

С.Т. Балаян<sup>1</sup>  
М. Кебир<sup>2</sup>  
Е.А. Тимонин<sup>3</sup>

S.T. Balanyan  
M. Kebir  
E.A. Timonin

**СТАБИЛИЗАЦИЯ УГЛОВОГО  
ПОЛОЖЕНИЯ РАКЕТЫ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ  
ПЛОСКОСТИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ  
ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ  
АВТОПИЛОТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ СРЕДЫ  
“MATLAB”**

**THE MISSILE ANGULAR RATE  
STABILIZATION IN THE VERTICAL  
PLANE BY DETERMINING THE OPTIMAL  
AUTOPILOT COEFFICIENTS USING THE  
“MATLAB” SOFTWARE**

*В данной статье предложен вариант выбора значений двух параметров контура стабилизации автопилота  $i_1$ ,  $i_2$  для некоторых фиксированных условий боевого применения ПКР в целях улучшения стабилизации полета.*

*Представлена модель контура стабилизации угла тангажа исследуемой ракеты. Осуществлен расчет ее аэродинамических характеристик.*

*На основе методов оптимизации функции нескольких переменных с помощью блока библиотеки Simulink Signal Constraint произведены подбор и оптимизация коэффициентов автопилота ракеты.*

*Использование рассчитанных коэффициентов автопилота позволит получить переходный процесс по углу тангажа с улучшенными параметрами стабилизации полета ракеты.*

**Ключевые слова:** стабилизация, автопилот, линейризация, переходный процесс, время регулирования.

*In this article, was proposed, a variant to choose the values of two parameters of the autopilot stabilization loop ( $i_1$ ,  $i_2$ ), for some fixed combat use conditions of the ASM, in order to improve the stabilization of the flight.*

*A model of the pitch angle stabilization loop of the proposed missile is presented. Then we proceed to find its aerodynamic characteristics.*

*Based on the optimization methods of the several variables functions and using the signal constraint block of the Simulink library, selection and optimization of the missile autopilot parameters ratios were made.*

*Using the calculated optimal coefficients of the missile autopilot allow obtaining transient process of pitch angle with performed parameters missile flight stabilization.*

**Keywords:** stabilization, autopilot, linearization, transient process, time of regulation.

**Введение**

Повышение боевых возможностей авиацион-

<sup>1</sup> Кандидат технических наук, доцент, доцент 82 кафедры авиационного оружия и эффективности боевого применения ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж).

© Балаян С.Т., 2017.

<sup>2</sup> Адъюнкт 82 кафедры авиационного оружия и эффективности боевого применения ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж),

© Кебир М., 2017.

<sup>3</sup> Оператор научной роты ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж).

© Тимонин Е.А., 2017.

ной противокорабельной ракеты (АПКР) связано как с совершенствованием конструкции или алгоритмов работы ее отдельных органов, так и с совершенствованием методов ее применения. В настоящее время использование ее реальных прототипов для исследования невыгодно с экономической точки зрения, поэтому и в замене идут методы моделирования технических систем. Одним из ведущих методов моделирования является математическое моделирование с использованием компьютерных и программных средств. В статье рассмотрен метод получения коэффициентов автопилота контура стабилизации угла тангажа, позволяющий иметь показатели качества пере-

ходного процесса, удовлетворяющие реальной ракете при некоторых фиксированных условиях боевого применения и для их использования в дальнейшем при исследовании.

**1. Определение передаточных функций контура управления ракетой**

В качестве прототипа выбрана авиационная противокорабельная ракета (АПКР) «Гарпун» (Harpoon) [1]. При определении АДХ используется методика, основанная на обобщении теоретических и экспериментальных исследований [2; 3]. Расчёт аэродинамических коэффициентов выполнен для числа Маха  $M = 0,85$ . Получены следующие значения аэродинамических коэффициентов:

$$c_{x0}^{\alpha} = 0,49, \quad c_y^{\alpha} = 0,366, \quad c_y^{\delta_2} = 0,1,$$

$$m_z^{\alpha} = -0,056, \quad m_z^{\delta_2} = -0,03, \quad m_z^{\bar{\omega}_z} = -1.$$

Точность полученных коэффициентов вполне достаточна для проведения исследований на ранних этапах разработки при постановке задач, сравнительном анализе схем, при исследовании чувствительности аэродинамики ракеты к параметрам и конструкторским решениям.

Система уравнений движения ракеты существенно упрощается, если удастся разделить ее на две подсистемы меньшего порядка, чем исходная. Первая система описывает движение ракеты в вертикальной плоскости, вторая – движение ракеты в горизонтальной плоскости и движение крена.

Задачи поиска оптимального управления ракетой решаются при помощи программной оптимизации линейной модели [4; 5].

Запишем уравнения продольного движения ракеты:

$$\left\{ \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= R \cos \alpha - G \sin \Theta - X; \\ mV \frac{d\Theta}{dt} &= R \sin \alpha - G \cos \Theta + Y; \\ I_{z1} \frac{d\omega_{z1}}{dt} &= M_{Rz1} + \frac{1}{2} m_{z1} \rho s V^2 l; \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_{z1}; \\ \frac{dx_0}{dt} &= V \cos \Theta; \\ \frac{dy_0}{dt} &= V \sin \Theta; \\ \sin \Theta &\approx \sin \vartheta - \alpha \cos \vartheta. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Здесь  $m$  – масса ракеты,  $V$  – скорость центра массы ракеты,  $R$  – сила тяги двигателя,  $G$  – сила тяжести,  $X, Y$  – проекции аэродинамической силы на оси скоростной системы координат (СК),  $M_{Rz1}$  – проекция момента тяги на ось  $z$ , связанной СК,

$M_{Az1} = \frac{1}{2} m_{z1} \rho s V^2 l$  – проекция аэродинамического момента на ось  $z$ , связанной СК,  $\Theta$  – угол возвышения,  $J_{z1}$  – момент инерции ракеты относительно оси  $z$ , связанной СК,  $\omega_{z1}$  – проекция вектора угловой скорости ракеты на ось  $z$ , связанной СК,  $\vartheta$  – угол тангажа,  $x_0, y_0, z_0$  – координаты центра масс ракеты в стартовой СК.

Масса  $m$  и момент инерции  $J_{z1}$  при работающем двигателе являются переменными величинами, закон изменения которых определяется известными функциями времени.

Последнее уравнение системы (1) после несложных преобразований можно писать в виде  $\Theta \approx \vartheta - \alpha$ . В уравнения (1) параметры бокового движения не входят, система может быть решена независимо от остальных уравнений движения ракеты.

Проведём линеаризацию уравнений движения ракеты. Пусть невозмущённое движение представляет собой участок движения АПКР на маршевом участке типовой траектории. В результате уравнения продольного движения ракеты в вариациях запишутся в виде:

$$\frac{d\Delta V}{dt} + a_{00}\Delta V + a_{02}\Delta\alpha + a_{04}\Delta\theta = -a_{03}\Delta\delta_g + a_{05}X_g;$$

$$a_{10}\Delta V + \frac{d\Delta\omega_{z1}}{dt} + a_{11}\Delta\omega_{z1} + a'_{12} \frac{d\Delta\alpha}{dt} + a_{12}\Delta\alpha = -a'_{13} \frac{d\Delta\delta_g}{dt} - a_{13}\Delta\delta_g + a_{15}M_{z1g};$$

$$a_{40}\Delta V + a_{42}\Delta\alpha + a_{44}\Delta\theta - \frac{d\Delta\theta}{dt} = -a_{43}\Delta\delta_g + a_{45}Y_g;$$

$$\frac{d\Delta\vartheta}{dt} - \Delta\omega_{z1} = 0; \quad \Delta\alpha + \Delta\theta - \Delta\vartheta = 0;$$

$$\frac{d\Delta x_0}{dt} + a_{50}\Delta V + a_{54}\Delta\theta = 0;$$

$$\frac{d\Delta y_0}{dt} + a_{60}\Delta V + a_{64}\Delta\theta = 0.$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  называют динамическими коэффициентами. Для расчета динамических коэффициентов выбранной АПКР используем

прием «замораживания» коэффициентов, когда соблюдается условие, что  $\frac{a_{ij}(t) - a_{ij}(t_k)}{a_{ij}(t_k)}$  не превосходит 20%.

При решении задачи стабилизации углового положения будем использовать упрощенные передаточные функции. При их выводе используем ряд допущений: не учитываются вариации скорости, не учитываются влияния силы тяжести и аэродинамического момента от запаздывания скоса потока. В уравнениях это соответствует  $a_{44} = 0$ ,  $a'_{12} = 0$ . Не будем учитывать коэффициенты  $a_{15}$  и  $a_{45}$ . Также будем считать, что подъемная сила в основном определяется углом атаки и слабо зависит от угла  $\delta_B$ , т.е. принимаем  $a_{43} = 0$ . Кроме того, можно также не рассматривать кинематические уравнения, описывающие изменение  $\Delta x_0$  и  $\Delta y_0$ , так как эти вариации не входят в остальные уравнения.

В результате сделанных упрощений получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\omega_z}{dt} &= -a_{11}\Delta\omega_z - a_{12}\Delta\alpha - a_{13}\Delta\delta_B; \\ \frac{d\Delta\theta}{dt} - a_{42}\Delta\alpha &= 0; \\ \frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \omega_z; \\ \Delta\vartheta - \Delta\theta &= \Delta\alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты выражаются через аэродинамические и инерционные характеристики ракеты следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{m_{z1}^{\omega z} \rho V S l^2}{2J_{z1}} = 0,265; \quad a_{12} = -\frac{m_{z1}^{\alpha} \rho S V^2 l}{2J_{z1}} = 0,854; \\ a_{13} &= -\frac{m_{z1}^{\delta_B} \rho V^2 S l}{2J_{z1}} = 0,458; \quad a_{42} = \frac{R + \frac{1}{2} C_y \rho S V^2}{mV} = 0,024. \end{aligned}$$

Найдем передаточные функции ракеты для параметров  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\theta$  по отношению к  $\Delta\delta_B$ . Для этого запишем систему (2) в преобразованном по Лапласу виде:

$$\begin{aligned} (p^2 + a_{11}p)\Delta\vartheta(p) + a_{12}\Delta\alpha(p) &= -a_{13}\Delta\delta_B(p); \\ p\Delta\theta(p) - a_{42}\Delta\alpha(p) &= 0; \\ \Delta\vartheta(p) - \Delta\alpha(p) - \Delta\theta(p) &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, найдем искомые переменные в зависимости от  $\Delta\delta_B(p)$ . Искомые передаточные функции:

$$W_{\delta_B}^{\vartheta}(p) = \frac{-a_{13}(a_{42} + p)}{p[p^2 + (a_{11} + a_{42})p + (a_{12} + a_{42}a_{11})]};$$

$$W_{\delta_B}^{\omega}(p) = \frac{-a_{13}a_{42}}{p[p^2 + (a_{11} + a_{42})p + (a_{12} + a_{42}a_{11})]}. \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{a_{13} \cdot a_{42}}{a_{12} + a_{11} \cdot a_{42}} = 0,013 \text{ – коэффициент усиления;} \\ T_c &= \frac{1}{\sqrt{a_{12} + a_{11} \cdot a_{42}}} = 1,078 \text{ – постоянная времени;} \\ T_{c1} &= \frac{1}{a_{42}} = 41 \text{ – скоростная постоянная времени;} \\ \xi_c &= \frac{a_{42} + a_{11}}{2\sqrt{a_{12} + a_{11} \cdot a_{42}}} = 0,156 \text{ – коэффициент демпфирования.} \end{aligned}$$

Запишем полученные выражения, введя передаточные функции типовых звеньев. С учетом полученных коэффициентов передаточные функции можно представить в виде:

$$\begin{aligned} W_{\delta_B}^{\omega}(p) &= \frac{k_c(T_{1c}p + 1)}{T_c^2 p^2 + 2\xi_c T_c p + 1}; \\ W_{\alpha\delta}(p) &= \frac{k_c T_{1c}}{T_c^2 p^2 + 2\xi_c T_c p + 1}; \\ W_{\theta\delta}(p) &= \frac{k_c}{p(T_c^2 p^2 + 2\xi_c T_c p + 1)}. \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. Моделирование контура стабилизации угла тангажа с помощью пакета программных средств matlab/Simulink

Используя полученные передаточные функции, представим систему стабилизации угла тангажа в виде структурной схемы с типовыми звеньями (см. рис. 1).

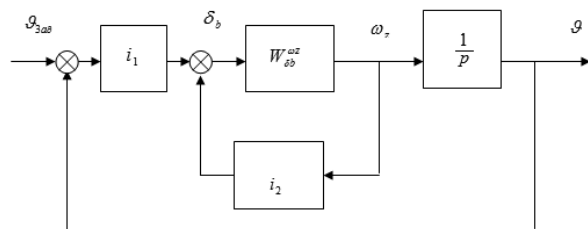


Рис. 1. Структурная схема системы стабилизации угла тангажа

Для расчета переходной характеристики системы составим модель работы системы в математическом пакете matlab/Simulink [6] (см. рис. 4).

При коэффициентах автопилота  $i1 = 1$  и  $i2 = 1$ , полученная переходная характеристика указана на рис. 2.

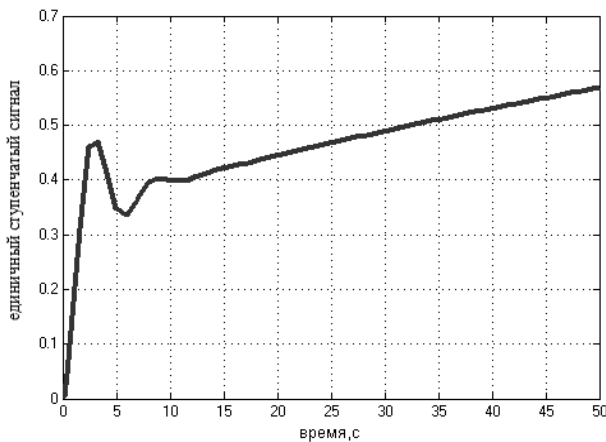


Рис. 2. Переходная характеристика угла тангажа при коэффициентах автопилота  $i1 = 1$  и  $i2 = 1$

Временем регулирования  $t_p$  называется минимальное время, по истечении которого отклонение выходной величины от установившегося значения  $h_\infty(t)$  не превышает некоторой заданной величины  $\Delta$ .

Если принять  $\Delta = 0,05 \cdot h_\infty(t) = 0,05$ , то из графика переходного процесса время регулирования системы  $t_p > 50$  с.

Перерегулирование определяют следующим образом [1]:  $\sigma = \frac{h_m - h_\infty}{h_\infty} \cdot 100\%$ , где  $h_m$  – максимальное значение переходной функции. В нашем случае  $\sigma = 0\%$ .

Полученный переходный процесс имеет большое время регулирования.

### 3. Подбор оптимальных коэффициентов автопилота

Подбор коэффициентов автопилота производим при помощи встроенных возможностей математического пакета Matlab/Simulink блока библиотеки Simulink Signal Constraint (см. рис. 4).

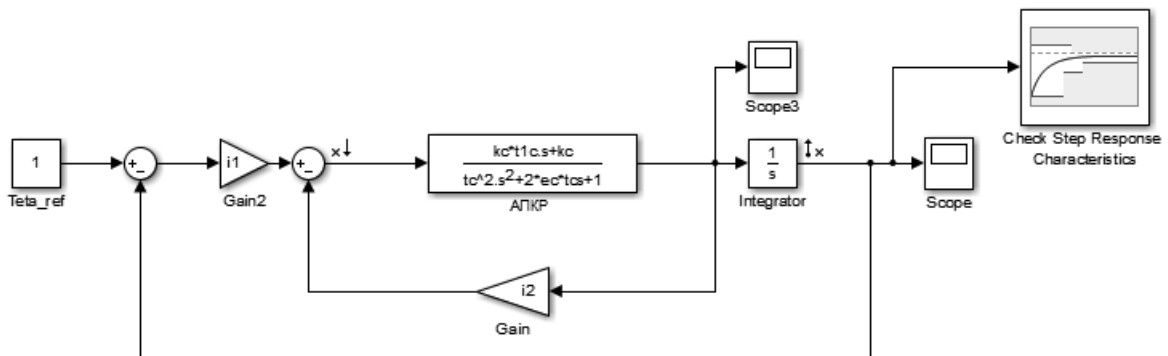


Рис. 4. Модель для подбора оптимальных коэффициентов системы стабилизации угла тангажа

Подберем коэффициенты автопилота  $i1 = 50$  и  $i2 = 30$  вручную таким образом, чтобы уменьшить время регулирования (см. рис. 3).

Полученный переходный процесс аperiodический (не колебательный). Из графика переходного процесса оценим время регулирования системы  $t_p = 2,22$  с. Перерегулирование  $\sigma = 0\%$ .

Показатели качества процесса хорошие, но при этом переходный процесс – не оптимальный. Используем данные коэффициенты автопилота  $i1 = 50$  и  $i2 = 30$  в качестве начальных приближений для поиска оптимальных коэффициентов обратной связи.

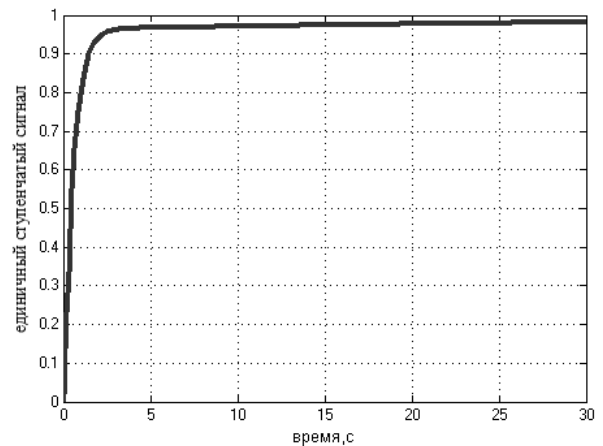


Рис. 3. Переходная характеристика угла тангажа при коэффициентах автопилота  $i1 = 50$  и  $i2 = 30$

Блок Signal Constraint позволяет проводить подбор и оптимизацию коэффициентов динамической системы, предъявляя необходимые требования к получаемым переходным процессам на основе методов оптимизации функции нескольких переменных.

Сначала необходимо произвести следующие настройки:

- задать область допустимых значений характеристик переходных процессов;
- задать начальные приближения коэффициентов системы управления, возможно задание области допустимых значений каждого из коэффициентов;
- задать метод и шаг интегрирования;
- выбрать метод подбора коэффициентов (в данном случае использовался градиентный метод минимизации невязок) и максимально допустимое число итераций.

После выполненных операций коэффициенты, удовлетворяющие области допустимых значений характеристик переходных процессов, подбираются автоматически. В нашем случае полученные коэффициенты  $i1 = 167,23$  и  $i2 = 29,849$ .

Нужно учитывать, что многие методы подбора коэффициентов очень чувствительны к начальному приближению. При оптимальных коэффициентах автопилота переходный процесс угла тангажа выглядит, как на рис. 5.

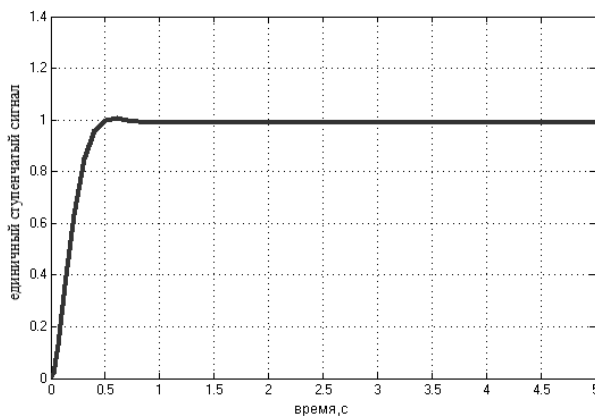


Рис. 5. Переходная характеристика угла тангажа при оптимальных коэффициентах автопилота  $i1 = 167,23$  и  $i2 = 29,849$

Оценим прямые показатели качества системы. Процесс астатический, но за время 5 секунд ошибка регулирования составляет  $\epsilon = 0,009$ , откуда можно сделать вывод, что даже при заданном угле тангажа  $\mathcal{G}_{зад} = 90^\circ$  ошибка регулирования составит не более  $\epsilon = 0,81$  градус. Время регулирования системы  $t_p = 0,4$  с. Перерегулирование  $\sigma = \frac{1,0056 - 1}{1} \cdot 100\% = 0,56\%$ . Переходная характеристика угловой скорости  $\omega_z$  представлена на рис. 6.

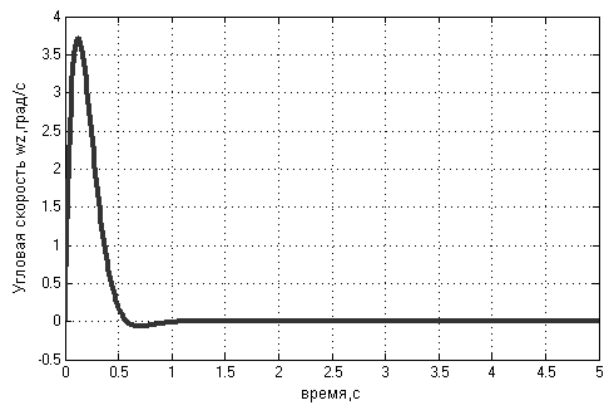


Рис. 6. Переходная характеристика угловой скорости  $\omega_z$  при оптимальных коэффициентах автопилота  $i1 = 167,23$  и  $i2 = 29,849$

Полученная переходная характеристика — малоколебательная, с малым перерегулированием, но достаточно большим временем регулирования. Поэтому возьмём показатели качества системы с полученными коэффициентами автопилота  $i1 = 167,23$  и  $i2 = 29,849$ . Откуда закон управления принимаем:

$$\begin{aligned} \delta_B &= i_1 \cdot (\mathcal{G}_{зад} - \mathcal{G}) - i_2 \cdot \omega_z = \\ &= 167,23 \cdot (\mathcal{G}_{зад} - \mathcal{G}) - 29,849 \cdot \omega_z, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathcal{G}_{зад}$  — заданное значение.

### Выводы

Таким образом, рассчитаны основные массогабаритные и аэродинамические характеристики выбранного в качестве прототипа АПКР.

Определены передаточные функции контура управления ракеты. Предложен вариант контура стабилизации угла тангажа. При помощи программных средств математического пакета matlab/Simulink найдены оптимальные коэффициенты автопилота, при котором переходный процесс угла тангажа имеет удовлетворяющие показатели качества (небольшое время регулирования и перерегулирование) управления ракетой. Это может быть использовано в дальнейшем для исследования процесса управления ракеты.

### Литература

1. Широкопад А.Б. История авиационного вооружения. — Мн. : Харвест, 1999. — 560 с.
2. Акимов Г.А., Бородавкин В.А. Аэродинамические характеристики летательных аппаратов. — СПб., 2003. — 157 с.
3. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета. — М. : Машиностроение, 1973. — 203 с.

4. Дмитриевский А.А. Прикладные задачи теории оптимального управления движением беспилотных летательных аппаратов. – М. : Машиностроение, 1978. – 327 с.

5. Кузнецов И.П., Паршин А.А., Халецкий Л.В., Шитов В.Ю. Формирование требований к динамическим характеристикам и базовым параметрам контуров управления рулевого при-

вода перспективного маневренного самолета // Труды МАИ. – 2014. – № 73. – <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=48472>

6. Щербаков В.С., Руппель А.А., Глушец В.А. Основы моделирования систем автоматического регулирования и электротехнических систем в среде matlab и simulink : учебное пособие. – Омск : Издательство СИБАДИ, 2003. – 61 с.