

В.А. Минаев, Н.Г. Топольский, А.О. Фаддеев,  
Р.О. Степанов, Д.С. Грачев

---

## ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИРОДНО-ТЕХНОГЕННЫХ РИСКОВ

---

Рассмотрен общий вид модели оценки рисков в природно-техногенной системе, основанной на учете воздействия на нее природных и техногенных факторов. Найдено общее решение системы дифференциальных уравнений, описывающих модель. Проанализировано два примера применения модели для случая похожих природных и техногенных воздействий: воздействия линейного вида, приводящие к возникновению катастрофических сейсмических событий, а также воздействия параболического вида, которые приводят к криповым, карстово-деформационным, просадочным и оползневым процессам. Кроме того, описаны две новые модели динамики природного и техногенного риска, возникающего в природно-техногенной системе под влиянием опасных природных и техногенных факторов. Представленные модели отличаются друг от друга видами воздействий. В первой модели рассматриваются совместно параболический (отражающий угрозы, интенсивность которых плавно уменьшается с расстоянием от эпицентра) и линейный (отражающий внезапно возникающие угрозы) виды воздействий; во второй модели проведен анализ таких видов воздействий, как параболический и гиперболический (отражающий угрозы, интенсивность которых резко уменьшается с течением времени). Делается вывод, что на основе предложенных моделей можно достаточно точно описать практически любые виды сочетанного природно-техногенного воздействия и по результатам такого описания составить специальный «атлас» комплексных воздействий на природно-техногенную систему с целью превентивного «проигрывания» различных ситуаций и выработки наиболее эффективного противодействия возникающим опасностям со стороны подразделений МЧС и других структур.

*Ключевые слова:* моделирование, дифференциальные уравнения, оценка, природно-техногенные риски, опасность, противодействие.

V.A. Minaev, N.G. Topolsky, A.O. Faddeev,  
R.O. Stepanov, D.S. Grachev

---

## DYNAMICAL MODELS OF NATURAL-TECHNOGENIC RISKS

---

The general view of the risk assessment model in the natural and technogenic system based on the account of natural and technogenic factors influences on it is considered. A general solution of the differential equations system describing the model is found. Two examples of using the model for similar natural and technogenic influences are analyzed: linear impact that lead to catastrophic seismic events is considered, as well as parabolic impact that lead to creep, karst-deformation, subsidence, and landslide processes. Besides, two new dynamic models of the of natural and technogenic risk arising in the natural and technogenic system under the influence of dangerous natural and technogenic factors are described. The presented models differ from each other by types of influences: the first model considers parabolic (reflecting threats whose intensity gradually decreases with the distance from the epicenter) and linear types of influences (reflecting unexpected threats), the second model considers parabolic and hyperbolic (reflecting threats whose intensity decreases sharply over time) types of influences. It is concluded that it is possible to accurately describe almost any type of combined natural and technogenic influences

and, based on the results of such a description, to create a special “atlas” of complex influences on the natural and technogenic system in order to prevent of various situations and develop the most effective counteraction from emergency departments and other structures.

*Keywords:* modeling, differential equations, estimation, natural and technogenic risks, danger, counteraction.

### *Введение*

Сложное сочетание факторов природного и техногенного характера, вследствие которых возникает угроза здоровью и жизни населения, проживающего на определенных территориях, а также материальным ценностям и объектам, в том числе критически важным, определяет исследования природно-техногенных рисков, которым посвящен целый ряд современных работ [8; 9; 10; 14], включая научные работы по математическому моделированию рисков [5; 11; 13].

Для обеспечения безопасности населения и территорий от проявления опасных природно-техногенных процессов в России ориентируются на стратегии, указанные в государственной научно-технической программе «Безопасность населения и народнохозяйственных объектов с учетом риска возникновения природных и техногенных катастроф» [4]:

1) предотвращение причин природно-техногенных аварий и катастроф и обеспечение регламентного функционирования объектов, отличающихся техногенно опасными факторами;

2) предотвращение и локализация опасной обстановки, из-за которой начинается цепная реакция событий, ведущих к природно-техногенной аварии или катастрофе;

3) максимально возможная нейтрализация и оперативная ликвидация воздействий опасных природно-техногенных факторов на людей и окружающую среду.

Необходимо при этом учитывать, что экстремальные события, реализация которых маловероятна с точки зрения статистики, отражают «хвостовые» значения генеральной совокупности и, как правило, недооцениваются исследователями. Однако последствия таких событий весьма грандиозны и опасны (землетрясения, сильные наводнения, суперпожары, селевые катастрофы и др.) [2].

Одним из важнейших методов оценки природных и техногенных рисков в природно-технических системах (ПТС) является метод математического моделирования [12].

В настоящей статье представлены динамические модели природно-техногенного риска.

### *Результаты моделирования рисков*

#### *при функционально подобных природных и техногенных воздействиях*

Предположим, что риск представляет собой двумерную вектор-функцию, где  $r_1(t)$  – функция изменения природного риска,  $r_2(t)$  – функция изменения техногенного риска. Представим риск-функцию в виде системы дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{cases} r_1'(t) = a_1 r_1(t) + b_1 r_2(t) + L_1(t), \\ r_2'(t) = a_2 r_1(t) + b_2 r_2(t) + L_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  – постоянные коэффициенты, отражающие реакцию ПТС на воздействия опасных природных и техногенных факторов;  $L_1(t), L_2(t)$  – функции, описывающие со-

ответственно интенсивность воздействия на ПТС внешних природных и техногенных факторов.

Общее решение системы (1) при нулевых функциях  $L_1(t), L_2(t)$  для случая положительного дискриминанта ее характеристического уравнения записывается в виде

$$\begin{cases} r_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ r_2(t) = \frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} C_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} C_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим пример применения модели (1) для оценки природно-техногенного риска в случае, когда на ПТС оказываются функционально подобные внешние природные и техногенные воздействия. Под функционально подобным внешним воздействием понимается такой его вид, при котором влияния как со стороны природных, так и со стороны техногенных факторов описываются одинаковыми функциональными зависимостями.

Для начала используем функциональные зависимости линейного вида:

$$\begin{cases} L_1^{(0)}(t) = \xi_1 - \eta_1 t, \\ L_2^{(0)}(t) = \xi_2 - \eta_2 t, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  – некоторые постоянные коэффициенты.

Найдем общий вид частного решения для неоднородной системы уравнений вида (1). Представим систему (2) в следующем виде [1]:

$$\begin{cases} r_1(t) = C_1 F_{11}(t) + C_2 F_{12}(t), \\ r_2(t) = C_1 F_{21}(t) + C_2 F_{22}(t), \end{cases} \quad (4)$$

полагая при этом

$$\begin{cases} F_{11}(t) = e^{\lambda_1 t}; & F_{12}(t) = e^{\lambda_2 t}; \\ F_{21}(t) = \frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_1 t}; & F_{22}(t) = \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (5)$$

Запишем (4) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

или более компактно:

$$R_0(t) = F(t)C_0,$$

где  $R_0(t)$  – матрица функций изменения компонент природно-техногенного риска без учета внешних воздействий системы (4);  $F(t)$  – матрица системы (5);  $C_0$  – матрица коэффициентов системы (4).

В этом случае частное решение системы (1), соответствующее нахождению матрицы  $\tilde{R}(t)$  функций изменения природно-техногенного риска вследствие влияния на ПТС внешних воздействий со стороны природной среды и техносферы, будем искать на основании следующего соотношения [6; 7]:

$$\tilde{R}(t) = F(t) \int F^{-1}(t) L(t) dt, \quad (7)$$

где  $F^{-1}(t)$  – матрица, обратная матрице  $F(t)$ ;  $L(t)$  – матрица изменений внешних природно-техногенных воздействий на ПТС.

Построим матрицу  $F^{-1}(t)$ , для этого найдем определитель матрицы  $F(t)$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) \end{vmatrix} = F_{11}(t)F_{22}(t) - F_{21}(t)F_{12}(t) = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{b_1} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}. \quad (8)$$

Матрица алгебраических дополнений  $\bar{F}(t)$  для матрицы  $F(t)$  будет иметь следующий вид:

$$\bar{F}(t) = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_2 t} & -\frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_1 t} \\ -e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тогда матрица, транспонированная по отношению к матрице (9), записывается как

$$F^T(t) = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_2 t} & -e^{\lambda_2 t} \\ -\frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Определим с учетом (10) подынтегральную функциональную матрицу  $U(t)$ :

$$U(t) = F^{-1}(t)L(t) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_2 t} & -e^{\lambda_2 t} \\ -\frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Рассмотрим функционально подобное воздействие на ПТС вида (3). На рисунке 1 показаны величины подобного воздействия на ПТС со стороны природной среды и техносферы в условных единицах, по оси абсцисс указано характеристическое время. Такие виды воздействий описывают проявления подвижек, возникающих в геологической среде и приводящих к возникновению катастрофических сейсмических событий, наблюдаемых на территориях районного, локального и точечного масштабного уровней. Они характеризуются внезапными аварийными ситуациями на объектах техносферы, например, взрывами оборудования, обрушениями зданий, сооружений, конструкций различного вида.

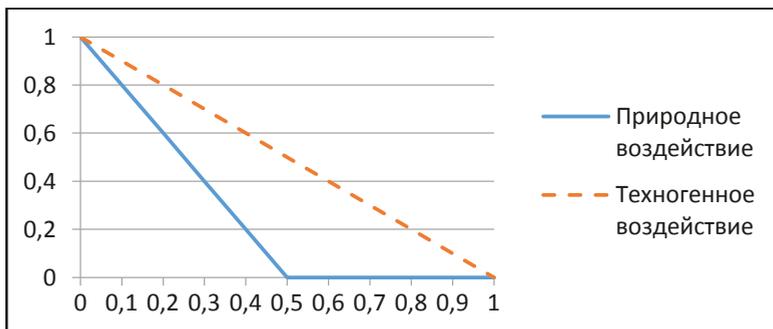


Рис. 1. Природно-техногенное подобное воздействие на ПТС вида (3)

Минаев В.А. и др. Динамические модели природно-техногенных рисков

В этом случае матрица изменений внешних природно-техногенных воздействий на ПТС имеет вид

$$L(t) = (L^{(0)}(t))' = \begin{pmatrix} L_1^{(0)}(t) \\ L_2^{(0)}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \xi_1 - \eta_1 t \\ \xi_2 - \eta_2 t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ -\eta_2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Определим компоненты матрицы  $U(t)$ :

$$u_1(t) = \frac{b_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}} \left[ \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_2 t} L_1(t) - e^{\lambda_2 t} L_2(t) \right] = \frac{[(\lambda_2 - a_1)L_1(t) - b_1 L_2(t)] e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (13)$$

По аналогии получим выражение для  $u_2(t)$ :

$$u_2(t) = \frac{[b_1 L_2(t) - (\lambda_1 - a_1)L_1(t)] e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (14)$$

Проинтегрировав выражения (13)–(14), получим следующие функции:

$$\begin{cases} \chi_1(t) = \int u_1(t) dt = \frac{[-b_1 \eta_2 + (\lambda_2 - a_1) \eta_1] e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} + \tilde{C}_1, \\ \chi_2(t) = \int u_2(t) dt = \frac{[-(\lambda_1 - a_1) \eta_1 + b_1 \eta_2] e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} + \tilde{C}_2, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  – постоянные коэффициенты, учитывающие изменения природных и техногенных воздействий на ПТС в начальный момент времени.

Учитывая (15), раскроем соотношение (7):

$$\tilde{R}(t) = F(t)\chi(t) = \begin{pmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

После ряда преобразований в итоге получим выражения для функций изменения природного и техногенного риска в ПТС:

$$\begin{cases} \bar{r}_1(t) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} [(\lambda_1 + \lambda_2 - a_1) \eta_1 - b_1 \eta_2], \\ \bar{r}_2(t) = \frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} D_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} D_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{b_1 \lambda_1 \lambda_2} [a_1 b_1 \eta_2 + (\lambda_1 - a_1)(\lambda_2 - a_1) \eta_1], \end{cases} \quad (17)$$

где  $D_1 = C_1 + \tilde{C}_1$ ;  $D_2 = C_2 + \tilde{C}_2$ .

Рассмотрим на рисунке 2) подобное воздействие со стороны природных и техногенных факторов вида

$$\begin{cases} L_1^{(0)}(t) = \xi_1 - \eta_1 t^2, \\ L_2^{(0)}(t) = \xi_2 - \eta_2 t^2. \end{cases} \quad (18)$$

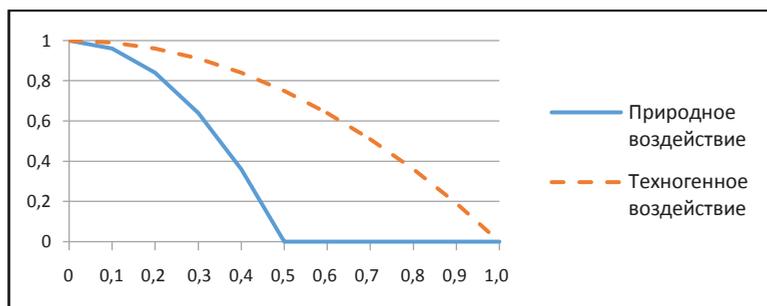


Рис. 2. Природно-техногенное подобное воздействие на ПТС вида (18)

Воздействия такого вида (параболического), например со стороны геологической среды, характеризуют воздействия геодинамических опасностей, интенсивность которых плавно уменьшается с расстоянием от эпицентра их проявления. К таким опасностям относятся криповые, карстово-деформационные, просадочные, оползневые процессы, охватывающие территории локального, районного и регионального масштабного уровней. В отношении техносферы в качестве примеров можно привести пожары, выброс химических веществ, выпадение радиоактивных осадков.

Найдем матрицу изменений внешних природно-техногенных воздействий на ПТС:

$$L(t) = (L^{(0)}(t))' = \begin{pmatrix} L_1^{(0)}(t) \\ L_2^{(0)}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \xi_1 - \eta_1 t^2 \\ \xi_2 - \eta_2 t^2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2\eta_1 t \\ -2\eta_2 t \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} L_1(t) = -2\eta_1 t, \\ L_2(t) = -2\eta_2 t. \end{cases} \quad (19)$$

Будем искать частное решение системы (1) для случая (18) методом вариации произвольной постоянной. Для этой цели представим систему (2) следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{r}_1(t) = C_1(t)e^{\lambda_1 t} + C_2(t)e^{\lambda_2 t}, \\ \tilde{r}_2(t) = C_1(t)\frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1}e^{\lambda_1 t} + C_2(t)\frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1}e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (20)$$

Продифференцируем уравнения системы (20):

$$\frac{d\tilde{r}_1(t)}{dt} = C_1'(t)e^{\lambda_1 t} + C_1(t)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2'(t)e^{\lambda_2 t} + C_2(t)\lambda_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (20.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{r}_2(t)}{dt} = & C_1'(t)\frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1}e^{\lambda_1 t} + C_1(t)\frac{\lambda_1(\lambda_1 - a_1)}{b_1}e^{\lambda_1 t} + \\ & + C_2'(t)\frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1}e^{\lambda_2 t} + C_2(t)\frac{\lambda_2(\lambda_2 - a_1)}{b_1}e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (20.2)$$

Минаев В.А. и др. Динамические модели природно-техногенных рисков

С другой стороны, согласно системе (20) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{r}_1(t)}{dt} = & a_1 C_1(t) e^{\lambda_1 t} + a_1 C_2(t) e^{\lambda_2 t} + b_1 \frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} C_1(t) e^{\lambda_1 t} + \\ & + b_1 \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} C_2(t) e^{\lambda_2 t} + L_1(t), \end{aligned} \quad (21.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{r}_2(t)}{dt} = & a_2 C_1(t) e^{\lambda_1 t} + a_2 C_2(t) e^{\lambda_2 t} + b_2 \frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} C_1(t) e^{\lambda_1 t} + \\ & + b_2 \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} C_2(t) e^{\lambda_2 t} + L_2(t). \end{aligned} \quad (21.2)$$

Приравнивая правые части выражений (20.1) и (21.1), выполняя группировку и делая соответствующие преобразования, получим

$$C_1'(t) e^{\lambda_1 t} + C_2'(t) e^{\lambda_2 t} = L_1(t). \quad (22)$$

Продельвая схожие действия с выражениями (20.2) и (21.2), запишем

$$C_1'(t) \frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_1 t} + C_2'(t) \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_2 t} = L_2(t). \quad (23)$$

В итоге получаем следующую систему:

$$\begin{cases} C_1'(t) e^{\lambda_1 t} + C_2'(t) e^{\lambda_2 t} = L_1(t), \\ C_1'(t) \frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_1 t} + C_2'(t) \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} e^{\lambda_2 t} = L_2(t). \end{cases} \quad (24)$$

Производя интегрирование (24), получим окончательные выражения для функций  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$ :

$$\begin{cases} C_1(t) = \int \frac{[b_1 L_2(t) - (\lambda_2 - a_1) L_1(t)] e^{-\lambda_1 t} dt}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ C_2(t) = \int [L_1(t) e^{-\lambda_2 t} - C_1'(t) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}] dt. \end{cases} \quad (25)$$

Подставляя в (25) выражения (19) и осуществляя интегрирование, найдем

$$C_1(t) = \frac{2[\eta_2 b_1 - \eta_1 (\lambda_2 - a_1)](1 + \lambda_1 t)}{\lambda_1^2 (\lambda_1 - \lambda_2)} e^{-\lambda_1 t} + \tilde{C}_1, \quad (26)$$

$$C_2(t) = \frac{2[\eta_1 (\lambda_1 - a_1) - \eta_2 b_1](1 + \lambda_2 t)}{\lambda_2^2 (\lambda_1 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} + \tilde{C}_2, \quad (27)$$

где  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  – постоянные коэффициенты, учитывающие изменения природных и техногенных воздействий на ПТС в начальный момент времени.

Окончательно получаем

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\pi}_1(t) &= \frac{2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ \frac{(\eta_2 b_1 - \eta_1(\lambda_2 - a_1))(1 + \lambda_1 t)}{\lambda_1^2} + \frac{[\eta_1(\lambda_1 - a_1) - \eta_2 b_1](1 + \lambda_2 t)}{\lambda_2^2} \right\} + \\ &+ D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \bar{\pi}_2(t) &= \frac{2}{b_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ \frac{(\lambda_1 - a_1)[\eta_2 b_1 - \eta_1(\lambda_2 - a_1)](1 + \lambda_1 t)}{\lambda_1^2} + \frac{(\lambda_1 - a_1)[\eta_1(\lambda_1 - a_1) - \eta_2 b_1](1 + \lambda_2 t)}{\lambda_2^2} \right\} + \\ &+ \frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} D_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} D_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \right. \quad (28)$$

где  $D_1 = C_1 + \tilde{C}_1$ ;  $D_2 = C_2 + \tilde{C}_2$ .

Итак, выше обоснованы и реализованы две новые математические модели оценки природно-техногенного риска, возникающего в природно-технических системах под влиянием функционально подобных воздействий, то есть воздействий со стороны природных и техногенных факторов, описываемых функциональными зависимостями одного вида. Первая модель характеризуется линейным видом воздействий и описывает проявления подвижек, возникающих в геологической среде и приводящих к возникновению катастрофических сейсмических событий. Подобные виды воздействий характеризуются внезапными аварийными ситуациями на объектах техносферы, например, взрывами оборудования, обрушениями зданий, сооружений, различных конструкций. Вторая модель описывает воздействия параболического вида, интенсивность которых плавно уменьшается с расстоянием от эпицентра их проявления. Они описывают криповые, карстово-деформационные, просадочные, оползневые процессы.

Развивая динамическую модель природных и техногенных рисков, описываемую дифференциальными уравнениями (1), далее разрешим их для случаев, когда на природно-техническую систему оказываются функционально различные природные и техногенные воздействия.

*Результаты моделирования рисков при функционально различных природных и техногенных воздействиях*

**Случай 1.** Пусть техногенные воздействия отражают проявления подвижек, возникающих в геологической среде и приводящих к возникновению катастрофических сейсмических событий на территориях. Подобные виды воздействий показаны на рисунке 3 в виде второго уравнения (29) для  $L_2^{(0)}(t)$ .

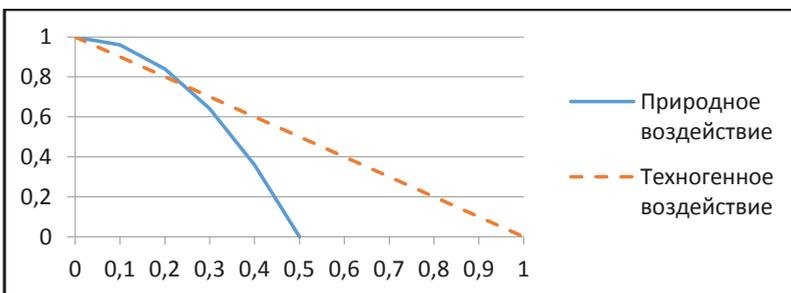


Рис. 3. Природно-техногенное функционально различающееся воздействие вида (29) на ПТС

Минаев В.А. и др. Динамические модели природно-техногенных рисков

В то же время природные воздействия описываются уравнением параболического вида (первое уравнение в (29) для  $L_1^{(0)}(t)$ ), интенсивность которых плавно уменьшается с расстоянием от эпицентра их проявления, отражая так называемые медленные катастрофы – криповые, карстово-деформационные, просадочные, оползневые процессы:

$$\begin{cases} L_1^{(0)}(t) = \xi_1 - \eta_1 t^2, \\ L_2^{(0)}(t) = \xi_2 - \eta_2 t, \end{cases} \quad (29)$$

где  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  – некоторые постоянные коэффициенты.

Матрица изменений внешних природно-техногенных воздействий на ПТС для (29) имеет вид

$$L(t) = (L^{(0)}(t))' = \begin{pmatrix} L_1^{(0)}(t) \\ L_2^{(0)}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \xi_1 - \eta_1 t^2 \\ \xi_2 - \eta_2 t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2\eta_1 t \\ -\eta_2 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

или

$$\begin{cases} L_1(t) = -2\eta_1 t, \\ L_2(t) = -\eta_2. \end{cases} \quad (31)$$

Применяя процедуру, описанную выше, определим  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$  как частные решения системы (30) для случая внешних природно-техногенных воздействий на ПТС вида (29) (см. рис. 3).

Для  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$  имеем

$$C_1(t) = -\frac{1}{\lambda_1^2(\lambda_1 - \lambda_2)} [2\eta_1(\lambda_2 - a_1)(1 + \lambda_1 t) - b_1\eta_2\lambda_1] e^{-\lambda_1 t} + \tilde{C}_1, \quad (32)$$

$$C_2(t) = \frac{[2\eta_1(\lambda_1 - a_1)(1 + \lambda_2 t) - b_1\eta_2\lambda_2] e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \tilde{C}_2, \quad (33)$$

где  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  – произвольные постоянные интегрирования;  $\lambda_1, \lambda_2$  – корни однородного характеристического уравнения для (1).

Тогда соотношения для функций изменения природно-техногенного риска для ПТС, в случае совместного функционально различающегося воздействия вида (29) со стороны природной среды и техносферы, в итоге примут следующий вид:

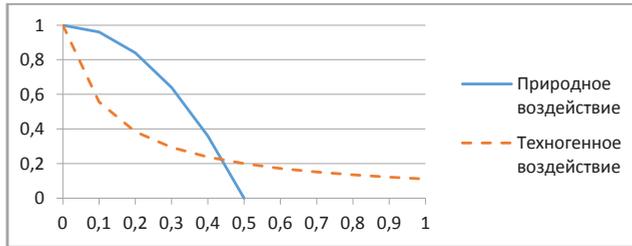
$$\begin{cases} \bar{r}_1(t) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + V_1^{(3)}(t), \\ \bar{r}_2(t) = \frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} D_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} D_2 e^{\lambda_2 t} + V_2^{(3)}(t), \end{cases} \quad (34)$$

где  $D_1, D_2$  – постоянные коэффициенты, учитывающие изменения природных и техногенных воздействий на ПТС в начальный момент времени, а функции  $V_1^{(3)}(t)$  и  $V_2^{(3)}(t)$  определяются уравнениями

$$\begin{cases} V_1^{(3)}(t) = \frac{b_1\eta_2\lambda_1 - 2\eta_1(\lambda_2 - a_1)(1 + \lambda_1 t)}{\lambda_1^2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{2\eta_1(\lambda_1 - a_1)(1 + \lambda_2 t) - b_1\eta_2\lambda_2}{\lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ V_2^{(3)}(t) = \frac{(\lambda_1 - a_1)[b_1\eta_2\lambda_1 - 2\eta_1(\lambda_2 - a_1)(1 + \lambda_1 t)]}{b_1\lambda_1^2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{(\lambda_2 - a_1)[2\eta_1(\lambda_1 - a_1)(1 + \lambda_2 t) - b_1\eta_2\lambda_2]}{b_1\lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_2)}. \end{cases} \quad (35)$$

**Случай 2.** Рассмотрим на рисунке 4 функционально различающиеся воздействия вида.

$$\begin{cases} L_1^{(0)}(t) = \xi_1 - \eta_1 t^2, \\ L_2^{(0)}(t) = \frac{1}{\xi_2 + \eta_2 t}. \end{cases} \quad (36)$$



**Рис. 4.** Природно-техногенное функционально различающееся воздействие вида (36) на ПТС

Из рисунка 4 следует, что природное воздействие описывается уравнением параболического вида. Первое уравнение в (36), интенсивность которого плавно уменьшается с расстоянием от эпицентра его проявления, в то время как интенсивность техногенного воздействия (второе уравнение в (36)), снижается с течением времени. Матрица изменений внешних природно-техногенных воздействий на ПТС имеет вид

$$L(t) = (L^{(0)}(t))' = \begin{pmatrix} L_1^{(0)}(t) \\ L_2^{(0)}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \xi_1 - \eta_1 t^2 \\ \frac{1}{\xi_2 + \eta_2 t} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2\eta_1 t \\ -\frac{\eta_2}{(\xi_2 + \eta_2 t)^2} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

или

$$L(t) = \begin{cases} L_1(t) = -2\eta_1 t, \\ L_2(t) = -\frac{\eta_2}{(\xi_2 + \eta_2 t)^2}. \end{cases} \quad (38)$$

Найдем частные решения  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$  системы (2) для случая внешних природно-техногенных воздействий на ПТС вида (36), также используя вышеприведенные результаты:

$$C_1(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ 2\eta_1(\lambda_2 - a_1) \int t e^{-\lambda_1 t} dt - b_1 \eta_2 \int \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\xi_2 + \eta_2 t)^2} dt \right\}. \quad (39)$$

Анализируя (39), видим, что взятие первого интеграла не составляет особого труда, однако второй относится к классу «неберущихся».

Для его приближенного нахождения разложим подынтегральную функцию

$$f(t) = \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\xi_2 + \eta_2 t)^2} \quad (40)$$

в степенной ряд в окрестности точки  $t = t_0$ .

Минаев В.А. и др. Динамические модели природно-техногенных рисков

Для этой цели найдем последовательно производные от функции (40).  
Производная первого порядка от функции (40) имеет следующий вид:

$$f'(t) = -\frac{[\lambda_1(\xi_2 + \eta_2 t) + 2\eta_2]e^{-\lambda_1 t}}{(\xi_2 + \eta_2 t)^3}. \quad (41)$$

Найдем производную от функции (40) второго порядка:

$$f''(t) = \frac{[\lambda_1^2(\xi_2 + \eta_2 t)^2 + 4\lambda_1\eta_2(\xi_2 + \eta_2 t) + 6\eta_2^2]e^{-\lambda_1 t}}{(\xi_2 + \eta_2 t)^4}. \quad (42)$$

Тогда производная третьего порядка будет определяться соотношением

$$f'''(t) = -\frac{[\lambda_1^3(\xi_2 + \eta_2 t)^3 + 6\lambda_1^2\eta_2(\xi_2 + \eta_2 t)^2 + 18\lambda_1\eta_2^2(\xi_2 + \eta_2 t) + 24\eta_2^3]e^{-\lambda_1 t}}{(\xi_2 + \eta_2 t)^5}. \quad (43)$$

Выполняя дальнейшее дифференцирование функции (40) по переменной  $t$ , придем к следующему рекуррентному соотношению:

$$f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n \left[ \lambda_1^n (\xi_2 + \eta_2 t)^n + \sum_{m=2}^n m \lambda_1^{n-m+1} \eta_2^{m-1} (\xi_2 + \eta_2 t)^{n-m+1} \prod_{k=0}^{n-2} (n-k) + (n+1)! \eta_2^n \right] e^{-\lambda_1 t}}{(\xi_2 + \eta_2 t)^{n+2}}. \quad (44)$$

Учитывая (44), функцию (40) представим в окрестности точки  $t_0$  в виде ряда, разложенного по степеням  $(t - t_0)$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \\ &+ \frac{f'''(t_0)}{3!}(t - t_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Степенной ряд (45) сходится как в окрестности точки  $t_0$ , так и во всех точках интервала  $[0; 1]$ , являющегося модельным интервалом изменения переменной  $t$ .

Численные оценки, выполненные авторами, показали, что необходимая точность расчетов 0,001% достигается при учете первых семи членов ряда (45). Вводя обозначения  $W_0 = f(t_0)$ ;  $W_1 = f'(t_0)/1!$ ;  $W_2 = f''(t_0)/2!$ ; ...;  $W_6 = f^{(6)}(t_0)/6!$ , запишем функцию (40) в следующем виде:

$$f(t) = \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\xi_2 + \eta_2 t)^2} = \sum_{n=0}^6 W_n (t - t_0)^n / n!. \quad (46)$$

Тогда второй интеграл выражения (39) представляется в виде

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-\lambda_1 t} dt}{(\xi_2 + \eta_2 t)^2} &= \int \sum_{n=0}^6 W_n (t - t_0)^n / n! dt = \int [W_0 + W_1(t - t_0)/1! + W_2(t - t_0)^2/2! + W_3(t - t_0)^3/3! + \\ &+ W_4(t - t_0)^4/4! + W_5(t - t_0)^5/5! + W_6(t - t_0)^6/6!] dt = W_0 t + \frac{W_1(t - t_0)^2}{2!} + \frac{W_2(t - t_0)^3}{3!} + \\ &+ \frac{W_3(t - t_0)^4}{4!} + \frac{W_4(t - t_0)^5}{5!} + \frac{W_5(t - t_0)^6}{6!} + \frac{W_6(t - t_0)^7}{7!} + C_0 = W_0 t + \sum_{p=1}^6 \frac{W_p (t - t_0)^{p+1}}{(p+1)!} + C_0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\int \frac{e^{-\lambda_1 t} dt}{(\xi_2 + \eta_2 t)^2} = W_0 t + \sum_{p=1}^6 \frac{W_p (t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!} + C_0. \quad (47)$$

Находя первый интеграл из выражения (39) и последовательно преобразовывая это выражение, получим окончательное соотношение для функции  $C_1(t)$ :

$$C_1(t) = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \frac{2\eta_1(\lambda_2 - a_1)(1 + \lambda_1 t)}{\lambda_1^2} e^{-\lambda_1 t} + b_1 \eta_2 X(t) \right] + \tilde{C}_1, \quad (48)$$

где  $\tilde{C}_1$  – произвольная постоянная интегрирования, а функция  $X(t)$  определяется выражением

$$X(t) = W_0 t + \sum_{p=1}^6 \frac{W_p (t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!}. \quad (49)$$

Найдем производную от функции  $C_1(t)$ :

$$C_1'(t) = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ 2\eta_1(\lambda_2 - a_1) t e^{-\lambda_1 t} - b_1 \eta_2 \Phi(t) \right], \quad (50)$$

где функция  $\Phi(t)$  определяется выражением

$$\Phi(t) = \sum_{q=0}^6 W_q (t-t_0)^q, \quad (51)$$

а коэффициенты  $W_q$  имеют тот же смысл, что и коэффициенты разложения в (45).

Определим, как показано выше, функцию  $C_2(t)$ :

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \int \left\{ -2\eta_1 t e^{-\lambda_2 t} - \frac{[2\eta_1(\lambda_2 - a_1) t e^{-\lambda_1 t} - b_1 \eta_2 \Phi(t)] e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} dt = \\ &= -\frac{2\eta_1(\lambda_1 - a_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \int t e^{-\lambda_2 t} dt + \frac{b_1 \eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \int \Phi(t) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} dt = \\ &= \frac{2\eta_1(\lambda_1 - a_1)}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left( t + \frac{1}{\lambda_2} \right) e^{-\lambda_2 t} + \frac{b_1 \eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \Phi(t) \frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int \Phi'(t) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} dt \right]. \quad (52) \end{aligned}$$

Вычислим ненайденный интеграл в последнем выражении. Для этой цели введем обозначение  $\Phi'(t) = \sum_{\alpha=1}^6 \alpha W_\alpha (t-t_0)^{\alpha-1} = \Psi(t)$ , в итоге получаем

$$\int \Psi(t) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} dt = \frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{\beta=0}^5 G_\beta (t-t_0)^\beta + C_0, \quad (53)$$

где  $\left\{ \begin{array}{l} G_0 = W_1 - \frac{G_1}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad G_1 = 2W_2 - \frac{2G_2}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad G_2 = 3W_3 - \frac{3G_3}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ G_3 = 4W_4 - \frac{4G_4}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad G_4 = 5W_5 - \frac{30W_6}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad G_5 = 6W_6. \end{array} \right.$

Минаев В.А. и др. Динамические модели природно-техногенных рисков

Окончательно функция  $C_2(t)$  записывается в виде

$$C_2(t) = \frac{2\eta_1(\lambda_1 - a_1)(1 + \lambda_2 t)}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} + \frac{b_1 \eta_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left[ \Phi(t) - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \Theta(t) \right] e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + \tilde{C}_2, \quad (54)$$

где функции  $\Phi(t)$  и  $\Theta(t)$  определяются соотношениями

$$\begin{cases} \Phi(t) = \sum_{q=0}^6 W_q (t - t_0)^q; \\ \Theta(t) = \sum_{\beta=0}^5 G_{\beta} (t - t_0)^{\beta}. \end{cases} \quad (55)$$

В конечном итоге функции изменения природно-техногенного риска в ПТС для случая совместного функционально различающегося воздействия вида (36) со стороны природной среды и техносферы представляются в виде

$$\begin{cases} \bar{\eta}_1(t) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + \Omega_1(t) e^{\lambda_1 t} + V_1^{(4)}(t), \\ \bar{\eta}_2(t) = \frac{(\lambda_1 - a_1)}{b_1} D_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_2 - a_1)}{b_1} D_2 e^{\lambda_2 t} + \Omega_2(t) e^{\lambda_1 t} + V_2^{(4)}(t), \end{cases} \quad (56)$$

где  $D_1, D_2$  – постоянные коэффициенты; функции  $V_1^{(4)}(t)$  и  $V_2^{(4)}(t)$  определяются из уравнений

$$\begin{cases} V_1^{(4)}(t) = \frac{2\eta_1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[ \frac{(\lambda_1 - a_1)(1 + \lambda_2 t)}{\lambda_2} - \frac{(\lambda_2 - a_1)(1 + \lambda_1 t)}{\lambda_1} \right], \\ V_2^{(4)}(t) = \frac{2\eta_1}{b_1 \lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)} \left[ \frac{(\lambda_2 - a_1)(\lambda_1 - a_1)(1 + \lambda_2 t)}{\lambda_2} - \frac{(\lambda_1 - a_1)(\lambda_2 - a_1)(1 + \lambda_1 t)}{\lambda_1} \right], \end{cases} \quad (57)$$

а функции  $\Omega_1(t)$  и  $\Omega_2(t)$  – из уравнений

$$\begin{cases} \Omega_1(t) = \frac{b_1 \eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \Phi(t) - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \Theta(t) \right] - X(t) \right\}, \\ \Omega_2(t) = \frac{\eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \frac{(\lambda_2 - a_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \Phi(t) - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \Theta(t) \right] - (\lambda_1 - a_1) X(t) \right\}. \end{cases} \quad (58)$$

Таким образом, неоднородная система уравнений (1), описывающая взаимосвязанную систему рисков природного и техногенного характера, на которую дополнительно накладываются влияния опасных функционально различающихся воздействий внешних природных и техногенных факторов, имеет понятные, хорошо интерпретируемые аналитические решения для ряда случаев. Представленные решения отличаются друг от друга видами воздействий: в первой модели рассматривается сочетание параболического (отражающего угрозы, интенсивность которых плавно уменьшается с расстоянием от эпицентра) и линейного (отражающего внезапно возникающие угрозы) воздействий; во второй модели – сочетание параболического и гиперболического (отражающего угрозы, интенсивность которых резко уменьшается с течением времени) видов воздействия.

### Выводы

1. В статье обоснованы и реализованы две новые математические модели динамики природно-техногенного риска, возникающего в природно-технических системах под влиянием функционально подобных воздействий, влияние которых на ПТС со стороны природных и техногенных факторов описывается функциональными зависимостями одного вида; а также две новые модели динамики природно-техногенного риска, возникающего в ПТС под влиянием функционально различающихся воздействий, влияние которых со стороны природных и техногенных факторов описываются разными функциональными зависимостями.

2. Применительно к первому (подобному) типу воздействия относится первая модель, характеризующаяся линейным видом воздействий и описывающая проявления подвижек, возникающих в геологической среде и приводящих к возникновению катастрофических сейсмических событий. Подобные типы воздействий характеризуются внезапными аварийными ситуациями на объектах техносферы, например, взрывами оборудования, обрушениями зданий, сооружений, различных конструкций. Вторая модель подобного типа описывает воздействия параболического вида, интенсивность которых плавно уменьшается с расстоянием от эпицентра их проявления. Они описывают криповые, карстово-деформационные, просадочные, оползневые процессы.

3. Представленные модели второго типа отличаются друг от друга видами воздействий. В третьей модели рассматриваются совместно параболический (отражающий угрозы, интенсивность которых плавно уменьшается с расстоянием от эпицентра) и линейный (отражающий внезапно возникающие угрозы) виды воздействий. В четвертой модели рассматривается параболический и гиперболический (отражающий угрозы, интенсивность которых резко уменьшается с течением времени) виды воздействий.

4. Общий подход к моделированию природных и техногенных рисков, а также представленные решения направлены на использование в аналитической деятельности служб, осуществляющих предупредительную работу в связи с угрозами природного и техногенного характера, реагирующих на последствия реализовавшихся угроз. В основном это подразделения МЧС России, производящие анализ возникновения рискованных ситуаций и прогнозирование их развития. Рассмотренные модели легко адаптируемы к учету внешних природных и техногенных воздействий иного вида, например, экспоненциального или колебательного, нередко случающихся в реальной действительности. Кроме того, описанный теоретический подход к построению динамической модели может быть распространен на другие классы (типы) рисков, например антропогенных.

5. На конкретном примере показано, что в случае сложных видов воздействий на ПТС, описываемых функционально «трудными» математическими соотношениями, можно применять их упрощенное представление в виде разложения в ряды и ограничиваться, в зависимости от требуемой точности расчетов, несколькими начальными членами ряда.

6. Опыт моделирования показал, что математически можно достаточно точно описать практически любые виды сочетанного природно-техногенного воздействия на природно-технические системы. По результатам такого описания необходимо, на наш взгляд, составить специальный атлас комплексных воздействий на ПТС с целью превентивного

Минаев В.А. и др. Динамические модели природно-техногенных рисков

«проигрывания» различных ситуаций и выработки наиболее эффективного противодействия возникающим опасностям со стороны подразделений МЧС и других заинтересованных структур.

### Литература

1. Агафонов С.А., Муратова Т.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Academia, 2018. 352 с.
2. Акимов В.А., Новиков В.Д., Радаев Н.Н. Природные и техногенные чрезвычайные ситуации: опасности, угрозы, риски. М.: Деловой экспресс, 2001. 344 с.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012. 344 с.
4. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера / С.К. Шойгу и др. М.: Знание, 1999. 162 с.
5. Геодинамические риски и строительство. Математические модели / В.А. Минаев и др. М.: Академия ГПС МЧС России, 2017. 208 с.
6. Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения. СПб.: Лань, 2006. 288 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. 576 с.
8. Минаев В.А., Фаддеев А.О. Безопасность и отдых: системный взгляд на проблему рисков // Туризм и рекреация: фундаментальные и прикладные исследования: труды II Международной научно-практической конференции (Москва, 20 апреля 2007 г.). М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008. С. 329–334.
9. Минаев В.А., Фаддеев А.О. Методика оценки геоэкологического риска и геоэкологической безопасности ландшафтно-территориальных комплексов // Системы безопасности – 2008: материалы семнадцатой научно-технической конференции (Москва, 30 октября 2008 г.). М.: Академия ГПС МЧС России, 2008. С. 96–102.
10. Минаев В.А., Фаддеев А.О. Оценки геоэкологических рисков. Моделирование безопасности туристско-рекреационных территорий. М.: Финансы и статистика: ИНФРА-М, 2009. 370 с.
11. Минаев В.А., Фаддеев А.О., Кузьменко Н.А. Моделирование и оценка геодинамических рисков. М.: РТСофт – Космоскоп, 2017. 256 с.
12. Модели и механизмы управления безопасностью / В.Н. Бурков и др. М.: СИНТЕГ, 2001. 160 с.
13. Моделирование геодинамических рисков в чрезвычайных ситуациях: монография / А.В. Абрамова и др.; под ред. К.М. Бондаря, В.А. Минаева, А.О. Фаддеева. Хабаровск: ДВЮИ МВД России, 2014. 124 с.
14. Шойгу С.К., Воробьев Ю.А., Владимиров В.А. Катастрофы и государство. М.: Энергоатомиздат, 1997. 160 с.

### Literatura

1. Agafonov S.A., Muratova T.V. Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. M.: Academia, 2018. 352 s.
2. Akimov V.A., Novikov V.D., Radaev N.N. Prirodnye i tekhnogennye chrezvychajnye situatsii: opasnosti, ugrozy, riski. M.: Delovoj ekspress, 2001. 344 s.
3. Arnol'd V.I. Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. M.: MTsNMO, 2012. 344 s.

4. Bezopasnost' Rossii. Pravovye, sotsial'no-ekonomicheskie i nauchno-tehnicheskie aspekty. Zashchita naseleniya i territorij ot chrezvychajnykh situatsij prirodnogo i tekhnogenogo kharaktera / S.K. Shojgu i dr. M.: Znanie, 1999. 162 s.
5. Geodinamicheskie riski i stroitel'stvo. Matematicheskie modeli / V.A. Minaev i dr. M.: Akademiya GPS MChS Rossii, 2017. 208 s.
6. Demidovich B.P., Modenov V.P. Differentsial'nye uravneniya. SPb.: Lan', 2006. 288 s.
7. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. M.: Nauka: Gl. red. fiz.-mat. lit., 1971. 576 s.
8. Minaev V.A., Faddeev A.O. Bezopasnost' i otdykh: sistemnyj vzglyad na problemu riskov // Turizm i rekreatsiya: fundamental'nye i prikladnye issledovaniya: trudy II Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferentsii (Moskva, 20 aprelya 2007 g.). M.: MGU im. M.V. Lomonosova, 2008. S. 329–334.
9. Minaev V.A., Faddeev A.O. Metodika otsenki geoeologicheskogo riska i geoeologicheskoy bezopasnosti landshaftno-territorial'nykh kompleksov // Sistemy bezopasnosti – 2008: materialy semnadsatoj nauchno-tehnicheskoy konferentsii (Moskva, 30 oktyabrya 2008 g.). M.: Akademiya GPS MChS Rossii, 2008. S. 96–102.
10. Minaev V.A., Faddeev A.O. Otsenki geoeologicheskikh riskov. Modelirovanie bezopasnosti turistsko-rekreatsionnykh territorij. M.: Finansy i statistika: INFRA-M, 2009. 370 s.
11. Minaev V.A., Faddeev A.O., Kuz'menko N.A. Modelirovanie i otsenka geodinamicheskikh riskov. M.: RTSof – Kosmoskop, 2017. 256 s.
12. Modeli i mekhanizmy upravleniya bezopasnost'yu / V.N. Burkov i dr. M.: SINTEG, 2001. 160 s.
13. Modelirovanie geodinamicheskikh riskov v chrezvychajnykh situatsiyakh: monografiya / A.V. Abramova i dr.; pod red. K.M. Bondarya, V.A. Minaeva, A.O. Faddeeva. Khabarovsk: DVYuI MVD Rossii, 2014. 124 s.
14. Shojgu S.K., Vorob'ev Yu.L., Vladimirov V.A. Katastrofy i gosudarstvo. M.: Energoatomizdat, 1997. 160 s.

DOI: 10.25586/RNU.V9187.20.02.P.018

УДК 007+621.391.82

Е.А. Алтай, А.С. Кремлев

---

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОБРАБОТКИ ЭЛЕКТРОКАРДИОСИГНАЛА МЕТОДОМ КАСКАДНОЙ ШИРОКОПОЛОСНОЙ РЕЖЕКТОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ\*

---

Представлены результаты обработки записи электрокардиосигналов на основе метода каскадной широкополосной режекторной фильтрации. В качестве аппроксимирующего полинома широкополосного режекторного фильтра предложено использовать полиномы Ньютона. Для устранения низкоамплитудных затухающих колебаний, вырабатываемых режекторными фильтрами, представлены результаты двунаправленной реализации каскада режекторных фильтров Ньютона. Продемонстрирована работоспособность двунаправленной реализации каскада режекторных фильтров и на основе анализа количественных показателей оценена точность фильтрации ЭКС.

*Ключевые слова:* фильтрация, электрокардиосигнал, режекторный фильтр, широкополосная электрическая помеха, каскадный фильтр, полином Ньютона, двунаправленная фильтрация.

---

\* Работа выполнена при поддержке Правительства Российской Федерации (грант 08-08).