

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI: 10.18137/RNU.V9I187.22.01.P.003

УДК 519.85

П.В. Полухин

---

## ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР СТОХАСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРАЦИИ И СГЛАЖИВАНИЯ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

---

**Аннотация.** Процедуры фильтрации и сглаживания, построенные на основе фильтра Калмана, используются в инженерных и экономических задачах для оценки вектора состояния линейных динамических систем в условиях зашумленных данных. Калмановская фильтрация представляет собой важный раздел в теории проектирования систем управления. Эффективность, точность и быстродействие работы стохастических алгоритмов фильтрации и сглаживания во многом определяются используемыми аналитическими и численными алгоритмами, осуществляющими вычислительные процедуры. В рамках данной статьи предложено несколько численных алгоритмов, направленных на оптимизацию калмановских процедур фильтрации и сглаживания.

**Ключевые слова:** фильтр Калмана, матрица ковариаций, скрытая модель Маркова, ортогонализация Грамма – Шмидта, коэффициент усиления Калмана, метод Рауча – Тюнга – Штрибеля, алгоритм Штрассена.

P.V. Polukhin

---

## COMPUTATION OPTIMIZATION PROCEDURES FOR STOCHASTIC FILTERING AND SMOOTHING ALGORITHMS VIA KALMAN FILTER

---

**Abstract.** Filtering and smoothing procedures based on the Kalman filter are significantly used in engineering and economic tasks to evaluate the state vector of linear dynamic systems in noisy data conditions. Kalman filtering is an important section in the theory of control system design. The efficiency, accuracy and speed of stochastic filtering and smoothing algorithms are largely determined by the analytical and numerical algorithms used to perform computational procedures. Within the framework of this article, several numerical algorithms are proposed aimed at optimizing Kalman filtering and smoothing procedures.

**Keywords:** Kalman filter, covariance matrix, hidden Markov model, Gram-Schmidt orthogonalization, Kalman gain factor, Rauch-Tung-Striebel method, Strassen algorithm.

### Введение

К линейным динамическим системам (далее – ЛДС) относятся такие широко используемые в теории управления вероятностные модели, как скрытые модели Маркова (далее – СММ), динамические байесовские сети (далее – ДБС) и нейронные сети (далее – НС). На практике, как правило, возникают ЛДС с большим количеством оцениваемых параметров и состояний. В такой ситуации классические оценочные алгоритмы могут не давать требуемую точность вычислений. В связи с этим становится актуальной задача разработки модификаций классических оценочных алгоритмов, в частности фильтра Калмана, направленных на повышение точности вычислений. В рамках работы предложены алгоритмы, оптимизирующие процедуры фильтрации и сглаживания, построенные на ос-

**Полухин Павел Валерьевич**

кандидат технических наук, преподаватель кафедры математических методов исследования операций. Воронежский государственный университет, город Воронеж. Сфера научных интересов: машинное обучение; статистический и системный анализ данных; математическое и компьютерное моделирование; программные комплексы. Автор более 30 опубликованных научных работ.

Электронный адрес: alfa\_force@bk.ru

нове фильтра Калмана. В качестве ЛДС рассматриваются скрытые марковские модели. СММ моделируют марковские процессы, определяемые начальным распределением вероятностей и вероятностным представлением переходов между состояниями в момент времени  $t$  и момент времени  $t+1$ . Для фильтра Калмана СММ в работе предложены численные алгоритмы, направленные на повышение точности вычислений. В рамках процесса моделирования формируются состояния  $X_{t+k}$  и  $X_{t+k+1}$ , описывающие переменные двух смежных срезов, рассматривается случайный процесс с дискретным множеством состояний  $t = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ , процедура фильтрации СММ включает в себя одношаговое предсказание для момента  $t+k$ . В соответствии с алгоритмом дискретного фильтра Калмана переход для СММ из состояния  $X_t$  и  $X_{t+k}$  выполняется с добавлением шума, имеющего нормальную функцию распределения.

*Математическая модель фильтра Калмана*

Сначала кратко опишем семантику задания СММ. Она представляет собой вероятностную модель, предназначенную для моделирования стохастических процессов во времени и состоит из последовательности  $t = (t, t+1, \dots, t+k)$ -состояний (срезов), каждое из которых характеризуется множествами наблюдаемых переменных  $X_{t+k}$  и свидетельств  $E_{0:t+k}$ . Свидетельства поступают в виде непрерывного потока до текущего состояния  $t+k$ . Распределение вероятностей для свидетельств  $P(E_{t+k} | X_{t+k})$  носит непрерывный (гауссов) характер с математическим ожиданием  $\mathbb{E}_{t+k}$  и ковариационной матрицей  $Q_{t+k}$ .

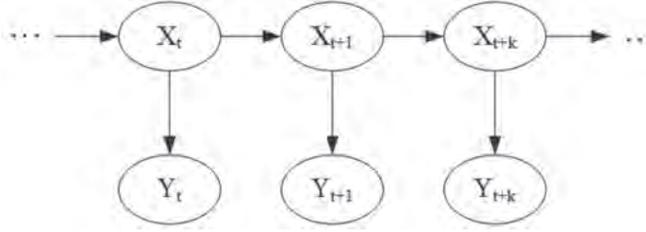
Для задания математической модели СММ необходимо определить следующие параметры: общее число состояний  $n$ , начальное распределение вероятностей  $P(X_t)$  для момента времени  $t=0$ , матрицу переходных вероятностей

$$T = (T_{ij}) = P(X_{t+k} = j | X_{t+k-1} = i)$$

и матрицу восприятия

$$S = (S_{ij}) = P(E_{t+k} = j | X_{t+k} = i).$$

В рамках статьи будут в основном рассматриваться СММ, представленные в виде байесовской сети прямого распространения (см. Рисунок 1).



**Рисунок 1.** Пример фрагмента скрытой модели Маркова из  $k$  срезов

Введем матрицу переходов и восприятия в соответствии с введенными ранее обозначениями [3]:

$$T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$t_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

$$L = (l_{ij}) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1m} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m1} & \cdots & l_{mm} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$l_{ij} = P(e_t = j | X_t = i).$$

Матрица переходных вероятностей  $T_k$  за  $k$  шагов  $t_{ij}^k = P(X_{t+k} = j | X_t = i)$  может быть получена из матрицы  $T$  в виде

$$T_k = T^k. \quad (3)$$

Полное совместное распределение по всем наблюдаемым переменным СММ, соответствующее состоянию  $t+k$ , будет иметь следующий вид при условии, что момент времени  $t$  принимается за нулевой [7]:

$$P(X_{0:k}, E_{1:k}) = P(X_0) \prod_{t=1}^{k-1} P(X_{t+1} | X_t) \prod_{t=0}^{k-1} P(E_{t+1} | X_{t+1}). \quad (4)$$

Сформулируем решение задач поиска распределения  $P(X_{t+k} | E_{t+k})$  с использованием теории фильтрации Калмана. Для рассматриваемой модели будем использовать дискретный фильтр Калмана. Определим структуру фильтра Калмана:

$$X_{t+1} = F_{t+1} X_t + w_t, \quad \mathbb{E}[w_\tau, w_t^T] = \begin{cases} Q_t, \tau = t, \\ 0, \tau \neq t, \end{cases} \quad (5)$$

$$E_{t+1} = H_{t+1} X_{t+1} + v_{t+1}, \quad \mathbb{E}[v_\tau, v_{t+1}^T] = \begin{cases} R_{t+1}, \tau = t+1, \\ 0, \tau \neq t+1, \end{cases} \quad (6)$$

где  $w_t, v_{t+1}$  – шумовые гауссовы процессы с соответствующими ковариационными матрицами  $Q_t$  и  $R_{t+1}$ ;  $F_{t+1}$  – матрица перехода;  $H_{t+1}$  – матрица измерений.

На основании введенных обозначений можно определить задачу фильтрации Калмана как задачу [5]

$$\begin{aligned} P(X_{t+1} | X_t) &= N(X_{t+1} | F_{t+1}X_t, Q_t), \\ P(E_{t+1} | X_{t+1}) &= N(E_{t+1} | H_{t+1}X_{t+1}, R_{t+1}). \end{aligned} \quad (7)$$

В соответствии с представлением (5) рассмотрим следующие выражения фильтрации:

$$\begin{aligned} P(X_{t+1} | E_{1:t}) &= N(X_{t+1} | \tilde{X}_{t+1}, \Phi_{t+1}), \\ P(E_{t+1} | E_{1:t}) &= N(E_{t+1} | H_{t+1}\tilde{X}_{t+1}, S_{t+1}), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\tilde{X}_{t+1}$  – одношаговое предсказание  $X_{t+1}$ ;  $\Phi_{t+1} = F_{t+1}\hat{\Phi}_t F_{t+1}^T + Q_{t+1}$  – ковариационная матрица, соответствующая переходу между состояниями  $X_t$  и  $X_{t+1}$ ;  $\hat{\Phi}_t$  – скорректированная на предыдущем шаге ковариационная матрица вектора состояний;  $S_{t+1} = H_{t+1}\Phi_{t+1}H_{t+1}^T + R_{t+1}$  – ковариационная матрица вектора ошибки.

Алгоритм фильтрации Калмана в общем случае включает в себе два этапа – предсказание и обновление. На первом этапе вычисляет предсказание для момента  $t+1$  в соответствии с матрицей перехода  $F_{t+1}$  и текущим состоянием системы  $X_t$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0 &= \mathbb{E}[X_0], \\ \Phi_0 &= \mathbb{E}\left[\left(X_0 - \mathbb{E}[X_0]\right)\left(X_0 - \mathbb{E}[X_0]\right)^T\right], \\ \tilde{X}_{t+1} &= F_{t+1}\tilde{X}_t, \\ \Phi_{t+1} &= F_{t+1}\mathbb{E}\left[\tilde{X}_t\tilde{X}_t^T\right]F_{t+1}^T + \mathbb{E}\left[w_n, w_t^T\right] = \\ &= F_{t+1}\hat{\Phi}_t F_{t+1}^T + Q_t, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\tilde{X}_0$  – оценка параметра  $X_0$ , соответствующая начальному моменту времени  $t=0$ .

Рассчитывается ковариационная матрица ошибок измерений как

$$S_{t+1} = H_{t+1}\Phi_{t+1}H_{t+1}^T + R_{t+1}, \quad (10)$$

и определяется оптимальное значение коэффициента усиления  $G_{t+1}$ , которое интерпретируется как степень доверия расчетной и эмпирической величинам. Выполняется процесса обновления значений параметров  $X_{t+1}$ . С учетом введения коэффициента усиления Калмана  $G_{t+1}$  и ошибки ковариации  $\Phi_{t+1}$ , вычисляемой в соответствии с выражением (10), выражение (10) с учетом введенного коэффициента усиления  $G_{t+1}$  перепишем в виде [6]

$$\tilde{X}_{t+1} = \tilde{X}_t + G_{t+1}\tilde{Y}_{t+1}, \quad (11)$$

где  $\tilde{Y}_{t+1}$  – вектор отклонения фактического значения от расчетного;

$$\begin{aligned} G_{t+1} &= \Phi_{t+1}^- H_{t+1} S_{t+1}^{-1}, \\ \Phi_{t+1} &= (I - G_{t+1} H_{t+1}) \Phi_{t+1}^-. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом выражений (9), (10) и (11) можно определить априорное распределение по всем переменным запроса, соответствующим состоянию  $X_{t+1}$  рассматриваемой модели [4]:

$$\begin{aligned} P(X_t, X_{t+1} | E_{1:t}) &= P(X_{t+1} | X_t) P(X_t | E_{1:t}) = \\ &= N(X_{t+1} | F_t X_t, Q_t) N(X_t | \tilde{X}_t, R_t), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P(X_{t+1}, E_{t+1} | E_{1:t}) &= N(E_{t+1} | X_{t+1}) N(X_{t+1} | E_{1:t}) = \\ &= N(E_{t+1} | H_{t+1} X_{t+1}, R_{t+1}) N(X_{t+1} | \tilde{X}_{t+1}, R_{t+1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим сохраняющее в условиях ошибок вычислений положительную определенность квадратно-корневое представление ковариационных матриц  $Q_t$  и  $R_t$ . Для этого необходимо определение квадратных корней  $A_t$  и  $A'_{t+1}$  для каждой их них. С учетом квадратно-корневого представления выражения (13) и (14) приведем к следующему виду:

$$P(X_t, X_{t+1} | E_{1:t}) = N(X_{t+1} | F_t X_t, A_t (A_t)^T) N(X_t | \tilde{X}_t, R_t), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} P(X_{t+1}, E_{t+1} | E_{1:t}) &= N(E_{t+1} | H_{t+1} X_{t+1}, A'_{t+1} (A'_{t+1})^T) \times \\ &\times N(X_{t+1} | \tilde{X}_{t+1}, R_{t+1}), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $Q_t = A_t (A_t)^T$ ,  $R_{t+1} = A'_{t+1} (A'_{t+1})^T$ .

Выражения (13) и (14) задают в общем случае алгоритм классического фильтрации Калмана и позволяют получить предсказание  $P(X_{t+k+1} | E_{1:t})$  для состояния  $t+k+1$ .

*Сглаживание Рауча – Тюнга – Штрибеля*

Для решения задачи сглаживания, направленной на получения распределения  $P(X_k | E_{1:t+k})$ , воспользуемся методом сглаживания Рауча – Тюнга – Штрибеля (далее – РТШ). Для этого сформулируем задачу сглаживания в терминах СММ [10]:

$$P(X_k | E_{1:t+k}) = N(X_t | \tilde{X}_t, \Phi_t). \quad (17)$$

Метод РТШ включает в себя на первом этапе стадию фильтрации Калмана для вычисления оценок параметров  $\tilde{X}_t^f$ . На втором этапе вычисляется  $\tilde{X}_{t+1}^s$  на основе обратной фильтрации. Определим выражение для оценки  $\tilde{X}_{t+1}^s$  в соответствии с выражением (5):

$$\tilde{X}_{t+1}^s = F_{t+1}^{-1} X_{t+1} - F_{t+1}^{-1} E_t', \quad (18)$$

где  $E_t'$  – свидетельства, поступившие на момент  $t+1$ ;  $F_{t+1}^{-1}$  – обратная матрица переходов между состояниями  $X_t$  и  $X_{t+1}$ .

Для удобства дальнейшего вывода введем следующие обозначения для сглаженных характеристик (сглаженные значения параметров выделяются значком  $^{s-}$ ):

$$\begin{aligned}
\Theta_t &= \Phi_t^{-1}, \\
\Theta_t^- &= \left( \Phi_t^{s^-} \right)^{-1}, \\
\tilde{z}_t &= \Theta_t \tilde{X}_t^s, \\
\tilde{z}_t^- &= \Theta_t^- \tilde{X}_t^{s^-}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Тогда, учитывая, что процессы  $w_t, v_{t+1}$  являются шумовыми и между ними отсутствует корреляция, выражение для ковариационной матрицы  $\Phi_{t+1}$ , соответствующей оценкам  $\tilde{X}_t$ , можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_{t+1} &= \left[ \left( \Phi_t^{s^-} \right)^{-1} + H^T R^{-1} H \right]^{-1} = \\
&= \left[ \left( \Phi_t^f \right)^{-1} + \left( \Phi_t^s \right)^{-1} \right]^{-1} = \left[ \left( \Phi_t^f \right)^{-1} + \Theta_t^- \right]^{-1},
\end{aligned} \tag{20}$$

где  $\Phi_t^f$  – матрица, полученная на стадии фильтрации.

Учитывая тождество Шермана – Моррисона – Вудбери (далее – ШМВ), перепишем выражение (20) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_{t+1} &= \Phi_t^f - \Phi_t^f \left( \Phi_t^{s^-} + \Phi_t^f \right)^{-1} \Phi_t^f = \\
&= \Phi_t^f - \Phi_t^f \Theta_t^- \left( I + \Phi_t^f \Theta_t^- \right) \Phi_t^f
\end{aligned} \tag{21}$$

По формуле (21) получаем значение матрицы  $\Phi_{t+1}$  при применении процедуры сглаживания. Равенство (21) позволяет сравнить элементы матрицы  $\Phi_t^f$ , полученные на стадии фильтрации, с элементами  $\Phi_t$  на стадии сглаживания. Выражение (21) позволяет получить значения оценок всех предшествующих состояний  $\tilde{X}_t$  через соответствующие значения матриц ковариаций  $\Phi_t^f$  и  $\Phi_t^{s^-}$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t &= \Phi_t \left( \left( \Phi_t^f \right)^{-1} \tilde{X}_t^f + \left( \Phi_t^{s^-} \right)^{-1} \tilde{X}_t^{s^-} \right), \\
\tilde{X}_t &= \tilde{X}_t^f + \left( \Phi_t \tilde{z}_t^- - G_t \tilde{X}_t^f \right), \\
G_t &= \Phi_t^f \Theta_t^- \left( I + \Phi_t^f \Theta_t^- \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{22}$$

где  $G_t$  – коэффициент сглаживания.

В процессе сглаживания РТШ решается задача обратной фильтрации, и рассчитываются значения ковариационных матриц  $\Phi_t^f$  и  $\Phi_t^{s^-}$ , соответствующих этапу фильтрации и сглаживания:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Phi_t^f + \Phi_t^{s^-} \right\} &= F_{t+1}^T \left\{ \Phi_{t+1}^{f-} + \Phi_{t+1}^s \right\}^{-1} F_{t+1} = \\
&= F_{t+1}^T \left\{ \Phi_{t+1}^{f-} + \left[ \Phi_{t+1}^{-1} - \left( \Phi_{t+1}^{f-} \right)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1} F_{t+1}
\end{aligned} \tag{23}$$

По аналогии с выражением (20), применив тождество ШМФ, упростим выражение (23) и получим следующее равенство:

$$\{\Phi_t^f + \Phi_t^{s-}\} = F_{t,t+1}^T (\Phi_{t+1}^{f-})^{-1} [\Phi_{t+1}^{f-} - \Phi_{t+1}] (\Phi_{t+1}^{f-})^{-1} F_{t,t+1}. \quad (24)$$

Учитывая выражения (21) и (22), получаем значение матрицы ковариаций  $\Phi_t$  :

$$\Phi_t = \Phi_t^f - \Phi_t^f F_{t+1}^T (\Phi_{t+1}^{f-})^{-1} (\Phi_{t+1}^{f-} - \Phi_{t+1}) (\Phi_{t+1}^{f-})^{-1} F_{t+1} \Phi_t^f. \quad (25)$$

Далее введем выражение для матрицы усиления  $A_t$  для момента времени  $t$  в виде следующего произведения:

$$A_t = \Phi_t^f F_{t+1}^T [\Phi_{t+1}^{f-}]^{-1}. \quad (26)$$

С учетом матрицы усилений  $A_t$  получим обобщенное выражение для расчета ковариационной матрицы  $\Phi_t$  [9]:

$$\Phi_t = \Phi_t^f - G_t (\Phi_{t+1}^{f-} - \Phi_{t+1}) A_t^T. \quad (27)$$

Матрица  $\Phi_t$  непосредственно зависит от матриц  $\Phi_t^f$  и  $\Phi_t^{f-}$ .

Обобщенное значение оценки  $\tilde{X}_t$  принимает вид

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_t^f + A_t (\tilde{X}_{t+1} - \tilde{X}_{t+1}^{f-}). \quad (28)$$

Из выражений (27) и (28) получаем полное описание процедуры сглаживания на основе метода РТШ; процедура носит рекурсивный характер. В связи с этим особое внимание стоит уделить определению начального отчета времени  $t = n$ . Исходное значение оценки  $\tilde{X}_n$  и ковариационной матрицы  $\Phi_n$ , характеризующее начало этапа фильтрации, будет иметь следующее значение, полученное на этапе фильтрации Калмана:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_n &= \tilde{X}_n^f, \\ \Phi_n &= \Phi_n^f, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\tilde{X}_n^f$  и  $\Phi_n^f$  соответствуют состоянию  $t = n$ .

В процессе выполнения фильтрации возникает необходимость постоянного вычисления ковариационных матриц шумов  $Q_t$  и  $R_t$  и коэффициента усиления  $G_{t+1}$ . Оптимизация матричных расчетов позволит повысить эффективность процедуры фильтрации. Рассмотрим применение квадратно-корневых алгоритмов на основе разложения Холецкого, а также ортогонализации Грамма – Шмидта (далее – ОГШ). Алгоритм вычисления значений матриц  $Q_t$  и  $R_t$  на основе разложения Холецкого записывается в виде

$$\begin{aligned} Q_{i,k} &= Q_{i,k} - L_{i,k} L_{jk}, \\ L_{i,j} &= \sqrt{Q_{jj}}, i = j, \\ L_{i,j} &= \frac{Q_{kj}}{L_{jj}}, i \neq j, \end{aligned} \quad (30)$$

где значения  $i, j$  и  $k$  для нижнего и верхнего треугольного разложения принимают значения  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $i = 1, 2, \dots, j$ ;  $k = 1, 2, \dots, j-1$  и  $j = m, m-1, \dots, 1$ ;  $i = j, j-1, \dots, 1$ ;  $k = j+1, \dots, m$  соответственно.

В матричном представлении разложение Холецкого можно переписать в виде верхнего (нижнего) разложения матрицы  $H$  :

$$H = \bar{L}D\bar{L}^T = UDU^T. \quad (31)$$

В выражении (31) треугольной матрицей  $\bar{L}$  или  $U$  будет являться матрица, содержащая единицы на главной диагонали. В соответствии с этим приведем выражение (30) к следующему виду:

$$\begin{aligned} Q_{i,k} &= Q_{i,k} - U_{i,k}D_{k,k}U_{j,k}, \\ D_{j,j} &= Q_{i,j}, U_{jj} = 1; i = j, \\ U_{ij} &= \frac{Q_{i,j}}{D_{j,j}}; i \neq j. \end{aligned} \quad (32)$$

Выражение (32) является более эффективным с точки зрения нахождения корней матриц  $H_{i,k}$ , так как исключает извлечение квадратных корней каждого из элементов матрицы для формирования положительно определенной матрицы  $L_{i,j}$ . Альтернативным подходом к оптимизации расчетов ковариационных матриц  $Q_t$  и  $R_t$  является использование ОГШ. Данный метод основывается на задании некоторого множества ортогональных векторов  $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$  с учетом того, что  $h' = (h_1, h_2, \dots, h_n)$  будут линейно независимы:

$$\begin{aligned} q_i^T q_i &= q_i^2 = 1, i = j, q \in \mathbb{R}_i, \\ q_i^T q_j &= 0, i \neq j \end{aligned} \quad (33)$$

С учетом того, что  $h'$  можно получить через произведение параметров  $q_j$  и  $b_{ij}$ , имеем

$$h' = \sum_{j=1}^n h_j b_{ij}. \quad (34)$$

Если матрица  $Q_t$  может быть представлена в виде совокупности ортогональных векторов  $q$ , запишем выражение ОГШ как

$$H = QL = [q_1, q_2, \dots, q_n] \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n2} & 1 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где  $L$  – матрица, задающая переход между базисами  $q$  и  $h'$ .

С учетом того, что  $Q_t$  – ортогональная матрица, и для нее справедливо выражение (35), получаем

$$Q^T Q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \begin{pmatrix} q_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & q_n^2 \end{pmatrix} = \text{diag}\{q_i^2\}. \quad (36)$$

Дополнительно к рассмотренным механизмам оптимизации могут быть использованы различные параллельные алгоритмы перемножения матриц.

Алгоритм Штрассена предполагает рекурсивное деление каждой из исходных матриц  $A$  и  $B$  размерностью  $n \times n$  на 4 блока. В таком случае данный метод накладывает одно ограничение, связанное с тем, что  $n$  должно быть четным.

На Рисунке 2 приведем диаграмму Штрассена для умножения матриц  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$ , имеющих размерность  $2 \times 2$ . Данная диаграмма отражает последовательность проведения операций сложения и умножения для каждого из элементов рассматриваемых матриц [1; 2].

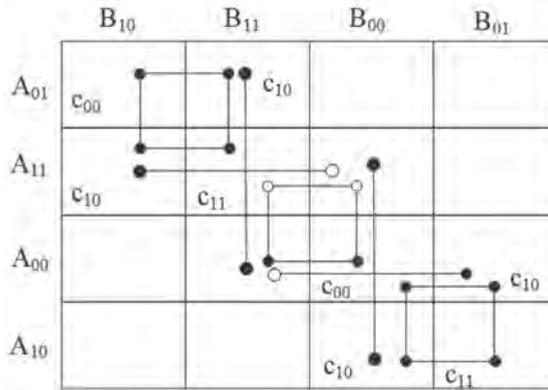


Рисунок 2. Диаграмма матричных операций Штрассена

Тогда вычисление произведения матриц  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  в соответствии с диаграммой Штрассена имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 m_0 &= A_{00}B_{00}, \\
 m_1 &= A_{01}B_{10}, \\
 m_2 &= (-A_{00} + A_{10} + A_{11})(B_{00} - B_{01} + B_{11}), \\
 m_3 &= (A_{00} - A_{10})(-B_{01} + B_{11}), \\
 m_4 &= (A_{10} + A_{11})(-B_{00} + B_{01}), \\
 m_5 &= (A_{00} + A_{01} - A_{10} - A_{11})B_{11}, \\
 m_6 &= A_{11}(-B_{00} + B_{01} + B_{10} - B_{11}).
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned}
 C_{00} &= m_0 + m_1, \\
 C_{01} &= m_0 + m_2 + m_4 + m_5, \\
 C_{10} &= m_0 + m_2 + m_3 + m_6, \\
 C_{11} &= m_0 + m_2 + m_3 + m_4.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

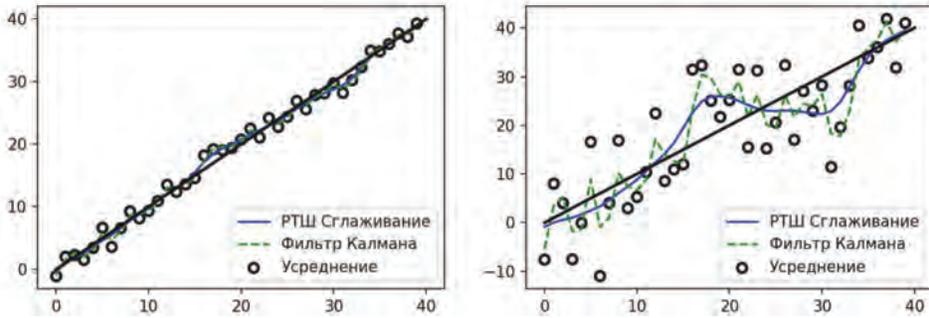
Из выражений (38) и (40) получаем, что для вычисления матриц  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  необходимо выполнить 7 операций умножений и 18 операций сложения.

*Вычислительный эксперимент*

Численные методы оптимизации позволяют в достаточной степени повысить интенсивность процессов фильтрации и сглаживания на основе фильтра Калмана. Для моделирования СММ, а также решения вероятностных задач фильтрации и сглаживания на основе фильтра Калмана и алгоритма РТШ разработан набор программных компонентов, реализующих данные алгоритмы. В рамках решения задач численной оптимизации используется алгоритм матричного умножения по методу Штрассена, а также применение ортогонализации Грамма – Шмидта. В работе рассматриваются процессы фильтрации и

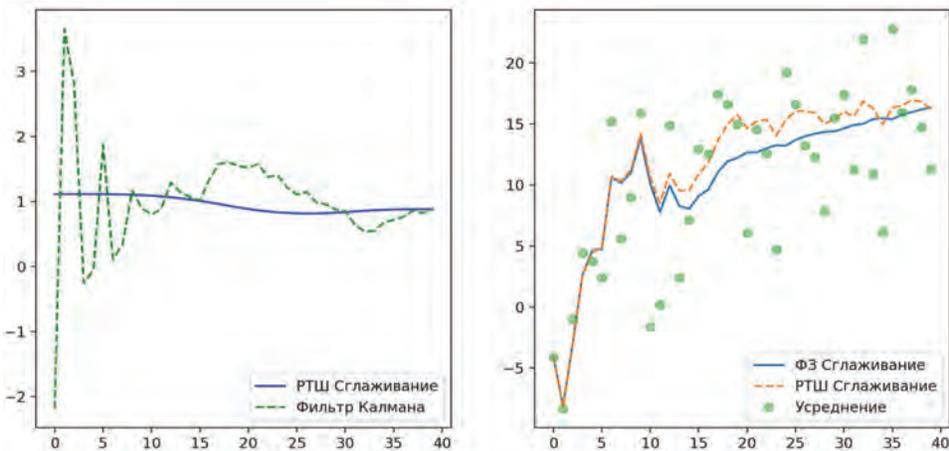
сглаживания для СММ, однако предложенные алгоритмы можно достаточно легко адаптировать для решения задач вероятностного вывода любой их описанных ранее ЛДС.

На Рисунке 3 представлены численные характеристики фильтра Калмана и РТШ при шумовых коэффициентах  $k=1$  и  $k=7$  для распределений  $w_t, v_{t+1}$ .



**Рисунок 3.** Сглаживание и фильтрация для модели СММ

Для оценки эффективности алгоритмов сглаживания на Рисунке 4 приведено сравнение РТШ с алгоритмом сглаживания с фиксированной задержкой (ФЗ).



**Рисунок 4.** Сравнение алгоритмов РТШ и сглаживания с фиксированной задержкой (ФЗ).

Скорость сходимости РТШ и фильтра Калмана

Приведенные графики показывают, что РТШ достаточно эффективно сглаживает разброс выборок, полученных на этапе фильтрации. В свою очередь, сравнение ФЗ сглаживания и РТШ сначала демонстрирует идентичность получаемых генераций, однако с ростом числа выборок применение РТШ алгоритма становится более предпочтительным. В случае непрерывных распределений ФЗ лучше использовать совместно со сглаживанием РТШ, в противном случае на выходе можно получить распределение с достаточно большим значением дисперсии  $\mathbb{E}(\tilde{X}_t)$ .

### Заключение

Представленные в работе численные методы и алгоритмы оптимизации процедур вероятностного вывода в ЛДС, построенных на основе фильтра Калмана, показывают свою эффективность. Приведенные алгоритмы наиболее применимы для непрерывных распределений, а именно в том случае, если шумы  $w_t, v_{t+1}$  представлены гауссовым распределением. Предложенные в работе расширенные алгоритмы фильтрации на основе  $LD$ ,  $UD$  и ОГШ позволяют повысить устойчивость фильтра к возникновению нелинейных ошибок, позволяя для ковариационных матриц  $\Phi_t^f$  и  $\Phi_t^{s-}$ , соответствующих матрице  $F_{t,t+1}$ , сохранять свойство симметричности и их положительной определенности на всем интервале принимаемых значений. Квадратно-корневой фильтр и фильтр на основе ОГШ позволяют исключить постоянную процедуру обновления  $\Phi_t^f$  и  $\Phi_t^{s-}$  на основе решения уравнения Рикатти.

Другой важной особенностью разработанных алгоритмов оптимизации является возможность их использования в параллельных вычислительных системах, позволяющих в значительной степени повысить интенсивность решения задач вероятностного вывода. Такой подход достигается за счет использования параллельных алгоритмов Штрассена и поблочного разделения операций генерирования шумовых распределений  $w_t, v_{t+1}$ .

Описанные алгоритмы могут быть использованы для решения широкого круга задач моделирования сложных стохастических процессов.

### Литература

1. Гергель В. Высокопроизводительные вычисления для многоядерных систем. М.: Изд-во Московского ун-та, 2010. 544 с.
2. Кормен Т. Алгоритмы. Построение и анализ. М.: Вильямс, 2019. 1328 с.
3. Azarnova T.V., Polukhin P.V., Bondarenko Yu.V., Kashirina I.L. (2018) Advanced hybrid stochastic dynamic Bayesian network inference algorithm development in the context of the web applications test execution. *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 973, Iss. 1, p. 012024.
4. Grewal M.S., Andrews S.M. (2001) Kalman filtering: Theory and practice using matlab. New York, Wiley, 401 p.
5. Haykin S. (2001) Kalman filtering and neural network. New York, Wiley, 284 p.
6. Kalman R.A. (1960) New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, no 82, Series D, pp. 35–45.
7. Koller D. (2009) Probabilistic graphical models. Principles and Techniques. Cambridge, MIT Press, 1328 p.
8. Lewis F.L. (2008) Optimal and robust estimation. Boca Raton, CRC Press, 523 p.
9. Murphy K.P. (2002) Machine learning a probabilistic perspective. Massachusetts, MIT Press, 1067 p.
10. Sarkka S. (2013) Bayesian Filtering and Smoothing. Cambridge, Cambridge University Press, 256 p.

### References

1. Gergel V. (2010) *Vysokoproizvoditelnye vychisleniya dlya mnogoyadernyh system* [High-performance computing for multi-agent systems]. Moscow, Moscow University Press, 544 p. (in Russian).
2. Cormen T., Leiserson C., Rivest R. (2019) *Algoritmy. Postroenie i analiz* [Algorithms. Construction and analysis]. Moscow, Vilyams Publishing, 1328 p. (in Russian).

3. Azarnova T.V., Polukhin P.V., Bondarenko Yu.V., Kashirina I.L. (2018) Advanced hybrid stochastic dynamic Bayesian network inference algorithm development in the context of the web applications test execution. *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 973, Iss. 1, p. 012024.
4. Grewal M.S., Andrews S.M. (2001) Kalman filtering: Theory and practice using matlab. New York, Wiley, 401 p.
5. Haykin S. (2001) Kalman filtering and neural network. New York, Wiley, 284 p.
6. Kalman R.A. (1960) New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, no 82, Series D, pp. 35–45.
7. Koller D. (2009) Probabilistic graphical models. Principles and Techniques. Cambridge, MIT Press, 1328 p.
8. Lewis F.L. (2008) Optimal and robust estimation. Boca Raton, CRC Press, 523 p.
9. Murphy K.P. (2002) Machine learning a probabilistic perspective. Massachusetts, MIT Press, 1067 p.
10. Sarkka S. (2013) Bayesian Filtering and Smoothing. Cambridge, Cambridge University Press, 256 p.