УДК 004.89.6

Н.А. Белова[1]

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

N.A. Belova

# MATHEMATICAL SIMULATION OF A SOLITON SOLUTIONS OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

Нелинейное уравнение Шредингера, как и уравнение Кортевега-де Фриза имеет широкую распространенность при описании волн в различных областях физики. Это уравнение было предложено в 1926 г. Э. Шредингером (Эрвин Рудольф Йозеф Александр Шредингер (12.08.1887 – 04.01.1961) – австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1933). Член ряда академий наук мира, в том числе иностранный член Академии наук СССР (1934)) для анализа фундаментальных свойств квантовых систем [1]. Первоначально оно было использовано при описании взаимодействия внутриатомных частиц.

Э. Шредингеру принадлежит ряд фундаментальных результатов в области квантовой теории, которые легли в основу волновой механики: он сформулировал волновые уравнения (стационарное и зависящее от времени уравнения Шредингера), показал тождественность развитого им формализма и матричной механики, разработал волновую механическую теорию возмущений, получил решения ряда конкретных задач. Шредингер предложил оригинальную трактовку физического смысла волновой функции; в последующие годы неоднократно подвергал критике общепринятую копенгагенскую интерпретацию квантовой механики. Кроме того, он является автором множества работ в различных областях физики: статистической механике и термодинамике, физике диэлектриков, теории цвета, электродинамике, общей теории относительности и космологии; он предпринял несколько попыток построения единой теории поля.

Обобщенное, или нелинейное уравнение Шредингера описывает совокупность явлений в физике волновых процессов: эффект самофокусировки лазерного луча, распространение нелинейных волн в плазме. Нелинейное уравнение Шредингера принадлежит к специальному классу уравнений, которые можно точно решить, используя метод обратной задачи рассеяния (ОЗР). Захаров В.Е. и Шабат А.Б. использовали его для решения нелинейного уравнения Шредингера. Данный метод стал важным инструментом в математической физике. Метод ОЗР похож на метод преобразования Фурье, который обычно используют для решения нелинейных уравнений в частных производных. Значение поля входного

[1] Студентка АНО ВО «Российский новый университет».

излучения ($x = 0$) используется для получения начальных данных рассеяния, динамика которых вдоль оси $x$ легко находится из решения линейной задачи рассеяния [2].

Найдем простейшие решения нелинейного уравнения Шредингера:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v|u|^2 u \quad (1)$$

В данном уравнении *u (x, t)* – комплексно-значная функция, *t, x* – координаты времени и расстояния. Решение данного уравнения будем искать в виде произведения двух функций:

$$u = e^{ipx - i\chi t}V(z),\ z = x - c_0 t, \quad (2)$$

где $p$, $\chi$, $c_0$ – постоянные, *V(z)* – неизвестная функция. Подставим выражение (2) в уравнение (1), тогда:

$$\frac{d^2V}{dz^2} + i(2p + c_0)\frac{dV}{dz} - (\chi + p^2)V + vV^3 = 0. \quad (3)$$

При условии, что:

$$2p + c_0 = 0,\ \chi + p^2 = \alpha \quad (4)$$

из уравнения (3), получаем:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \alpha V - vV^3 \quad (5)$$

Решение уравнения (5) выражается через эллиптическую функцию Якоби:

$$u(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (6)$$

так как его можно представить в виде:

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = A + \alpha V^2 - \frac{v}{2}V^4. \quad (7)$$

При $A = 0$ и при условии, что $\alpha > 0$ и $v > 0$, получаем уединенную волну:

$$V(z) = \sqrt{\frac{2\alpha}{v}}\,\mathrm{ch}^{-1}\left(\sqrt{\alpha}(x - c_0 t)\right). \quad (8)$$

Таким образом, решение уравнения Шредингера (1), удовлетворяющее условиям, описанным выше, имеет вид:

$$u(x,t) = e^{i(px - \chi t)}\sqrt{\frac{2\alpha}{v}}ch^{-1}\left\{\sqrt{\alpha}(x - c_0 t)\right\}, \quad (9)$$

где $p = -\frac{c_0}{2}, \chi = \alpha - \frac{{c_0}^2}{4}$.

Построим и исследуем математическую модель решения нелинейного уравнения Шредингера в системе Wolfram Mathematica. Математическая 3D модель (рис. 1) и двухмерная модель (рис. 2) решения уравнения выглядит так:

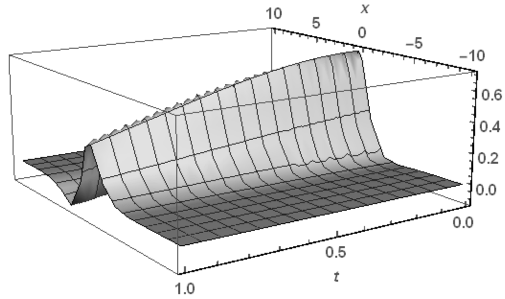


Рис. 1. График солитонного решения уравнения Шредингера, при параметрах: $t \in [0, 1]$ и $x \in [-10, 10]$

График функции $u(x,t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{v}}ch\left[\sqrt{\alpha}(x - c_0 t)\right]^{-1}$ построен при $t$ от 0 до 1 и $x$ от –10 до 10, соответственно, где $t$ – координата времени, α и $v$ – произвольные константы (при $\alpha = 1$ и $v = 2$).

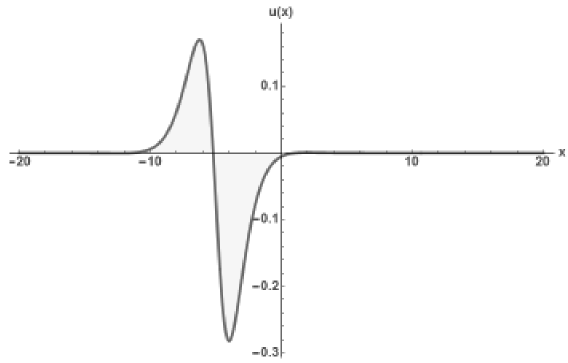


Рис. 2. График солитонного решения уравнения Шредингера в 2D, при параметрах: $t \in [0, 10]$ и $x \in [-20, 20]$

При увеличении масштаба координаты $t$ до 10, до 20, до 40, и до 100, математическая модель выглядит следующим образом:

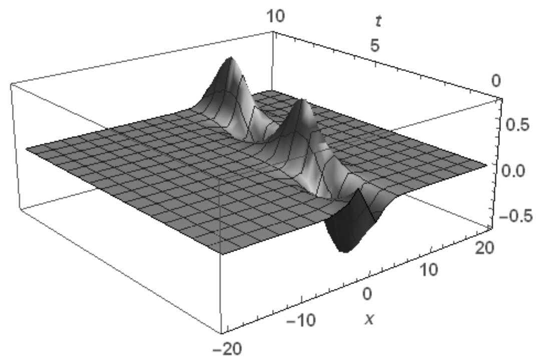


Рис. 3. График солитонного решения уравнения Шредингера при параметрах: $t \in [0, 10]$ и $x \in [-20, 20]$

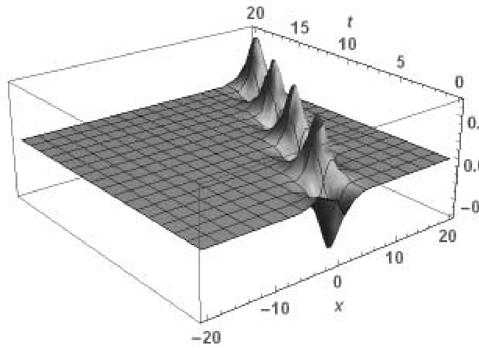


Рис. 4. График солитонного решения
уравнения Шредингера
при параметрах: $t \in [0, 20]$ и $x \in [-20, 20]$

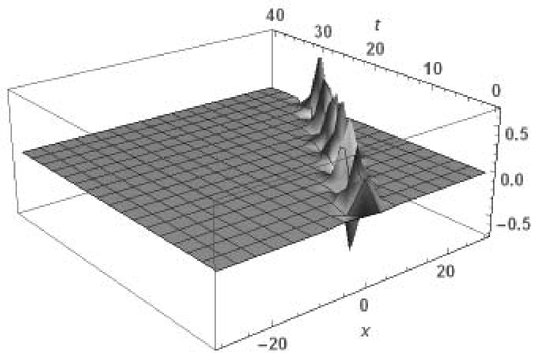


Рис. 5. График солитонного решения
уравнения Шредингера
при параметрах: $t \in [0, 40]$ и $x \in [-30, 30]$

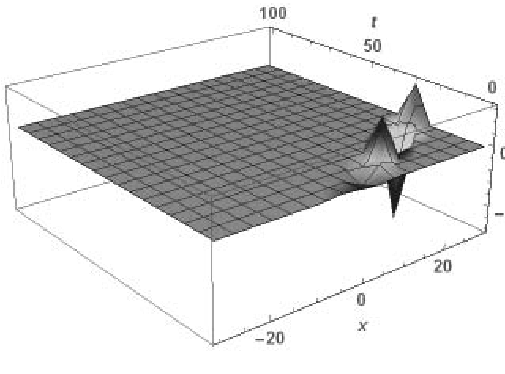


Рис. 6. График солитонного решения
уравнения Шредингера
при параметрах: $t \in [0, 100]$ и $x \in [-30, 30]$

Анализ данных графиков показывает, что при увеличении времени $t$, огибающая перемещается в пространстве с постоянной скоростью.

Для графического изображения в Wolfram Mathematica комплексного решения уравнения Шредингера представим:

1) график абсолютного значения решения:

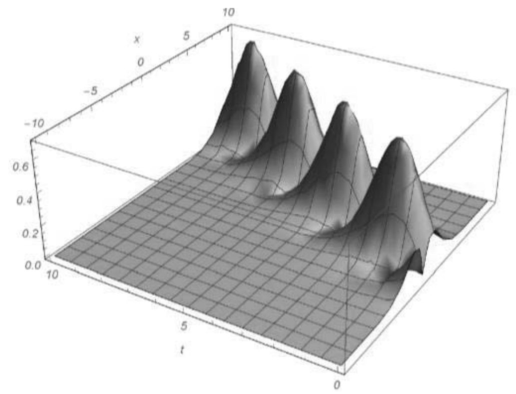

Рис. 7. График решения нелинейного
уравнения при абсолютных значениях,
при $t \in [0, 10]$ и $x \in [-10, 10]$

2) график действительной части комплексного решения:

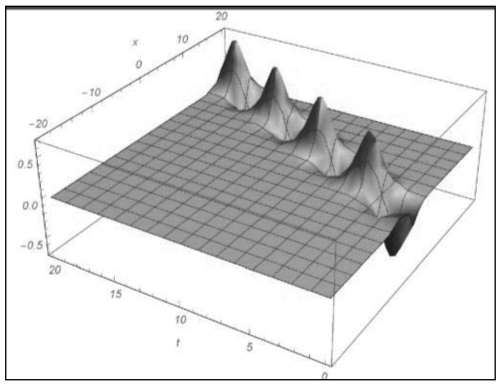

Рис. 8. График решения нелинейного
уравнения при действительных значениях,
при $t \in [0, 10]$ и $x \in [-20, 20]$

3) график мнимой части комплексного решения:

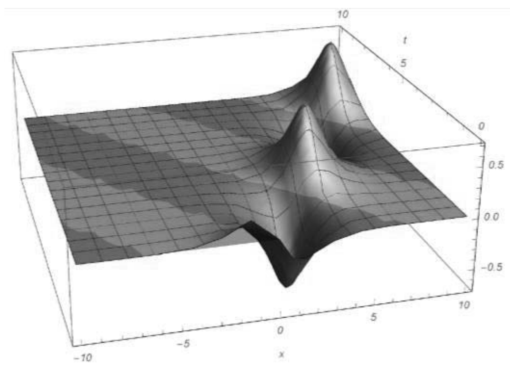

Рис. 9. График мнимой части решения
нелинейного уравнения,
при $t \in [0, 10]$ и $x \in [-10, 10]$

Рассмотрим поведение квазисолитонного решения для нелинейного уравнения Шредингера, заменив солитонное решение похожей функцией. В случае выбора функции $u(x) = e^{\frac{-x^2}{4}}$ график абсолютных значений решения при граничных значениях $x$ [–15, 15] показан на рис. 10. При изменении координаты $t$ квазисолитонное решение расплывается по оси $x$ и остается на месте.

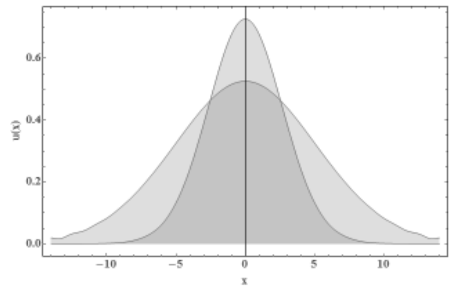


Рис. 10. График солитонного решения при $x$ [–15, 15]

Для получения начальных данных рассеивания построили график с начальными условиями при $t = 0$. На рис. 11 изображен модуль солитонного решения одного солитота, который движется по оси $x$ и не меняет своих размеров.

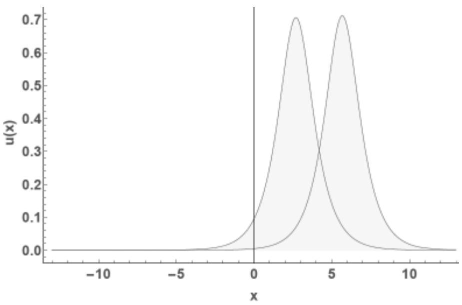


Рис. 11. График солитонного решения нелинейного уравнения Шредингера (9) при (Abs($u^2$)), $t \in$ [2.7, 5.7] и $x \in$ [–13, 13]

На рис. 12 показана действительная часть решения нелинейного уравнения Шредингера.

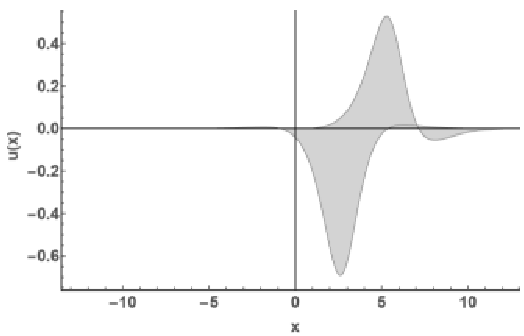


Рис.12. График солитонного решения нелинейного уравнения Шредингера для действительных значений (Re($u^2$)), $t \in$ [2.7, 5.7] и $x \in$ [–13, 13]

На рис. 13 показана мнимая часть решения нелинейного уравнения Шредингера.

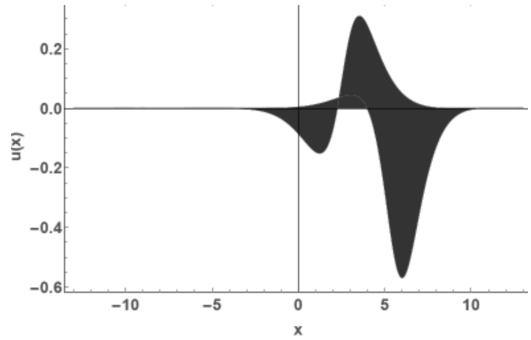


Рис. 13. График солитонного решения нелинейного уравнения Шредингера для мнимых значений (Im($u^2$)), $t \in$ [2.7, 5.7] и $x \in$ [–13,13]

Групповые солитоны, которые описываются нелинейным уравнением Шредингера, находят разнообразное применение в нелинейной оптике, поскольку они могут использоваться при передаче информации в волоконно-оптических линиях связи. Это одно из перспективных направлений применения солитонов.

**Литература**


1. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. – М. : МИФИ, 2008. – 352 с.
2. Новокшенов В.Ю. Введение в теорию солитонов. – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. – 96 с.
3. Ощепков А.Ю. Теория солитонов. Математическое описание и физические приложения. – Пермь : Перм. ун-т, 2007. – 100 с.
4. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. – М. : Физматлит, 2010.