# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI: 10.25586/RNU.V9187.21.03.P.003 УДК 004.3.12

А.В. Бондарев, В.Н. Ефанов

## СТАТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МНОГОПОЛЮСНИКА С МЕМРЕЗИСТИВНЫМИ ВЕТВЯМИ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Данная статья посвящена проблеме повышения эксплуатационных характеристик вычислительной техники во время проектирования основных элементов на базе мемристоров. Анализируется режим большого сигнала при расчете по постоянному току (статический режим) для электрического многополюсника с мемрезистивными ветвями в конечных приращениях. Расчет проводится для определения параметров рабочей точки нелинейных электронных приборов, а также статических соответствующих электронных устройств. При расчете составляются интервальные системы нелинейных алгебраических уравнений, для решения которых применяется метод Ньютона. В результате проведенного исследования подтверждается применимость выбранного подхода к анализу наноэлектронных схем как элементов памяти, так и архитектуры информационно-измерительных систем в целом.

*Ключевые слова:* статистический режим, электрический многополюсник, мемристоры, математическая модель электрического многополюсника, многополюсник с мемрезистивными ветвями.

A.V. Bondarev, V.N. Efanov

## STATIC MODE OF THE MATHEMATICAL MODEL OF AN ELECTRIC MULTIPOLARWITH MEMREZATIVE BRANCHES IN THE CONDITIONS OF INTERVAL UNCERTAINTY

This article is devoted to the problem of improving the operational characteristics of computing equipment during the design of the basic elements based on memristors. The authors analyze the large signal mode when calculating in direct current (static mode) for an electric multipole with memresistive branches in finite increments. The calculation is carried out to determine the parameters of the operating point of nonlinear electronic devices, as well as static corresponding electronic devices. In the calculation, interval systems of nonlinear algebraic equations are drawn up, for the solution of which Newton's method is applied. As a result of the study, the applicability of the chosen approach to the analysis of nanoelectronic circuits, both memory elements and the architecture of information-measuring systems as a whole, is confirmed.

*Keywords:* statistical mode, electric multipole, memristors, mathematical model of electric multipole, multipole with memresistive branches.

### *Введение*

Появление в последнее время широкого спектра наноэлектронных компонентов с одной стороны, конечно, расширяют возможности информационно-вычислительных систем. Однако применение подобных элементов в условиях отличных от лабораторных имеет неопределенности интервального характера при определении электрических пара-

**Бондарев Андрей Владимирович**
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «ТПЛА» Уфимского государственного авиационного технического университета, город Уфа. Сфера научных интересов: квантовые вычислительные комплексы, схемотехническое проектирование, системы искусственного интеллекта, робастность электронных схем. Автор 96 опубликованных научных работ.
E-mail: bondarevav@rambler.ru

**Ефанов Владимир Николаевич**
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры электроники и биомедицинских технологий Уфимского государственного авиационного технического университета, город Уфа. Сфера научных интересов: проблемы создания высокопроизводительных вычислительных комплексов на базе микро- и наноэлектронных компонентов. Автор 350 опубликованных научных работ.
E-mail: efanov@mail.ru

метров данных устройств, что накладывается на неопределенность всей системы в целом, что затрудняет схемотехнический анализ и процесс проектирования в целом.

Информационно-вычислительные технологии используются практически во всех сферах деятельности человека.Современный компьютер обладает высокой производительностью и скоростью передачи информации, однако остаются актуальными задачи увеличения производительности, снижения тепловыделения устройств современной вычислительной техники без увеличения стоимости.В связи с чем возникла идея повышения эксплуатационных характеристик вычислительной техники при проектировании основных элементов цифровой техники на основе мемристоров.

Мемристор (англ. memristor, от memory – память, и resistor – электрическое сопротивление) – пассивный элемент в микроэлектронике, способный изменять свое сопротивление в зависимости от протекавшего через него заряда. Длительное время мемристор считался теоретической моделью [15], которую нельзя реализовать практически, пока первый образец элемента, демонстрирующий свойства мемристора, не был создан в 2008 г. коллективом ученых во главе с Р.С. Уильямсом в исследовательской лаборатории фирмы Hewlett-Packard. Устройство не накапливает заряд, как конденсатор, не поддерживает магнитный поток, как катушка индуктивности. Изменение свойств устройства обеспечивается химическими реакциями в тонкой двухслойной пленке диоксида титана (5 нм). Один слой пленки устройства слегка обеднен кислородом, и кислородные вакансии мигрируют между слоями при изменении напряжения. Данную реализацию мемристора относят к классу наноионных устройств. Наблюдающееся явление гистерезиса в мемристоре позволяет использовать его в том числе и в качестве ячейки памяти [16].

Уже изученные свойства мемристоров позволяют говорить о том, что на их основе можно создавать компьютеры принципиально новой архитектуры, по производительности значительно превышающие полупроводниковые. Современные компьютеры построены на базе архитектуры фон Неймана: и данные, и программы хранятся в памяти машины в двоичном коде, причем вычислительный модуль отделен от устройств хранения, а программы выполняются последовательно одна за другой. Прогрессивная в середине прошлого столетия такая архитектура сегодня уже не отвечает требованиям, предъявляемым к компьютерной технике: усложнились программные комплексы, а объемы обрабатываемых данных выросли на порядки.

В грядущих мемристорныхинформационно-вычислительных системах параллельно и независимо друг от друга работают множество модулей, а возможность запоминать и оперировать неограниченным множеством значений от 0 до 1 означает, что исполняемые программы не ограничены двоичным кодом. Более того, станут в принципе ненужными отдельные аппаратные компоненты компьютера: процессоры, видеочипы, память и жесткие диски; машина будет архитектурно однородным устройством, где одновременно будут храниться все данные и проводиться все операции с ними. Для апгрейда достаточно будет установить дополнительные мемристорные модули, а для ремонта – заменить вышедшие из строя [13].

В связи с вышесказанным необходимо по-новому взглянуть наэлектрический многополюсник и его математическую модель с использованием мемристора как одного из элементов базового набора. Введение такого дополнения в базовый набор элементов определяет также и появление новых мемрезистивных ветвей электрического многополюсника.

В соответствии с принятой классификацией [7] принято выделять следующие типовые режимы работы исследуемых электронных устройств, что вполне справедливо и для элементов наноэлектроники:

– квазилинейный режим малого сигнала при расчете по переменному току;
– квазилинейный режим малого сигнала при расчете во временной области;
– режим большого сигнала при расчете по постоянному току (статический режим);
– режим большого сигнала при расчете во временной области (динамический режим).

В зависимости от выбранного режима исходная модель исследуемого устройства будет представлять собой электрический многополюсник одного из следующих видов:

– линейный резистивный;
– линейный реактивный;
– нелинейный резистивный;
– нелинейный реактивный.

При этом общей методологической основой исследования всех перечисленных видов моделей является их описание в базисе конечных отклонений токов и напряжений ветвей соответствующего многополюсника, поскольку главной целью нашего исследования является оценка способности устройства сохранять свои характеристики в заданных пределах при наличии возмущающих воздействий с неопределенными заранее свойствами. В данной статье анализируется третий в указанной классификации режим большого сигнала при расчете по постоянному току (статический режим)для электрического многополюсника с мемрезистивными ветвями в конечных приращениях.

*Полноразмерная математическая модель многополюсника с мемрезистивными ветвями*

Математические модели электрического многополюсника с мемрезистивными ветвями в номинальном виде и с использованием конечных приращений были построены ранее [6; 10] с использованием метода декомпозиции ветвей направленного графа схемы, описанного в [8; 11].

Полноразмерная математическая модель в полном гибридном базисе в конечных приращениях токов и напряжений будет выглядеть следующим образом [11]:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}0 & \hat{L}\\ \hat{C} & 0\end{bmatrix}\cdot\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta U_C^P\\ \Delta I_L^X\end{bmatrix}=Q_1\begin{bmatrix}\Delta U_C^P\\ \Delta I_L^X\end{bmatrix}+Q_2\begin{bmatrix}\Delta U_H^P\\ \Delta I_H^X\end{bmatrix}+Q_3\begin{bmatrix}E_{HE3}^R\\ J_{HE3}^R\end{bmatrix}+Q_4\begin{bmatrix}\Delta U_M^P\\ \Delta I_M^X\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}E_{HE3}^L\\ J_{HE3}^C\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\Delta U_H^P\\ \Delta I_H^X\end{bmatrix}=A_1\begin{bmatrix}\Delta U_C^P\\ \Delta I_L^X\end{bmatrix}+A_2\begin{bmatrix}\Delta U_R^P\\ \Delta I_R^X\end{bmatrix}+A_3\begin{bmatrix}\Delta U_M^P\\ \Delta I_M^X\end{bmatrix}-H\cdot F^I\\ \begin{bmatrix}\Delta U_R^P\\ \Delta I_R^X\end{bmatrix}=G_1\begin{bmatrix}\Delta U_C^P\\ \Delta I_L^X\end{bmatrix}+G_2\begin{bmatrix}\Delta U_H^P\\ \Delta I_H^X\end{bmatrix}+G_3\begin{bmatrix}\Delta U_M^P\\ \Delta I_M^X\end{bmatrix}-W\begin{bmatrix}E_{HE3}^R\\ J_{HE3}^R\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\Delta U_M^P\\ \Delta I_M^X\end{bmatrix}=S_I\begin{bmatrix}\Delta U_C^P\\ \Delta I_L^X\end{bmatrix}+S_2\begin{bmatrix}\Delta U_H^P\\ \Delta I_H^X\end{bmatrix}+S_3\begin{bmatrix}\Delta U_R^P\\ \Delta I_R^X\end{bmatrix}-K\begin{bmatrix}E_{HE3}^M\\ J_{HE3}^M\end{bmatrix}\end{cases} \tag{1}$$

где $\hat{L}=\begin{bmatrix}\operatorname{diag}\{L_k+\Delta L_k\} & 0\\ 0 & \operatorname{diag}\{L_i^{HES}+L_i^{3AB}(\Delta i)\}\end{bmatrix}$ –

матрица индуктивностей ( $k=\overline{1,n_{\pi L}^X}$, $l=\overline{1,n_{HL}^X}$, $n_{JL}^X+n_{HL}^X=\dim\Delta U_L^X$ );

$\hat{C}=\begin{bmatrix}\operatorname{diag}\{C_k+\Delta C_k\} & 0\\ 0 & \operatorname{diag}\{C_i^{HEB}+C_i^{3AB}(\Delta i)\}\end{bmatrix}$ –

матрица емкостей ( $k=\overline{1,n_{\pi C}^X}$, $?=\overline{1,n_{HC}^X}, n_{\Pi C}^X+n_{HC}^X=\dim\Delta I_C^P$ ); $\Delta U_L^X$, $\Delta I_L^X$ – приращения напряжений и токов на индуктивных хордах; $\Delta U_C^P$, $\Delta I_C^P$, – приращения напряжения и тока на емкостных ребрах; $\Delta U_R^X$, $\Delta U_R^P$, $\Delta I_R^P$, $\Delta I_R^X$ – приращения напряжения и тока на резистивных ребрах и хордах; $\Delta U_H^X, \Delta U_H^P, \Delta I_H^P, \Delta I_H^X$ – приращения напряжения и тока на нелинейных ребрах и хордах; $\Delta U_M^X, \Delta U_M^P, \Delta I_M^X, \Delta I_M^P$ – приращения напряжения и тока на мемрезистивных ребрах и хордах;

$Q_1=\begin{bmatrix}-B_I & Z_{ЭКВ}\\ V_{ЭКВ} & -D_I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-B_{IV} & 0\\ 0 & -D_{IV}\end{bmatrix}\cdot G_1$,

$Q_2=\begin{bmatrix}-B_{II} & 0\\ 0 & -D_{II}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-B_{IV} & 0\\ 0 & -D_{IV}\end{bmatrix}\cdot G_2$,

$Q_3=\begin{bmatrix}-B_{II} & 0\\ 0 & -D_{II}\end{bmatrix}\cdot W$, и $Q_4=\begin{bmatrix}-B_I & 0\\ 0 & -D_{III}\end{bmatrix}++\begin{bmatrix}-B_{IV} & 0\\ 0 & -D_{IV}\end{bmatrix}$;

$Z_{ЭКВ}=\left[[0]_{n_L^X\times n_{\pi L}^X} \quad \operatorname{diag}\left\{\left(Z_{HES}^L+Z_{3AB}^L(\Delta i)\right)_l\right\}\right]$ – матрицы эквивалентных сопротивлений и $V_{ЭКВ}=\left[[0]_{n_C^P\times n_{\pi c}^P} \quad \operatorname{diag}\left\{\left(G_{HES}^C+G_{3AB}^C(\Delta u)\right)_l\right\}\right]$ – эквивалентных проводимостей нелинейных индуктивностей и емкостей; $D_i$ – матрица главных сечений направленного графа схемы; $B_i$ – матрица главных контуров направленного графа схемы; $n$ – число ветвей и $k$ – число узлов;

$$E^L_{ЭКВ} = \left[ \left[ \left( E_{HEB} \right)_k \right]_{n^X_{ПL} \times 1} \left[ \left( E^L_{HEЗ} + E^L_{ЗAB}(\Delta i) \right)_k \right]_{n^X_{HL} \times 1} \right]^T$$

$$J^C_{ЭКВ} = \left[ \left[ \left( J_{HEB} \right)_k \right]_{n^P_{JC} \times 1} \left[ \left( J^C_{HES} + J^C_{ЗAB}(\Delta u) \right)_k \right]_{n^P_{HC} \times 1} \right]^T,$$ – эквивалентные векторы источников токов и напряжений;

где $A_1 = \begin{bmatrix} \Delta M^{-1} & Z_X\left(\Delta I^X_H\right) \\ G_P\left(\Delta U^P_H\right) & \Delta M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -B_V & 0 \\ 0 & -D_V \end{bmatrix},$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \Delta M^{-1} & Z_X\left(\Delta I^X_H\right) \\ G_P\left(\Delta U^P_H\right) & \Delta M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -B_{VII} & 0 \\ 0 & -D_{VII} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -B_{VIII} & 0 \\ 0 & -D_{VIII} \end{bmatrix}$$

и $F^I = \begin{bmatrix} E & E & 0 & 0 & -E & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & -E & -E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E^H_H \\ E^H_X \\ J^H_H \\ J^H_P \\ E^{ЗAB}_H \\ E^{HES}_H \\ J^{ЗAB}_H \\ J^{HE}_H \end{bmatrix}$

$H = \begin{bmatrix} \Delta M^{-1} & Z_X\left(\Delta I^X_H\right) \\ G_p\left(\Delta U^p_H\right) & \Delta M \end{bmatrix}$; $Z_X\left(\Delta I^X_H\right)$ и $G_P\left(\Delta U^P_H\right)$ – диагональные матрицы эквивалентных сопротивлений и проводимостей; $\Delta M^{-1}$ и $\Delta M$ – диагональные матрицы эквивалентных обратных и прямых мемрезистивностей; $E$ – единичная матрица; $E^H_H, E^H_X, J^<_H, J^H_P, E^{ЗAB}_H, E^{HEЗ}_H, J^{ЗAB}_H$ и $J^{HEЗ}_H$ – эквивалентные источники ЭДС и тока на нелинейных хордах и ребрах;

$$G_1 = \begin{bmatrix} B_{XI} & \hat{R} \\ \hat{Y} & D_{XI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -B_{IX} & 0 \\ 0 & -D_{IX} \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} B_{XI} & \hat{R} \\ \hat{Y} & D_{XI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -B_X & 0 \\ 0 & -D_X \end{bmatrix},$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} B_{XI} & \hat{R} \\ \hat{Y} & D_{XI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -B_{XII} & 0 \\ 0 & -D_{XII} \end{bmatrix} \text{ и } W = \begin{bmatrix} B_{XI} & \hat{R} \\ \hat{Y} & D_{XI} \end{bmatrix}^{-1};$$

$$S_I = \begin{bmatrix} -B_{XVI} & \hat{M} \\ \hat{M}^{-1} & -D_{XVI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -B_{XIII} & 0 \\ 0 & -D_{XII} \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} -B_{XVI} & \hat{M} \\ \hat{M}^{-1} & -D_{XVI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -B_{XIV} & 0 \\ 0 & -D_{XIV} \end{bmatrix},$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} -B_{XVI} & \hat{M} \\ \hat{M}^{-1} & -D_{XVI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -B_{XV} & 0 \\ 0 & -D_{XV} \end{bmatrix} \text{ и } K = \begin{bmatrix} -B_{XVI} & \hat{M} \\ \hat{M}^{-1} & -D_{XVI} \end{bmatrix}^{-1};$$

$\hat{M}^{-1} = M^{-1} + \Delta M$ – матрица мемрезистивностей ветви, $\hat{M}^{-1} = M^{-1} + \Delta M^{-1}$ – матрица обратных мемрезистивностей ветви; $E^{M}_{НЕЗ}$, $I^{M}_{НЕЗ}$ – эквивалентные векторы независимых источников напряжения и тока на мемрезистивных ветвях.

*Математическая модель многополюсника с мемрезистивными ветвями в статическом режиме*

Расчет многополюсника в данном режиме и расчет по постоянному току проводятся для определения параметров рабочей точки нелинейных электронных приборов, а также статических соответствующих электронных устройств, например, коэффициентов передач по постоянному току, входных и выходных сопротивлений и др.

Эквивалентная схема исследуемого устройства в данном режиме не содержит реактивных элементов – емкостей или индуктивностей, поэтому она представляет собой нелинейный резистивно-мемрезистивный многополюсник. При составлении математических моделей в сокращенном гибридном базисе будем предполагать, что топология многополюсника удовлетворяет следующим двум ограничениям:

– немонотонные управляемые напряжением сопротивления не образуют контура;

– немонотонные управляемые током мемрезистивности не образуют сечения.

Немонотонные управляемые напряжением сопротивления и немонотонные управляемые током сопротивления относятся к особым ветвям электрического многополюсника, причем первые из упомянутых сопротивлений должны быть отнесены к ребрам, а вторые – к хордам. Для обеспечения сформулированного требования нумерацию ветвей многополюсника начинаем с немонотонных управляемых напряжением сопротивлений, а завершаемнемонотонными управляемыми током мемрезистивностями.

Ранее в [5; 8] показано, что при составлении эквивалентных схем в номинальном и возмущенном режимах работы топология схемы не изменяется. Следовательно, используя уже известные выражения обобщенной модели электрического многополюсника, будем сразу записывать выражения для токов и напряжений ветвей в конечных приращениях.

С учетом сделанных замечаний векторы приращений токов и напряжений для всех ветвей исследуемого электрического многополюсника разбиваются на следующие характерные группы:

– нелинейные ребра;
– нелинейные хорды;
– линейные ребра;
– линейные хорды.

Исходя из вышесказанного математическая модель многополюсника с мемрезистивными ветвями (1) в статическом режиме примет вид

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Delta U_H^P \\ \Delta I_H^X \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} \Delta U_R^P \\ \Delta I_R^X \end{bmatrix} + A_3 \begin{bmatrix} \Delta U_M^P \\ \Delta I_M^X \end{bmatrix} - H \cdot F^I \\ \begin{bmatrix} \Delta U_R^P \\ \Delta I_R^X \end{bmatrix} = G_2 \begin{bmatrix} \Delta U_H^P \\ \Delta I_H^X \end{bmatrix} + G_3 \begin{bmatrix} \Delta U_M^P \\ \Delta I_M^X \end{bmatrix} - W \begin{bmatrix} E_{HE3}^R \\ J_{HE3}^R \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta U_M^P \\ \Delta I_M^X \end{bmatrix} = S_2 \begin{bmatrix} \Delta U_H^P \\ \Delta I_H^X \end{bmatrix} + S_3 \begin{bmatrix} \Delta U_R^P \\ \Delta I_R^X \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} E_{HE3}^M \\ J_{HE3}^M \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2)$$

Выражение (2) относится к классу интервальных систем линейных алгебраических уравнений, для решения которых допустимо использовать интервальную арифметику Кахана и интервальные методы Ньютона и Кравчика.

Суть интервальной арифметики Кахана состоит в том, что операции с интервалами, содержащими ноль, имеют тот же результат, что и в случае с другими интервалами и позволяют сохранить неизменным интервальное расширение функций, а также гарантируют при соблюдении определенных условий не только дистрибутивность операций, но и монотонность по включению [5; 9].

### *Вычислительный алгоритм внешнего оценивания множеств решений математической модели многополюсника с мемрезистивными ветвями в статическом режиме*

Для решения подобных интервальных систем нелинейных алгебраических уравнений можно воспользоваться методом Ньютона [9]. Для этого приведем систему (2) к виду

$$f_p(x, y) = 0 \quad (3)$$

Обозначим $IGA(A,b)$ – результат применения метода Гаусса к интервальной системе $Ax = b$. Тогда для первого уравнения системы (2), получим

$$A = A_2; \quad x = \begin{bmatrix} \Delta U_R^P \\ \Delta I_R^X \end{bmatrix}, \quad b = A_3 \begin{bmatrix} \Delta U_M^P \\ \Delta I_M^X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta U_H^P \\ \Delta I_H^X \end{bmatrix} - H \cdot F^I \quad (4)$$

$$(\Delta U)_{k+1} = \aleph\big((\Delta U)_k\big) \cap (\Delta U)_k, \quad (5)$$

где $\aleph(\Delta U)$ – оператор Ньютона следующего вида

$$\aleph(\Delta U) = \mathrm{mid}(\Delta U) - IGA\left\{F'(\Delta U), f(\mathrm{mid}(\Delta U))\right\}, \quad (6)$$

На прямом ходе вычислений найдем матрицу Якоби:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1^{(1)}(\Delta U)}{\partial U_H^P} & \dfrac{\partial F_1^{(1)}(\Delta U)}{\partial I_H^X} \\ \dfrac{\partial F_2^{(1)}(\Delta U)}{\partial U_H^X} & \dfrac{\partial F_2^{(1)}(\Delta U)}{\partial I_H^P} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Вычисляем

$$r_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \tag{8}$$

Для всех $j$ = 1 до $n$– 1 и для всех $i$=$j$+1 до $n$. Здесь $a$ – элементы матрицы Якоби.

На обратном ходе, используя элементы матрицы A и вектора b согласно (4), найдем, что

$$y_2 = \frac{b_2^{**}}{\bar{a}_{22}^{*}} \tag{9}$$

Тогда

$$y_1 = b_1^{*} - a_{21} y_2^{*}. \tag{10}$$

Интервальный метод Ньютона имеет недостаток, суть которого заключается в том, что даже если матрица естественного интервального расширения функции имеет неособенный характер, то в общем случае можно вычислить $IGA\left\{F'(\Delta I), f(\mathrm{mid}(\Delta I))\right\}$ только тогда, когда ширина $\mathrm{mid}(\Delta I)$ достаточно мала.

Этот недостаток устраняется в методе решения систем нелинейных интервальных уравнений, называемом методом Кравчика, за счет введения отображения интервальной функции (оператора Кравчика) [9].

Решение системы (3) методом Кравчика в общем случае будет иметь следующий вид:

$$\Delta U_{K+1} = \Re\left(\Delta U_K\right) \cap \Delta U_K\,, \tag{11}$$

где $\Re(\Delta I)$ – оператор Кравчика вида

$$\Re\left(\Delta U_K\right) = \mathrm{mid}\left(\Delta U_K\right) - C \cdot f\left(\mathrm{mid}\left(\Delta U_K\right)\right) + \left(E - C \cdot f'\left(\Delta U_K\right)\right) \cdot \left(\Delta U_K - \mathrm{mid}\left(\Delta U_K\right)\right), \tag{12}$$

где C – неособенная вещественная матрица весовых коэффициентов, элементы которой выбраны эмпирическим путем таким образом, чтобы улучшить сходимость метода; $f$ – это функция (3).

Для фиксированной матрицы C метод Кравчика определяется выражением

$$\Delta U^{K+1} = \Re\left(\Delta U^K\right) \cap \Delta U^K\,, \tag{13}$$

Аналогичным образом реализуется алгоритм решения для второго и третьего уравнений системы (2).

*Заключение*

Рассмотренный в данной статье статический режим для электрического многополюсника с мемрезистивными ветвями подтверждает применимость выбранного подхода к анализу наноэлектронных схем как элементов памяти, так и архитектуры информационно-измерительных систем в целом.

Форма представления математической модели для каждого режима работы вполне соответствует формам, требуемым для использования методов интервального анализа.

Безусловно, необходимо провести проверку адекватности представленной модели электрического многополюсника с мемрезистивными ветвями как в общем виде, так и в динамическом и статическом режимах для реальных наноэлектронных схем, что является предметом дальнейших исследований.

## Литература

1. *Алефельд Г., Майер Г.* Интервальный анализ: теория и приложения [Электронный ресурс]. – URL: http://www.nsc.ru/interval/Introduction/ISurveyRus.pdf

2. *Бондарев А.В.* Обзор алгоритмов квантовых вычислений// Перспективы науки. 2019. № 7(118). С. 27–31.

3. *Бондарев А.В.* Обзор элементной базы квантовых компьютеров// XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. 2019. Т. 8, №3(47).С. 96–100.

4. *Бондарев А.В.* Особенности построения архитектуры квантовых компьютеров// Современная наука. Серия: Естественные и технические науки. 2019. № 6.С. 52–55.

5. *Бондарев А.В.* Система поддержки принятия решений при оценке робастности сложных бортовых радиоэлектронных систем на базе COTS-продуктов: дис. … канд. техн. наук / Уфимский государственный авиационно-технический университет, 2011.

6. *Бондарев А.В., Ефанов В.Н.* Принципы формирования математической модели наноэлектронных компонентов квантовых вычислительных комплексов с мемрезистивными ветвями// Системы управления и информационные технологии. 2020. № 1 (79). С. 4–10.

7. *Сигорский В.П., Петренко А.И.* Алгоритмы анализа электронных схем. М.: Советское радио, 1976, 608 с.

8. *Чуа Л.О., Лин Пен-Мин.* Машинный анализ электронных схем. Алгоритмы и вычислительные методы:пер с англ. М.: Энергия, 1980, 640 с.

9. *Alefeld G., Mayer G.* (2000) Interval analysis: theory and applications. *Journal of Computational Applied Mathematics*, vol. 121,pp. 421–464.

10. *Bondarev A.V.* (2015) Research problem of a robustness of electronic schemes by methods of interval calculations in the conditions of uncertainty. Proceedings of the 17th International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2015),pp. 145–149.

11. *Bondarev A., Efanov V.*(2019) The Principles of Forming of the Mathematical Model of Nanoelectronic Components of Quantum Computer Systems with Memresistance Branches. Proceedings of the 21st International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2019),vol. 3,pp. 17–22.

12. *Bondarev A.V., Muravyova E.A., Kadyrov R.R., Rahman P.A.*(2016) The analysis of opportunities of construction and use of avionic systems based on COTS-modules. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*,vol. 11, no. 1,pp. 78–92.
13. *Borghetti J., Snider G.S., Kuekes P.J. et al.* (2010) 'Memristive' switches enable 'stateful' logic operations via material implication. *Nature letters*, vol. 464, pp.873–876.
14. *Bourzac K.* Memristor Memory Readied for Production. Available at:www.technologyreview.com/computing/25018
15. *Chua L.O.(1971)* Memristor – the missing circuit element. IEEE Trans. Circuit Theory, vol. 18, pp. 507–519.
16. http://www.nanonewsnet.ru/articles/2011/memristor-nedostayushchii-element
17. https://eduherald.ru/ru/article/view?id=17265
18. *Johnson R.C.* End of the CPU? HP demos configurable memristor. Available at:www.eetimes.com/electronicsnews/4088557/End-of-the-CPU-HP-demos-configurablememristor.
19. *Kuekes P.J., Snider G.S., Williams R.S.*(2005) Crossbar nanocomputers. *Scientific American*, vol. 293, pp.72–78.
20. *Markoff J.* Sees a Revolution in Memory Chip. Available at:www.nytimes.com/2010/04/08/science/08chips.html?_r=1
21. *Memristor. Available* at:en.wikipedia.org/wiki/Memristor
22. *Merritt R.* HP researcher predicts memory-centric processors. Available at:www.eetimes.com/electronicsnews/4199856/HP-researcher-predicts-memory-centricprocessors.
23. *Strukov D.B., Snider G.S., Stewart D.R., Williams R.S.*(2008) The missing memristor found. *Nature letters*, vol. 453, pp.80–83.

## References

1. Alefeld G., Mayer G. Interval'nyy analiz: teoriya i prilozheniya [Interval analysis: theory and applications]. Available at: http://www.nsc.ru/interval/Introduction/ISurveyRus.pdf
2. Bondarev A.V. (2019) *Obzor algoritmov kvantovykh vychisleniy* [A review of quantum computing algorithms]. *Perspektivy nauki*, no. 7 (118), pp 27–31 (in Russian).
3. Bondarev A.V. (2019) *Obzor elementnoy bazy kvantovykh komp'yuterov* [Review of the element base of quantum computers]. *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego plyus*, vol. 8, no. 3 (47), pp. 96–100 (in Russian).
4. Bondarev A.V. (2019) *Osobennosti postroeniya arkhitektury kvantovykh komp'yuterov* [Features of building the architecture of quantum computers]. *Sovremennaya nauka. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, no. 6, pp. 52–55 (in Russian).
5. BondarevA.V. (2011) *Sistema podderzhki prinyatiya resheniy pri otsenke robastnosti slozhnykh bortovykh radioelektronnykh sistem na baze COTS-produktov: dis. … kand. tekhn. nauk* [Decision support system for assessing the robustness of complex airborne electronic systems based on COTS products]: PhD thesis. Ufimskiy gosudarstvennyy aviatsionno-tekhnicheskiy universitet (inRussian).
6. Bondarev A.V., Efanov V.N. (2020) *Printsipy formirovaniya matematicheskoy modeli nanoelektronnykh komponentov kvantovykh vychislitel'nykh kompleksov s memrezistivnymi*

*vetvyami*[Principles of the formation of a mathematical model of nanoelectronic components of quantum computing systems with memresistive branches]. Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii, no. 1 (79), pp. 4–10 (inRussian).
7. Sigorskiy V.P., Petrenko A.I. (1976) *Algoritmy analiza elektronnykh skhem* [Algorithms for analyzing electronic circuits]. Moscow, Sovetskoe radio Publishing, 608 p. (inRussian).
8. Chua L.O., Lin Peng-Ming (1980) *Mashinnyy analiz elektronnykh skhem. Algoritmy i vychislitel'nye metody* [Machine analysis of electronic circuits.Algorithms and computational methods]. Moscow, Energiya Publishing, 640 p. (inRussian).
9. Alefeld G., Mayer G. (2000) Interval analysis: theory and applications. *Journal of Computational Applied Mathematics*, vol. 121, pp. 421–464.
10. Bondarev A.V.(2015) Research problem of a robustness of electronic schemes by methods of interval calculations in the conditions of uncertainty. Proceedings of the 17th International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2015), pp. 145–149.
11. Bondarev A., Efanov V. (2019) The Principles of Forming of the Mathematical Model of Nanoelectronic Components of Quantum Computer Systems with Memresistance Branches. Proceedings of the 21st International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2019), vol. 3, pp. 17–22.
12. Bondarev A.V., Muravyova E.A., Kadyrov R.R., Rahman P.A. (2016) The analysis of opportunities of construction and use of avionic systems based on COTS-modules. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 11, no. 1, pp. 78–92.
13. Borghetti J., Snider G.S., Kuekes P.J. et al. (2010) 'Memristive' switches enable 'stateful' logic operations via material implication. *Nature letters*, vol. 464, pp. 873–876.
14. Bourzac K. Memristor Memory Readied for Production. Available at:www. technologyreview.com/computing/25018
15. Chua L.O. (1971) Memristor – the missing circuit element. IEEE Trans. Circuit Theory, vol. 18, pp. 507–519.
16. http://www.nanonewsnet.ru/articles/2011/memristor-nedostayushchii-element
17. https://eduherald.ru/ru/article/view?id=17265
18. Johnson R.C. End of the CPU? HP demos configurable memristor. Available at:www.eetimes. com/electronicsnews/4088557/End-of-the-CPU-HP-demos-configurablememristor.
19. Kuekes P.J., Snider G.S., Williams R.S. (2005) Crossbar nanocomputers. *Scientific American*, vol. 293, pp. 72–78.
20. Markoff J. Sees a Revolution in Memory Chip. Available at:www.nytimes.com/2010/04/08/ science/08chips.html?_r=1
21. Memristor. Available at:en.wikipedia.org/wiki/Memristor
22. Merritt R. HP researcher predicts memory-centric processors. Available at:www.eetimes. com/electronicsnews/4199856/HP-researcher-predicts-memory-centricprocessors.
23. Strukov D.B., Snider G.S., Stewart D.R., Williams R.S. (2008) The missing memristor found. *Nature letters*, vol. 453, pp. 80–83.