, подбирая геометрию излучателя и геометрию и параметры чувствительной пленки, можно еще улучшить характеристики ПАВ-датчика.

Заключение

Таким образом, проведенное моделирование показывает эффективность применения методов геометрической оптики геометрической теории дифракции и для анализа особенностей распространения и фокусировки поверхностных волн. Данный подход обобщается на случаи ПАВ, распространяющихся на объектах эллипсоидальной формы, конической и цилиндрической форм, для задач распространения ПАВ на искривленных неоднородных поверхностях, а также на поверхностях, имеющих дефекты, являющиеся резкими (в масштабах длины волны) границами для

релеевских волн (например, разломы и трещины).

Литература

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твёрдых телах. – М., 1981. – С. 6–11, 63–86.
2. Петрашень Г.И. Задача Релея для поверхностных волн в случае сферы // ДАН СССР. – М., 1946. – С. 52, 763–766.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М., 1965. – С. 202.
4. Yamanaka, Kazushi, Ishikawa, Satoru, Nakaso, Noritaka. Ultra multiple Round trips of Surface Acoustic Wave on Sphere Realizing Innovation of Gas Sensors // IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. – 2006. – V. 53. – № 4. – P. 793–799.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. – Казань: Каз.АИ, 1988. – 199 с.
6. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции: учебное пособие. – М.: МФТИ, 1999. – 134 с.
7. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых катастроф. – М.: РосНОУ, 2013. – 368 с.
8. Graves, Robert W. Simulating Seismic Wave Propagation in 3D Elastic Media Using Staggered-Grid Finite Differences // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1996. – 86. – 4. – Pp. 1091–1106.
9. Yusuke Tsukahara, Noritaka Nakaso, Hideo Cho. Observation of diffraction-free propagation of surface acoustic waves around a homogeneous isotropic solid sphere // Applied Physics Letters. – 2000. – 77. – 18. – Pp. 2926–2928.
10. Clorennec, D., Royer, D. Investigation of surface acoustic wave propagation on a sphere using laser ultrasonics // Applied Physics Letters. – 2004. – 85. – 12. – Pp. 2435–2437.