

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН
В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАЗМЕ
С УЧЕТОМ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ
ЗЕМЛИ И ИОНОСФЕРНЫХ СЛОЕВMATHEMATICAL MODELING OF WAVE
PROPAGATION IN A NON-STATIONARY
PLASMA IN VIEW OF CURVATURE
OF THE EARTH'S SURFACE
AND IONOSPHERIC LAYERS

На основе бихарактеристической системы уравнений в сферической системе координат выполнено математическое моделирование распространения радиоволн декаметрового диапазона в нестационарной ионосфере с учетом кривизны поверхности Земли и ионосферных слоев. Рассмотрено распространение обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн в условиях быстрого образования спорадического слоя, построены проекции лучей и компонент волнового вектора в сферической системе координат, исследованы зависимости частоты сигнала от группового времени и широты.

Ключевые слова: бихарактеристики, моделирование, обыкновенная волна, необыкновенная волна, распространение, каустики, волновые катастрофы, групповое время, нестационарная ионосфера.

On a basis of the bi-characteristic system of equations in spherical system of coordinates the mathematical modeling of radiowave propagation of a decimeter range in a non-stationary ionosphere is executed in view of curvature of a surface of the Earth and ionospheric layers. The propagation of ordinary and extraordinary electromagnetic waves in conditions of fast formation of a sporadic layer is considered. The ray projections and component of a wave vector in spherical system of coordinates are constructed, the dependences of frequency of a signal on group time and latitude are investigated.

Keywords: bicharacteristics, modeling, ordinary wave, extraordinary wave, propagation, caustics, wave catastrophes, group time, non-stationary ionosphere.

Настоящая работа посвящена распространению радиоволн декаметрового диапазона в ионосфере Земли. В отличие от [1–11], в данной работе учтена кривизна поверхности Земли и ионосферных слоев. Рассмотрена нестационарная модель однослойной ионосферы, в которой предусматривается образование за очень короткое время (несколько долей секунды) дополнительного спорадического слоя:

¹ Доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета ИСиКТ АНО ВО «Российский новый университет».

² Заместитель декана факультета ИСиКТ АНО ВО «Российский новый университет».

³ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-02-04206-а).

$$N(\vec{r}) = N_0 \left\{ \exp \left[- \left(\frac{r - R_z - z_{01}}{z_{m_1}} \right)^2 \right] + \beta t \exp \left[- \left(\frac{r - R_z - z_{02}}{z_{m_2}} \right)^2 \right] \right\}, \quad (1)$$

где N_0 – электронная концентрация в максимуме слоя F2 в начальный момент времени, z_{01} – высота максимума слоя F2 над поверхностью Земли, z_{m_1} – условная полутолщина слоя F2, β – коэффициент, характеризующий скорость ионизации спорадического слоя, z_{02} – высота максимума спорадического слоя, z_{m_2} – условная полутолщина спорадического слоя, R_z – радиус Земли. В данной работе рассматривается распространение радиоволн в сферической системе координат, связанной с декартовой соотношениями:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

Здесь и декартова, и сферическая системы координат привязаны к центру Земли. В формулах (2) r – расстояние от центра Земли до точки наблюдения, φ – долгота, а $\theta = -\theta_s + \pi/2$, где θ_s – широта (знак «+» – северная, знак «-» – южная). При выполнении расчетов предполагалось, что: $N_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$, $z_{m_1} = 100 \text{ км}$, $z_{o_1} = 300 \text{ км}$, $z_{m_2} = 10 \text{ км}$, $z_{o_2} = 200 \text{ км}$, $R_z = 6378 \text{ км}$, $\beta = 100$.

Известно (см., например, [1; 7–11]), что эффективная диэлектрическая проницаемость в анизотропной плазме имеет вид:

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4\nu(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}}, \quad (3)$$

где знак «+» соответствует обыкновенной волне, а знак «-» – необыкновенной. В формуле (3) введены обозначения:

$$\nu = \frac{4\pi e^2 N(\vec{r})}{m_e \omega^2} \quad (4)$$

– величина, пропорциональная квадрату плазменной частоты, и

$$u = \left(\frac{eH}{m_e c \omega} \right)^2 \quad (5)$$

– величина, пропорциональная квадрату гиро-частоты. В выражениях (4) и (5) $\omega = 2\pi f$ – круговая частота, $c = 2,997925 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$ – скорость света, $e = 4,8029 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ}$ – заряд электрона, $m_e = 9,108 \cdot 10^{-28} \text{ г}$ – масса электрона, H – величина магнитного поля Земли.

Входящий в формулу (3) угол α между внешним магнитным полем Земли \vec{H} и волновым вектором \vec{k} определяется как

$$\cos^2 \alpha = \frac{(H_x k_x + H_y k_y + H_z k_z)^2}{H^2 k^2}. \quad (6)$$

Собственно знание величины угла излишне. Для формулы (3) достаточно знать квадрат косинуса этого угла. В настоящей работе предполагалось, что амплитуда магнитного поля постоянная ($H = 0,36 \text{ Э}$), а ориентация напряжённости магнитного поля относительно локальной системы координат задается двумя постоянными углами γ и ψ :

$$\begin{aligned} H_x &= H \cos \gamma \cos \psi, & H_y &= H \cos \gamma \sin \psi, \\ H_z &= H \sin \gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

При вычислениях предполагалось, что $\gamma = 45^\circ$, $\psi = 90^\circ$.

Известно (см., например, [6]; также [2–5]), что для построения лучевых траекторий в про-

извольной ортогональной системе координат бихарактеристическая система уравнений с гамильтонианом [12]:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^3 \frac{p_j^2}{h_j^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(t, \omega, \vec{q}, \vec{p}) \quad (8)$$

имеет вид:

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad \frac{d\tau}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad (9)$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ – обобщенный волновой вектор, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ – обобщенные координаты, h_1, h_2, h_3 – коэффициенты Ламе. Поделив уравнения системы (9) на последнее уравнение, получим бихарактеристическую систему

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{q}}{dt} &= -\frac{\partial \Gamma / \partial \vec{p}}{\partial \Gamma / \partial \omega} \equiv \vec{A}, & \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{\partial \Gamma / \partial \vec{q}}{\partial \Gamma / \partial \omega} \equiv \vec{B}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\partial \Gamma / \partial t}{\partial \Gamma / \partial \omega} \equiv D, \end{aligned} \quad (10)$$

параметром вдоль траектории, у которой является групповое время t . Если от обобщенного волнового вектора \vec{p} перейти к волновому вектору \vec{k} в криволинейной системе координат [12]

$$k_j = \frac{p_j}{h_j} \quad (11)$$

и подставить (11) в (10), то получим:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{A}, \quad \frac{dk_j}{dt} = \frac{1}{h_j} \left(B_j - k_j \sum_{i=1}^3 A_i \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \right),$$

$$j = 1, 2, 3; \quad \frac{d\omega}{dt} = D. \quad (12)$$

В сферической системе координат (2) $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, $k_1 = k_r$, $k_2 = k_\theta$, $k_3 = k_\varphi$, а коэффициенты Ламе имеют вид:

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\varphi = r \sin \theta. \quad (13)$$

Учитывая (13), дифференциальные уравнения для определения компонент волнового вектора несколько упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{dk_r}{dt} &= B_1, & \frac{dk_\theta}{dt} &= \frac{1}{r} (B_2 - k_\theta A_1), \\ \frac{dk_\varphi}{dt} &= \frac{1}{r \sin \theta} (B_3 - k_\varphi (A_1 \sin \theta + A_2 r \cos \theta)). \end{aligned} \quad (14)$$

Для определения лучевых траекторий в сферической системе координат необходимо дополнить бихарактеристическую систему (12) начальными условиями:

$$\begin{aligned}
 r(0) &= R_z, & \theta(0) &= \frac{\pi}{2} - \theta_{s0}, & \varphi(0) &= \varphi_0, \\
 \omega(0) &= f_0 / (2\pi), \\
 k_r(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \cos \eta, \\
 k_\theta(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta \cos \eta, \\
 k_\varphi(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \eta.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

В расчетах предполагалось, что $\eta = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varphi_0 = 1 \text{ рад} = 57,3 \text{ град}$, $\theta_{s0} = 0$, $f_0 = 13,75 \text{ МГц}$, угол ζ меняется в диапазоне от -89 до 89 градусов. Для вычисления угла α по формуле (6) необходимо знать компоненты вектора \vec{k} в декартовой системе координат. Их можно найти по формулам:

$$\begin{aligned}
 k_x &= k_r \sin \theta \cos \varphi + k_\theta \cos \theta \cos \varphi - k_\varphi \sin \varphi, \\
 k_y &= k_r \sin \theta \sin \varphi + k_\theta \cos \theta \sin \varphi - k_\varphi \cos \varphi, \\
 k_z &= k_r \cos \theta - k_\theta \sin \theta.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Рассмотрим результаты численного моделирования. На рис. 1а и 1б представлено лучевое распространение в плоскости (r, φ) , то есть в плоскости, перпендикулярной первоначальному направлению распространения радиоволны. Рис. 1а иллюстрирует лучевое распространение обыкновенной волны, рис. 1б – необыкновенной.

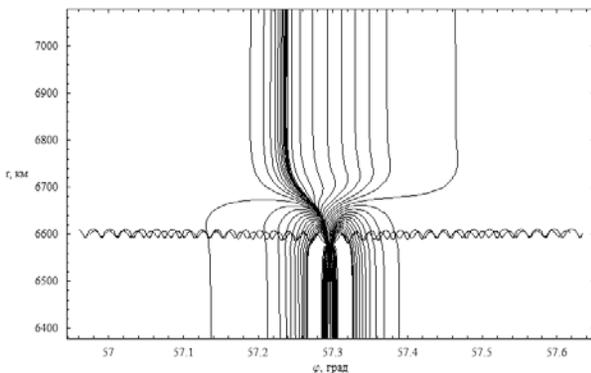


Рис. 1а

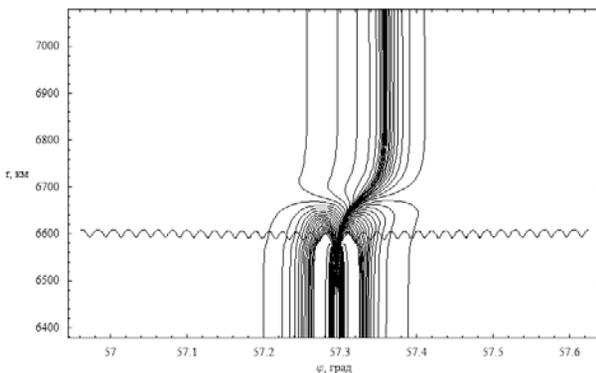


Рис. 1б

Лучевая структура в плоскости (r, φ) ; рис. 1а – обыкновенная волна; рис. 1б – необыкновенная волна

Хорошо видно, что часть лучевых траекторий проходит ионосферный слой, а другая часть отражается и возвращается на Землю. Некоторая часть лучевых траекторий распространяется в волноводе, возникающем между спорадическим и основным ионосферными слоями. Сравнивая рис. 1а и рис. 1б, находим, что рис. 1б является как бы зеркальным отображением рис. 1а относительно вертикальной оси, но более компактным. Кроме того, интенсивность излучения в межслоевом волноводе в случае обыкновенной волны значительно выше.

На рис. 2а и 2б показано распространение в плоскости (θ, φ) , то есть в координатах «широта – долгота». (Относительно широты угол θ сдвинут на 90 градусов.)

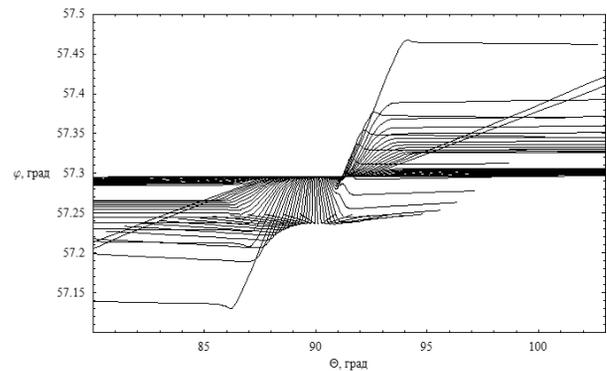


Рис. 2а

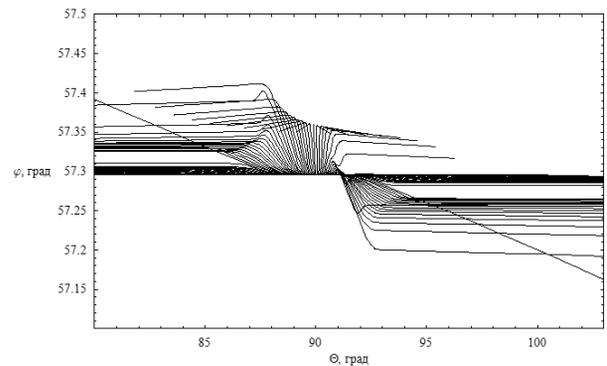


Рис. 2б

Лучевая структура в плоскости (θ, φ) ; рис. 2а – обыкновенная волна; рис. 2б – необыкновенная волна

Это как бы взгляд на лучевые траектории сверху. Как и в предыдущем случае, рис. 2а описывает распространение обыкновенной волны, рис. 2б – необыкновенной. Под действием магнитного поля Земли (внешнего по отношению к источнику излучения) лучевые траектории покидают плоскость первоначального распространения. Если они проходят ионосферу насквозь, то их суммарное отклонение стабилизируется. Если лучи отражаются от ионосферы, то после отражения они стремятся вернуться в плоскость

первоначального распространения. Особняком стоят лучи, распространяющиеся в волновом канале. На рис. 2а и 2б – это косые линии. Боковое отклонение таких лучей непрерывно увеличивается при прохождении волнового канала. Сопоставляя рис. 2а и 2б, видим, что рис. 2б является как бы компактным отражением рис. 2а относительно горизонтальной оси.

На рис. 3а и 3б представлены проекции лучевых траекторий в плоскости (r, θ) , то есть в плоскости первоначального распространения.

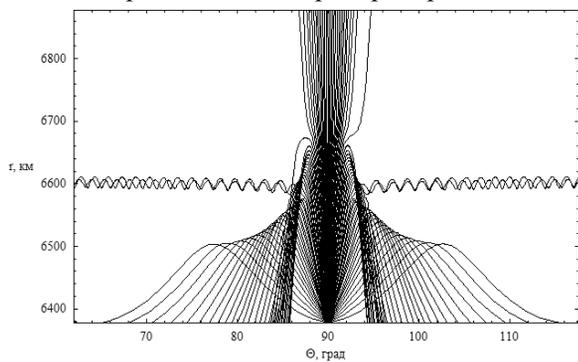


Рис. 3а

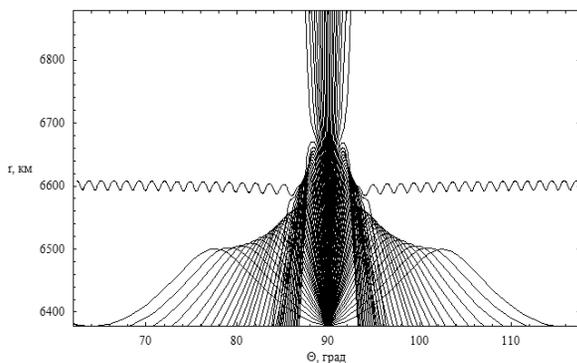


Рис. 3б

Лучевая структура в плоскости (r, θ) ;
рис. 3а – обыкновенная волна;
рис. 3б – необыкновенная волна

Рис. 3а описывает распространение обыкновенной волны, а рис. 3б – необыкновенной. В этой плоскости лучи образуют по два каустических острия (слева справа относительно источника излучения). Одно выше, а другое ниже волнового канала. Видно, что область многолучевости на поверхности Земли имеет ограниченный размер, область радиосвязи, образовавшаяся благодаря отражению от ионосферы, охватывает зона по 30 градусов. Хорошо видно распространение волны в ионосферном канале.

На рис. 4а и 4б показаны проекции бихарактеристик в плоскости (k_r, θ) . Рис. 4а соответствует обыкновенной волне, а рис. 4б – необыкновенной.

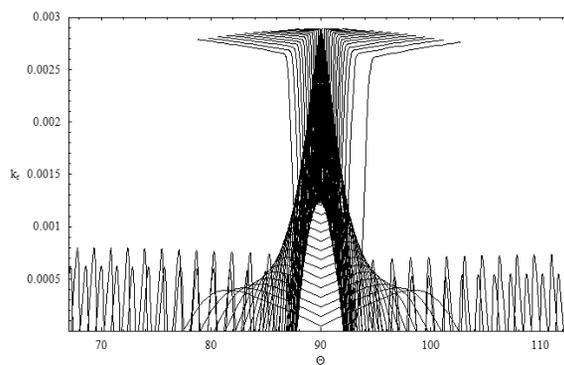


Рис. 4а

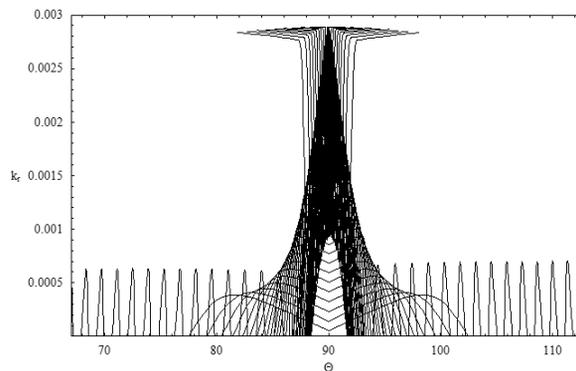


Рис. 4б

Лучевая структура в плоскости (k_r, θ) ;
рис. 4а – обыкновенная волна;
рис. 4б – необыкновенная волна

На рисунках можно выделить три группы кривых:

- 1) линии, поднимающиеся вверх с небольшим отклонением от вертикали, имеющие излом и образующие «шапочку» рисунка, соответствуют лучам, проходящим ионосферный слой;
- 2) линии, образующие пирамиду, соответствуют отраженным от ионосферы лучам;
- 3) осциллирующие кривые соответствуют волнам, распространяющимся в волноводе.

Как обычно, рисунок, соответствующий обыкновенной волне, выглядит компактнее.

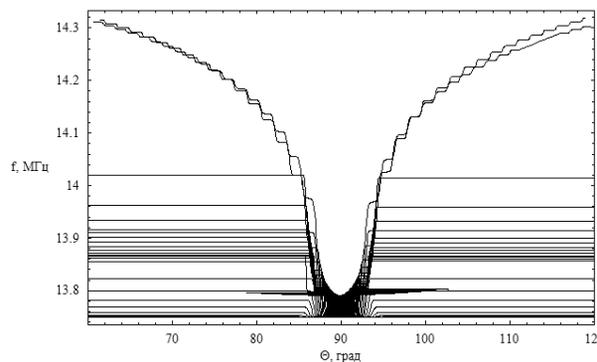


Рис. 5а

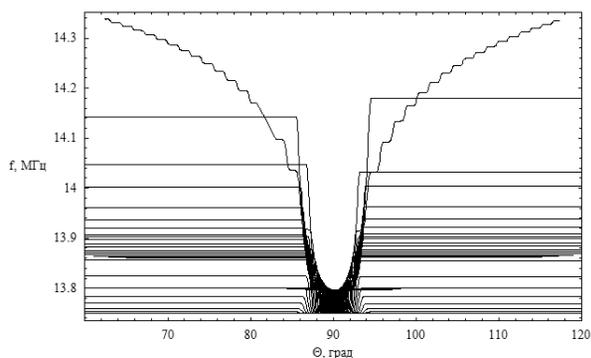


Рис. 5б

Зависимость частоты сигнала $f\omega$ от угла θ ;
рис. 5а – обыкновенная волна;
рис. 5б – необыкновенная волна

На рис. 5а и 5б показана зависимость частоты сигнала вдоль лучей от угла θ . Рис. 5а соответствует обыкновенной волне, а рис. 5б соответствует необыкновенной волне.

Для проходящих лучей изменение частоты распространения происходит на очень небольшом участке, соответствующем спорадическому слою, который образуется, в силу модели, очень быстро. На рисунках – это горизонтальные линии, отделяющиеся от общей образующей. Отраженные лучи заполняют нижнюю часть рисунков, а левую и правую ветви формируют лучи, распространяющиеся в волноводе.

На рис. 6а и 6б приведена зависимость частоты сигнала $f\omega$ от группового времени t . Рис. 6а соответствует обыкновенной волне, а рис. 6б – необыкновенной. В значительной степени рис. 6 повторяют правые половины рис. 5. Отметим, что наибольшие временные задержки при одной и той же дальности распространения характерны для сигналов, распространяющихся в ионосферном волноводе.

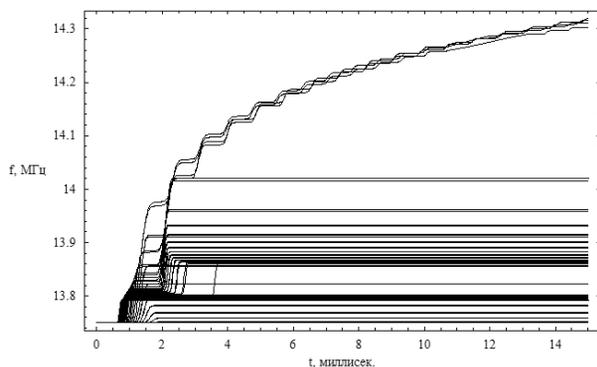


Рис. 6а

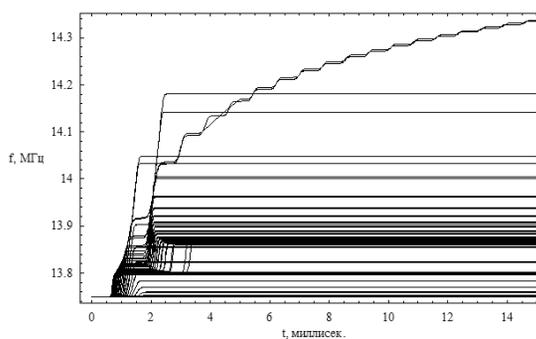


Рис. 6б

Зависимость частоты сигнала $f\omega$ от группового времени t ;
рис. 6а – обыкновенная волна;
рис. 6б – необыкновенная волна

В заключение приведем рис. 7 и 8, на которых изображены лучевые траектории в декартовой системе координат в соответствии с формулами 2.

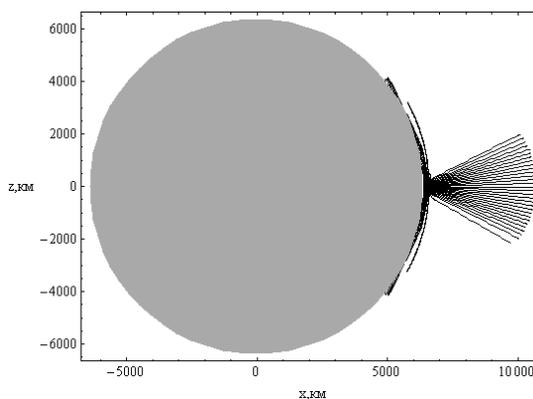


Рис. 7

Лучевая структура в плоскости (x, z) ; обыкновенная волна;
серый цвет – поверхность Земли

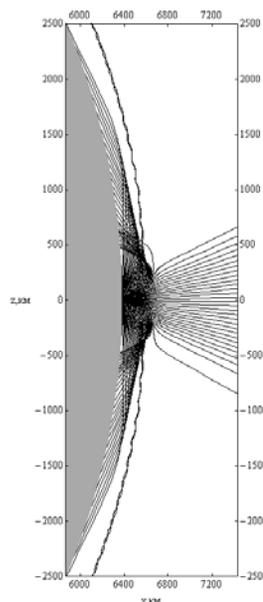


Рис. 8

Лучевая структура в плоскости (x, z) ;
фрагмент рис. 7;
серый цвет – поверхность Земли

Рис. 7 иллюстрирует общее положение источника излучения на поверхности Земли (экваторе), а рис. 8 показывает ход лучевых траекторий в плоскости (x, z) более детально.

Таким образом, в работе рассмотрены особенности распространения электромагнитного излучения в неоднородной, анизотропной, нестационарной ионосферной плазме при условии образования спорадического волнового возмущения. Расчеты проведены как в случае обыкновенной волны, так и для необыкновенной волны. При изучении лучевой структуры нами применялась бихарактеристическая система дифференциальных уравнений в сферических координатах, неизвестным в которой являлись сферические координаты луча, компоненты волнового вектора, а также частота (меняющаяся в условиях нестационарности среды распространения) и групповое время.

На рисунках видно, что при распространении формируются сложные каустические структуры, соответствующие волновым катастрофам [15–18], информация о которых представлена на сайте wavecat.rosnou.ru [19–21].

Литература

1. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере // Вестник Российского нового университета. – 2009. – Выпуск 2. Управление, вычислительная техника и информатика. – С. 7–14.
2. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Исследование распространения частотно-модулированных пространственно-временных сигналов в неоднородной анизотропной ионосфере // Вестник Российского нового университета. – 2013. – Выпуск 4. Управление, вычислительная техника и информатика. – С. 47–52.
3. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Распространение частотно-модулированных пространственно-временных радиоволн в анизотропной ионосфере // Труды XXIV Всероссийской научной конференции «Распространение радиоволн» (29 июня – 5 июля 2014, Иркутск). – Иркутск : ИСЗФ СО РАН, 2014. – Т. 4. – С. 126–129.
4. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. О распространении частотно-модулированного излучения в ионосферной плазме // Цивилизация знаний: российские реалии : труды XV Международной научной конференции (Москва, 25–26 апреля 2014 г.) – М. : РосНОУ, 2014. – Часть 2. – С. 436–438.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Моделирование распространения частотно-модулированного радиоизлучения в ионосферной плазме // V Всероссийские Армандовские чтения [Электронный ресурс]: Сверхширокополосные сигналы в радиолокации, связи и акустике : материалы V Всероссийской научной конференции (Муром, 26.06.–1.07.2015 г.). – Муром : Изд.-полиграфический центр МИ ВлГУ, 2015. – 237 с. – С. 131–137.
6. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Математическое моделирование распространения частотно-модулированных радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – 2015. – Т. 60. – № 10.
7. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57. – № 9. – С. 1028–1034.
8. Кирьянова К.С., Крюковский А.С. Особенности лучевого распространения радиоволн в ионосфере Земли // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2012. – № 11. – С. 25–28.
9. Кирьянова К.С., Крюковский А.С. Особенности лучевых траекторий в окрестности ионосферной локальной неоднородности с пониженной электронной концентрацией // Электромагнитные волны и электронные системы. – Радиотехника, 2012. – Т. 17. – № 9. – С. 42–47.
10. Кирьянова К.С., Крюковский А.С. Влияние локальных ионосферных неоднородностей на распространение декаметровых радиоволн // Физические основы приборостроения. – М. : НТЦ УП РАН, 2012. – Т. 1. – № 3. – С. 19–25.
11. Kiryanova, K.S., Kryukovsky, A.S., Lukin, D.S. Simulation of decametric wave propagation in the ionospheric plasma // Revista de Matematica. Teoria y Aplicaciones. – 2013. – V. 20. – № 1. – P. 21–34.
12. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М. : Наука, 1980. – 304 с.
13. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф : монография. – М. : РосНОУ, 2013. – 368 с.
14. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования основных волновых катастроф с корангом, равным двум //

Распространение и дифракция электромагнитных волн : междувед. сб. – М. : МФТИ, 1993. – С. 4–19.

17. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальная асимптотика быстроосциллирующих интегралов, описывающих волновое поле в областях фокусировки // Дифракция и распространение электромагнитных волн : междувед. сб. – М. : МФТИ, 1984. – С. 39–53.

18. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2013. – Т. 18. – № 8. – С. 18–23.

19. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Принципы разработки мультимедийной информационной системы «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» // Россия: перспективы прорыва в цивилизацию знаний. Информационные систе-

мы и компьютерные технологии : тезисы докл. V Межвузовской научной конференции Российского нового университета, 16–17.04.2004 г. – М. : РосНОУ, 2004. – С. 291–293.

20. Дорохина Т.В., Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Математическое компьютерное моделирование волновых полей типа катастроф // Распространение радиоволн : сборник докладов XXI Всероссийской научной конференции, Йошкар-Ола, 25–27 мая 2005 г. – Йошкар-Ола : МарГТУ, 2005. – Т. 2. – С. 336–339.

21. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Волкова Е.В., Костьо А.О., Павлова М.В. Создание информационной системы волновой теории катастроф и её применение при математическом моделировании // Вестник Российского нового университета. – 2007. – Выпуск 2. Управление, вычислительная техника и информатика. – С. 91–107.