

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI: 10.18137/RNU.V9I187.24.02.P3

УДК 621.9.047;532.528

Н.М. Миназетдинов

ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА МЕТАЛЛОВ НЕПОДВИЖНЫМ КАТОДОМ-ИНСТРУМЕНТОМ

Аннотация. Построена математическая модель двумерной задачи электрохимической обработки металлов неподвижным катодом-инструментом. Электрическое поле в межэлектродном промежутке описывается моделью идеального процесса. Выполнены расчеты безразмерных координат точек искомой границы и времени ее обработки для различных значений начального межэлектродного зазора.

Ключевые слова: электрохимическая обработка металлов, потенциал, идеальная несжимаемая жидкость, гармоническая функция.

N.M. Minazetdinov

ELECTROCHEMICAL MACHINING OF METALS WITH MOTIONLESS CATHODE-TOOLS

Abstract. A mathematical model of two-dimensional problem of electrochemical machining of metals with a fixed cathode-tool is constructed. The electric field in the interelectrode gap is described by the model of "ideal process". Dimensionless coordinates of the points of the desired boundary and its processing time for different values of the initial interelectrode gap are calculated.

Keywords: electrochemical machining of metals, potential, ideal incompressible fluid, harmonic function.

Введение

Электрохимическая обработка металлов является эффективным и перспективным методом изготовления деталей различных устройств. Электрохимическое формообразование основано на явлении анодного растворения металла [1].

В работе рассматривается двумерная задача расчета формы обрабатываемой поверхности (анода), получающейся при электрохимической обработке неподвижным катодом-инструментом заданной формы. В процессе обработки анодная плотность тока j_a на обрабатываемой поверхности достигает предельного значения j_{np} , при котором происходит прекращение обработки, и конфигурация межэлектродной области не меняется с течением времени [1; 2].

Описание электродных процессов при электрохимической обработке представлено в монографии [1]. Установлено, что в процессе обработки неподвижным катодом-инструментом обрабатываемая поверхность покрывается слоем продуктов электрохимических реакций, происходящих в межэлектродном промежутке. Увеличение анодного потенциала не приводит (или почти не приводит) к увеличению j_a ; оно компенсируется утолщением слоя продуктов реакций, осаждающихся на поверхности анода.

Миназетдинов Наиль Миргазиянович

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и естественно-научных дисциплин, Российский новый университет, Москва. Сфера научных интересов: приложения методов теории струйных течений идеальной жидкости в задачах теории электрохимической обработки металлов. Автор 40 опубликованных научных работ. SPIN-код: 7544-6638, AuthorID: 198232. Электронный адрес: nminazetdinov@yandex.ru

Величина j_{np} зависит от свойств электролита, обрабатываемого материала, ряда других параметров и устанавливается экспериментально [1].

Кроме обрабатываемых участков на поверхности заготовки могут существовать необрабатываемые участки, на которых происходит снижение анодного тока до значений, недостаточных для осуществления анодного растворения металла, например, участки анода, удаленные от рабочей части катода [1; 2].

Постановка задачи и численно-аналитический метод ее решения

Рассмотрим двумерную задачу электрохимической обработки, состоящую в определении формы анодной границы при ее обработке неподвижным двугранным катодом-инструментом. Сечение катода координатной плоскостью Ox_1y_1 представляет угол DCF (см. Рисунок 1, *a*), угол при вершине C равен $\alpha\pi$. Начало системы координат совпадает с вершиной C катода. Перед началом процесса электрохимической обработки граница заготовки детали представляется прямой $D'F'$. Точки D, D' и F, F' являются бесконечно удаленными. Величина зазора между гранью катода DC и границей заготовки $D'F'$ равна S_1 . Через межэлектродный промежуток осуществляется прокачка раствора электролита.

На поверхности анода существует обрабатываемый участок $D'A$ (см. Рисунок 2, *b*), здесь межэлектродные зазоры малы. В процессе обработки на обрабатываемой поверхности $D'A$ устанавливается предельная плотность тока j_{np} . На поверхности заготовки можно выделить необрабатываемый участок, представленный отрезком AF' (см. Рисунок 2, *b*), в точках которой из-за увеличения межэлектродных зазоров величина анодного тока недостаточна для осуществления анодного растворения металла [1].

Ордината точки A перехода с обрабатываемой части $D'A$ анодной границы на участок AF' равна S_1 .

В работе применяется модель идеального процесса [1], в которой предполагается постоянство во времени и в межэлектродном пространстве свойств электролита и не учитываются особенности электродных процессов. Принятые допущения означают, что удельная электропроводность электролита κ , выход по току B_T для реакций анодного растворения металла, E_a, E_c – потенциалы анода и катода соответственно в модели являются постоянными величинами.

В области $G_{z_1} (z_1 = x_1 + iy_1, i^2 = -1)$ межэлектродного промежутка на основе допущений модели идеального процесса потенциал u и электрического поля является гармонической функцией с условиями на границах анода и катода-инструмента:

$$u_a = U - E_a, \quad u_c = -E_c, \quad (1)$$

где U – напряжение [1].

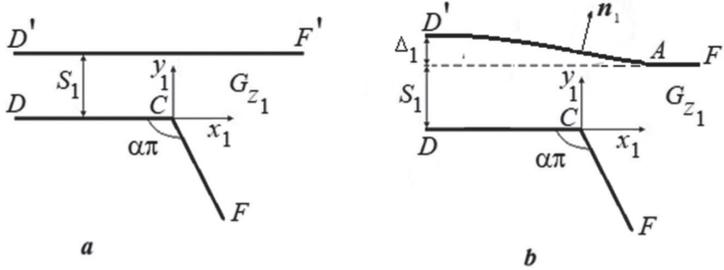


Рисунок 1. Геометрия межэлектродного промежутка:
a – до начала процесса обработки; *b* – получаемая в процессе обработки
 Источник: здесь и далее рисунки выполнены автором.

При постоянном напряжении $U = U_0$ время t_k , необходимое для снятия припуска Δ_1 в сечении DD' межэлектродного промежутка (см. Рисунок 1, *b*), можно определить по известной формуле [1]

$$t_k = \frac{(2S_1 + \Delta_1)\Delta_1}{2D}, \quad (2)$$

где $D = k_V \kappa (U_0 - E_a + E_c) = k_V \kappa (u_a - u_c)$, $k_V = B_T \frac{\varepsilon}{\rho}$ – объем растворенного материала анода при прохождении 1 Кл электричества; ε – электрохимический эквивалент металла; ρ – плотность обрабатываемого материала.

Величину припуска $\Delta_{1,нр}$, при которой на анодной границе устанавливается предельная плотность тока, будем называть предельной.

Величину $\Delta_{1,нр}$ и время $t_{k,нр}$, необходимое для снятия предельного припуска, будем определять из условия, что на обработанной части заготовки выполняется равенство

$$j_a = j_{нр}. \quad (3)$$

Согласно закону Ома $j_a = \kappa \frac{\partial u}{\partial n_1}$, где n_1 – вектор нормали к аноду (см. Рисунок 1, *b*), тогда

$$j_{нр} = \kappa \frac{u_a - u_c}{H}, \quad \text{где } H = S_1 + \Delta_{1,нр}. \quad (4)$$

Из выражения (4) следует, что

$$H = \kappa \frac{u_a - u_c}{j_{нр}}. \quad (5)$$

Таким образом, величина припуска $\Delta_{1,нр}$

$$\Delta_{1,нр} = H - S_1 = \kappa \frac{u_a - u_c}{j_{нр}} - S_1. \quad (6)$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$z = \frac{z_1}{H} = x + iy, x = \frac{x_1}{H}, y = \frac{y_1}{H}, S = \frac{S_1}{H}, \Delta_{np} = \frac{\Delta_{1,np}}{H}, \tau = \frac{2D}{H^2} t, \quad (7)$$

где t – время; τ – безразмерное время.

Тогда безразмерную величину предельного припуска Δ_{np} и безразмерное время $\tau_{k,np}$, необходимое для снятия припуска Δ_{np} , можно определить по формулам

$$\Delta_{np} = 1 - S, \quad (8)$$

$$\tau_{k,np} = \frac{2D}{H^2} t_{k,np} = \frac{2D(2S_1 + \Delta_{1,np})\Delta_{1,np}}{H^2 2D} = (2S + \Delta_{np})\Delta_{np} = (S+1)\Delta_{np} = 1 - S^2. \quad (9)$$

Введем аналитическую функцию $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\psi = (u - u_c)/(u_a - u_c)$. Гармонические функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ связаны между собой условиями Коши – Римана [2].

Рассмотрим задачу определения предельной формы границы $D'A$ при выполнении следующих условий для функции $W(z)$:

$$\psi_{D'AF'} = 1, \quad \psi_{DCF} = 0. \quad (10)$$

$$\left| \frac{dW}{dz} \right|_{D'A} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{D'A} = 1. \quad (11)$$

Область изменения G_w переменной W представлена на Рисунке 2, а.

Для построения функций, определяющих решение задачи, введем параметрическую комплексную переменную $t = \xi + i\delta$, изменяющуюся в области G_t ($|t| < 1, \delta > 0$) (см. Рисунок 2, б).

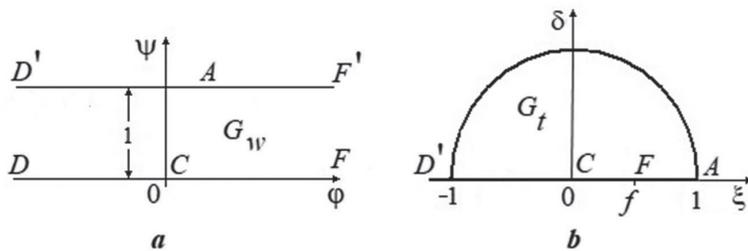


Рисунок 2. Вспомогательные области: а – область изменения комплексного потенциала W ; б – область изменения вспомогательной переменной t

Используя метод конформных отображений [3], получим

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{(1+f)^2 (1-t)}{\pi (1+t)(t-f)(1-tf)}. \quad (12)$$

Введем функцию [4]

$$\chi(t) = \ln \frac{dW}{dz} = \ln \left| \frac{dW}{dz} \right| - i\theta, \quad (13)$$

где θ – угол между касательной к кривой и осью абсцисс в области G_z изменения переменной z .

Электрохимическая обработка металлов неподвижным катодом-инструментом

На границе области G_t функция $\chi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \chi(\exp(i\sigma))=0, \quad \sigma \in [0, \pi]$$

$$\operatorname{Im} \chi(\xi)=-\theta(\xi)=\begin{cases} 0, & \xi \in [-1;0) \cup (f;1], \\ (1-\alpha)\pi, & \xi \in (0;f). \end{cases} \quad (14)$$

Функция $\chi(t)$ имеет логарифмические особенности в точках $C(t=0)$ и $F(t=f)$. Применяя метод особых точек Чаплыгина [4; 5], найдем

$$\chi(t)=(1-\alpha)\ln \frac{t-f}{t(1-tf)}. \quad (15)$$

Используя формулы (12), (15) и равенство

$$dz = \exp(-\chi(t)) \frac{dW}{dt} dt, \quad (16)$$

установим соответствие между областями G_z и G_t при условии, что образ точки $t(C)=0$ переходит в начало координат плоскости z . Это соответствие задается формулой

$$z(t)=-\frac{(1+f)^2}{\pi} \int_0^t \frac{(1-\tau)\tau^{1-\alpha} d\tau}{(1+\tau)(\tau-f)^{2-\alpha}(1-\tau f)^\alpha}. \quad (17)$$

Параметр f определяется из условия

$$\operatorname{Im} z(1)=S. \quad (18)$$

Формулы (17), (18) позволяют определить форму предельной анодной границы для различных значений безразмерного начального зазора S .

Результаты расчетов

При $\alpha=0,5$ выполнен расчет безразмерных координат точек участка $D'A$ предельной анодной границы для четырех различных значений величины S : 0,1; 0,3; 0,5; 0,7.

В таблице представлены результаты расчета безразмерных характеристик: x_A – абсциссы точки A , Δ_{np} , $\tau_{k,np}$.

Таблица

Результаты расчета безразмерных характеристик

S	x_A	Δ_{np}	$\tau_{k,np}$
0,1	1,146	0,9	0,99
0,3	1,006	0,7	0,91
0,5	0,817	0,5	0,75
0,7	0,545	0,3	0,51

Источник: таблица составлена автором.

Графики анодных границ для указанных частных случаев представлены на Рисунке 3.

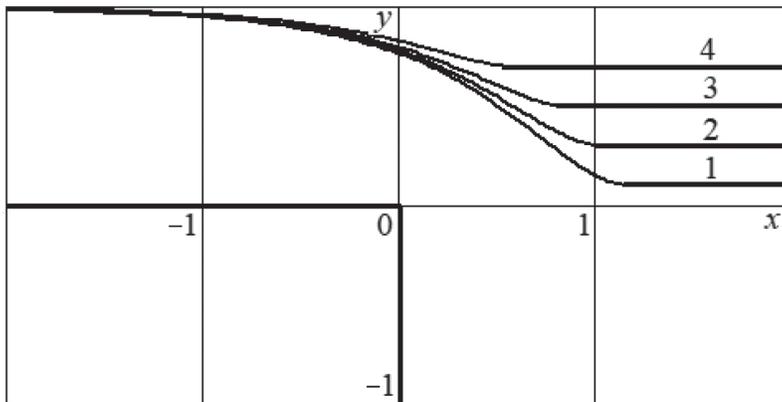


Рисунок 3. Результаты расчета анодных границ: 1) $S=0,1$; 2) $S=0,3$; 3) $S=0,5$; 4) $S=0,7$

Заключение

Решена конкретная двумерная задача, связанная с определением предельной анодной границы. Выполнены расчеты координат точек искомой границы и времени ее обработки для различных значений начального межэлектродного зазора. Из представленных результатов следует, что вследствие увеличения начального межэлектродного зазора происходит уменьшение величины предельного припуска и, соответственно, времени обработки.

Литература

1. Давыдов А.Д., Козак Е. *Высокоскоростное электрохимическое формообразование*. М. : Наука, 1990. 272 с. ISBN 5-02-001352-8.
2. Миназетдинов Н.М. Об одной предельной квазистационарной задаче электрохимической обработки металлов // *Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление*. 2021. № 3. С. 22–29. EDN XZLAEC. DOI: 10.25586/RNU.V9187.21.03.P.022
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М. : Наука, 1987. 688 с.
4. Гуревич М.И. *Теория струй идеальной жидкости*. М. : Наука, 1979. 536 с.
5. Миназетдинов Н.М. Гидродинамическая интерпретация одной задачи теории размерной электрохимической обработки металлов // *Прикладная математика и механика*. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 60–68. EDN JWLMMN.

References

1. Davydov A.D., Kozak E. (1990) *Vysokoskorostnoe elektrokhimicheskoe formoobrazovanie* [High-speed electrochemical forming]. Moscow : Nauka Publ. 272 p. ISBN 5-02-001352-8. (In Russian).
2. Minazetdinov N.M. (2021) One limiting quasistationary problems of electrochemical machining of metall. *Vestnik of Russian New University. Series: Complex Systems: Models, Analysis, Management*. No. 3. Pp. 22–29. DOI: 10.25586/RNU.V9187.21.03.P.022 (In Russian).
3. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. (1987) *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of complex variable function theory]. Moscow : Nauka Publ. 688 p. (In Russian).

4. Gurevich M.I. (1979) *Teoriya strui ideal'noi zhidkosti* [The theory of ideal liquid jets]. Moscow : Nauka Publ. 536 p. (In Russian).
5. Minazetdinov N.M. (2009) A hydrodynamic interpretation of a problem in the theory of the dimensional electrochemical machining of metals. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. Vol. 73. No. 1. Pp. 41–47. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.009