СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ: МОДЕЛИ, АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI 10.25586/RNU.V9187.18.09.P.04 УДК 517.985

А.С. Крюковский, Д.В. Растягаев, Е.В. Михалёва

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ КАТАСТРОФ КАСПОИДНОЙ СЕРИИ*

Получены необходимые и достаточные условия образования волновых катастроф каспоидной серии в случае, когда размерность внутренних параметров задачи равна двум, что отвечает одномерной фокусировке волновых полей в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: *волновые катастрофы, асимптотики, необходимые и достаточные условия, критические точки, быстро осциллирующие интегралы, каспоидная серия, фокусировки.*

A.S. Kryukovsky, D.V. Rastyagaev, E.V. Mikhaleva

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE FORMATION OF WAVE CATASTROPHES OF THE CUSPOID SERIES

Necessary and sufficient conditions for the formation of wave catastrophes of the cuspoid series are obtained in the case when the dimension of the internal parameters of the problem is equal to two, which corresponds to one-dimensional focusing of wave fields in three-dimensional space.

Keywords: *wave catastrophes, asymptotics, necessary and sufficient conditions, critical points, rapidly oscillating integrals, cuspoid series, focusings.*

Настоящая работа посвящена определению положений центров одномерных каспоидных фокусировок в трехмерном координатном пространстве. Каспоидные фокусировки – это простые (нульмодальные) особенности, характеризующиеся кратностью k [1–3], т. е. числом лучей, сливающихся в особой точке. Лучи соответствуют критическим (седловым или стационарным) точкам фазовой функции $\Phi(\vec{\xi})$. Обычно фазовая функция возникает при построении асимптотических решений физических задач в виде интегралов от быстро осциллирующих функций [3; 4]:

$$I \cong \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{\xi}) \exp[i\Phi(\vec{\xi})]\, d\vec{\xi}. \quad (1)$$

При этом возникает необходимость в анализе критических точек (1). Точка $\vec{\xi}^o$ называется критической, если

$$\nabla\Phi\big|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}^o} = 0. \quad (2)$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-02-00544-а).

Критическая точка вырождена, если ранг матрицы Гесса

$$H = \left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|$$

меньше размерности вектора $\vec{\xi}$:

$$\operatorname{rank} H < n = \dim \vec{\xi}. \tag{3}$$

В теории распространения волн случай, когда коранг матриц Гесса $\overline{\kappa}$

$$\overline{\kappa} = n - \operatorname{rank} H \tag{4}$$

в критической точке равен единице, соответствует одномерной фокусировке; $\overline{\kappa} = 2$ – двумерной фокусировке и т. д. Вырожденные критические точки, у которых $\overline{\kappa} = 1$, соответствуют каспоидным катастрофам (катастрофам типа $\mathbf{A}_k$).

Введем понятие эквивалентности функций.

Определение. Функции f_1 (в точке $\vec{\xi}_1$) и f_2 (в точке $\vec{\xi}_2$) эквивалентны, если существуют окрестности V_i ($\vec{\xi}_i \in V_i$), диффеоморфизм $\vec{P}: V_1 \to V_2$ и постоянная $C \in R$, такие, что

$$\vec{P}(\vec{\xi}_1) = \vec{\xi}_2,$$

$$f_1(\vec{\xi}_1) = f_2(\vec{P}(\vec{\xi}_1)) + C \tag{5}$$

для всех $\vec{\xi}_1 \in V_1$.

В случае, когда $\operatorname{rank} H$ равняется числу переменных, функция Φ в окрестности критической точки, согласно лемме Морса, эквивалентна

$$\pm\xi_1^2 \pm \xi_2^2 \pm \ldots \pm \xi_n^2.$$

Если $\overline{\kappa} = 1$, а $n > 1$, то, согласно лемме расщепления, с помощью невырожденного преобразования

$$\vec{\xi} = \vec{P}(\vec{x}) \tag{6}$$

функцию Φ можно привести к виду

$$F(\vec{x}) = \tilde{\varphi}(x_1) \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_n^2.$$

Функция $\tilde{\varphi}(x_1)$ уже зависит от одной переменной, причем в критической точке выполняется условие:

$$x_1^o = x_1(\vec{\xi}^o) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}(0)}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(0)}{\partial x_1^2} = 0.$$

Если невырожденным преобразованием можно добиться, чтобы $\tilde{\varphi}(x_1) = \left(x_1\right)^{k+1}$, то говорят, что функция Φ имеет в точке $\vec{\xi}^o$ особенность типа $\mathbf{A}_k$. Ясно, что определение явного вида невырожденного преобразования (6) является непростой задачей.

В случае одной переменной $n = 1$ известно (см., например, [3; 5; 6]), что функция эквивалентна $\pm\xi^{k+1}$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi^{(m)}(\xi^o) = 0, \ 1 \le m \le k, \ \Phi^{(k+1)}(\xi^o) = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим подробнее случай двух переменных: $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, $\Phi: R^2 \to R^1$. Матрица Гесса

$$H = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial (\xi_1)^2} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial (\xi_2)^2} \end{matrix} \right\| \tag{8}$$

может иметь максимальный ранг, равный 2. В этом случае $\det H \ne 0$ и функция Φ эквивалентна $\pm\xi_1^2 \pm \xi_2^2$.

Если теперь ранг равен 1 (соответственно, коранг $\overline{\kappa} = 1$), то критическая точка имеет каспоидный тип ($\mathbf{A}_k$). В этом случае $\det H = 0$, но $\left|\Phi_{11}\right| + \left|\Phi_{22}\right| \ne 0$.

Здесь и далее введены следующие обозначения:

$$\Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i},\ \Phi_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, \ldots,\ F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \ldots,\ p_j^i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j},$$

$$B_n\left(\Phi, a, b\right) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n \Phi}{\partial(\xi_1)^{n-i} \partial(\xi_2)^i} a^{n-i} b^i,\ T_n(\Phi) = B_n\left(\Phi, 1, -\varphi\right).$$

Пусть для определенности $\Phi_{22} \neq 0$, $\varphi = \Phi_{12} / \Phi_{22}$. Тогда справедливо утверждение: для того чтобы функция Φ имела в точке $\vec{\xi}^o$ особенность типа $\mathbf{A}_k$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (9.1), … , (9.k) и не выполнялись равенства (9.k +1) [7]:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0; \tag{9.1}$$

$$\Phi_{11}\Phi_{22} = \Phi_{12}^2; \tag{9.2}$$

$$T_3(\Phi) = 0; \tag{9.3}$$

$$\Phi_{22} T_4(\Phi) = 3T_2^2(\Phi_2); \tag{9.4}$$

$$\Phi_{22}^2 T_5(\Phi) = 10\Phi_{22} T_2(\Phi_2) T_3(\Phi_2) - 15T_1(\Phi_{22}) T_2^2(\Phi_2); \tag{9.5}$$

$$\begin{gathered}\Phi_{22}^3 T_6(\Phi) = 15\Phi_{22}^2 T_4(\Phi_2) T_2(\Phi_2) + 15\Phi_{222} T_2^3(\Phi_2) - 45\Phi_{22} T_2(\Phi_{22}) T_2^2(\Phi_2) + \\ +10\left[\Phi_{22} T_3(\Phi_2) - 3T_1(\Phi_{22}) T_2(\Phi_2)\right]^2;\end{gathered} \tag{9.6}$$

$$\begin{gathered}\Phi_{22}^4 T_7(\Phi) = 21\Phi_{22}^3 T_5(\Phi_2) T_2(\Phi_2) + 21\Phi_{22}^3 T_5(\Phi) T_2(\Phi_{22}) - 7\Phi_{22}^3 T_6(\Phi) T_1(\Phi_{22}) - \\ -105\Phi_{222} T_2^3(\Phi_2) T_1(\Phi_{22}) + 35\Phi_{22}^3 T_4(\Phi_2) T_3(\Phi_2) - 105\Phi_{22} T_2^2(\Phi_2) T_3(\Phi_{22}) + \\ +105\Phi_{22} T_1(\Phi_{222}) T_2^3(\Phi_2) + 105\Phi_{222}\Phi_{22} T_2^2(\Phi_2) T_3(\Phi_2).\end{gathered} \tag{9.7}$$

Проиллюстрируем способ доказательства этих выражений на примере. Пусть $\Phi(\xi_1, \xi_2) = 0$ в критической точке имеет особенность $\mathbf{A}_5$. Тогда в окрестности критической точки с помощью невырожденного преобразования (6) эта функция может быть приведена к виду

$$\Phi = F + C,\ F(x_1, x_2) = \pm(x_1)^6 \pm (x_2)^2. \tag{10}$$

Запишем производные тождества (10) по x_i до пятого порядка включительно. Например:

$$F_k = \Phi_i\, p_k^i \Big|_{x_i = 0} = 0.$$

Так как $\det\left\| p_k^i \right\| \neq 0$ (в силу невырожденности преобразования (6)), находим

$$\Phi_i = 0,\quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Из вторых производных с учетом (11) получаем

$$F_{11} = \Phi_{ij}\, p_1^i p_1^j = 0,$$

$$F_{12} = \Phi_{ij}\, p_1^i p_2^j = 0,$$

$$F_{22} = \Phi_{ij}\, p_2^i p_2^j = \pm 2,$$

откуда находим, что

$$\Phi_{ij}\, p_1^j = 0,\quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Третьи производные приводим к равенствам

$$\Phi_{ijs}\, p_1^j p_1^s + \Phi_{ij}\, p_{11}^j = 0,\quad i = 1, 2. \tag{13}$$

Теперь с помощью условий (11) – (13) находим выражение для производной F_{11111}:

$$F_{11111} = \Phi_{ijstk}\ p_1^i p_1^j p_1^s p_1^t p_1^k + 10\Phi_{ijst}\ p_1^i p_1^j p_1^s p_{11}^t + 15\Phi_{ijs}\ p_1^i p_{11}^j p_{11}^s + \\ +10\Phi_{ijs}\ p_1^i p_1^j p_{111}^s + 10\Phi_{ij}\ p_{11}^i p_{111}^j + 5\Phi_{ij}\ p_1^i p_{1111}^j + \Phi_i\ p_{11111}^i = 0. \quad (14)$$

С учетом (11) – (13) получаем

$$\Phi_{ijstk}\ p_1^i p_1^j p_1^s p_1^t p_1^k + 10\Phi_{ijst}\ p_1^i p_1^j p_1^s p_{11}^t + 15\Phi_{ijs}\ p_1^i p_{11}^j p_{11}^s = 0. \quad (15)$$

Используя опять выражение (13) с $i = 2$

$$\Phi_{2js} p_1^j p_1^s + \Phi_{21} p_{11}^1 + \Phi_{22} p_{11}^2 = 0, \\ \Phi_{22}\left(p_{11}^2 + \varphi\, p_{11}^1\right) = -B_2\left(\Phi_2, p_1^1, p_1^2\right) \quad (16)$$

и подставляя (16) в (15), получаем:

$$\Phi_{22}^2 B_5(\Phi, p_1^1, p_1^2) + 10\Phi_{22}^2\left(\Phi_{ijs1} p_1^i p_1^j p_1^s - \Phi_{ijs2} p_1^i p_1^j p_1^s \varphi\right) p_{11}^1 + \\ +15\Phi_{22}^2 (p_{11}^1)^2\left(\Phi_{i11} - 2\Phi_{i12}\varphi + \Phi_{i22}\varphi^2\right) p_1^i + \\ +30\Phi_{22} p_{11}^1\left(\varphi\Phi_{i22} - \Phi_{i12}\right) p_1^i B_2(\Phi_2, p_1^1, p_1^2) = \\ = 10\Phi_{22} B_3(\Phi_2, p_1^1, p_1^2) B_2(\Phi_2, p_1^1, p_1^2) - 15 B_1(\Phi_{22}, p_1^1, p_1^2) B_2^2(\Phi_2, p_1^1, p_1^2). \quad (17)$$

С учетом

$$\varphi = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = -\frac{p_1^2}{p_1^1}$$

и равенств (9.3), (9.4) окончательно находим

$$\Phi_{22}^2 B_5(\Phi, p_1^1, p_1^2) = 10\Phi_{22} B_3(\Phi_2, p_1^1, p_1^2) B_2(\Phi_2, p_1^1, p_1^2) - \\ -15 B_1(\Phi_{22}, p_1^1, p_1^2) B_2^2(\Phi_2, p_1^1, p_1^2). \quad (18)$$

Это и есть условие для $\mathbf{A}_5$. Аналогично определяются остальные выражения.

Таким образом, в данной работе, в дополнение к уже известным, получены условия образования каспоидных катастроф $\mathbf{A}_5$ (бабочка), $\mathbf{A}_6$ (вигвам), $\mathbf{A}_7$ (звезда) для случая $n = 2$ (функция двух переменных), что является крайне важным в прикладных расчетах для определения типа фокусировок волновых полей (см. [4; 8–11]).

Литература

1. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. – М. : Наука, 1982. – 304 с.

2. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее применение / пер. с англ. А.В. Чернавского. – М. : Мир, 1980. – 608 с.

3. *Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А.* Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с вырожденными седловыми точками: препринт / ИРЭ АН СССР. – М., 1984. – № 41 (413). – 75 с.

4. *Kryukovskii, A.S., Lukin, D.S., Rastyagaev, D.V.* Construction of uniform asymptotic solutions of wave-type differential equations by methods of catastrophe theory // Russian journal of mathematical physics. – 2009. – Vol. 16. – No 2. – P. 232–245.

5. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое // Радиотехника и электроника. – 1981. – Т. 26. – № 6. – С. 1121–1126.

6. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Определение структуры коротковолнового поля в областях одновременной и двумерной фокусировки в плоскослоистой среде // Труды

6-й конференции молодых ученых / Московский физ.-тех. ин-т. – М., 1981. – С. 218–227 (рукопись деп. В ВИНИТИ, 2 июля 1981, № 3278-81).

7. *Крюковский А.С., Растягаев Д.В.* О необходимых и достаточных условиях образования каспоидных катастроф // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах. – М. : МФТИ, 1989. – С. 56–60.

8. *Крюковский А.С., Маслянкин В.И., Хусамов Р.К.* Исследование каспоидной фокусировки $\mathbf{A}_3$ методом локальной асимптотики // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2016. – № 4. – С. 20–25.

9. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Локальная асимптотика быстро осциллирующих интегралов, описывающих волновое поле в областях фокусировки // Дифракция и распространение электромагнитных волн. – М. : МФТИ, 1984. – С. 39–53.

10. *Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В.* Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т. 12. – № 8. – С. 15–25.

11. *Крюковский А.С., Зайчиков И.В.* Особенности распространения радиоимпульсов в средах с дисперсией // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2008. – Т. 13. – № 8. – С. 36–41.

References

1. *Arnol'd, V.I., Varchenko, A.N., Guseyn-Zade, S.M.* Osobennosti differentsiruemykh otobrazheniy. Klassifikatsiya kriticheskikh tochek kaustik i volnovykh frontov. – M. : Nauka, 1982. – 304 s.

2. *Poston, T., Styuart, I.* Teoriya katastrof i eyo primenenie / per. s angl. A.V. Chernavskogo. – M. : Mir, 1980. – 608 s.

3. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S., Palkin, E.A.* Ravnomernye asimptotiki integralov ot bystroostsilliruyushchikh funktsiy s vyrozhdennymi sedlovymi tochkami: preprint / IRE AN SSSR. – M., 1984. – № 41 (413). – 75 s.

4. *Kryukovskii, A.S., Lukin, D.S., Rastyagaev, D.V.* Construction of uniform asymptotic solutions of wave-type differential equations by methods of catastrophe theory // Russian journal of mathematical physics. – 2009. – Vol. 16. – No 2. – P. 232–245.

5. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* K voprosu o pole v okrestnosti kausticheskogo ostriya v ionosfernom plazmennom sloe // Radiotekhnika i elektronika. – 1981. – T. 26. – № 6. – S. 1121–1126.

6. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* Opredelenie struktury korotkovolnovogo polya v oblastyakh odnovremennoy i dvumernoy fokusirovki v ploskosloistoy srede // Trudy 6-y konferentsii molodykh uchenykh / Moskovskiy fiz.-tekh. in-t. – M., 1981. – S. 218–227 (rukopis' dep. V VINITI, 2 iyulya 1981, № 3278-81).

7. *Kryukovskiy, A.S., Rastyagaev, D.V.* O neobkhodimykh i dostatochnykh usloviyakh obrazovaniya kaspoidnykh katastrof // Rasprostranenie i difraktsiya voln v neodnorodnykh sredakh. – M. : MFTI, 1989. – S. 56–60.

8. *Kryukovskiy, A.S., Maslyankin, V.I., Khusamov, R.K.* Issledovanie kaspoidnoy fokusirovki A_3 metodom lokal'noy asimptotiki // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". – 2016. – № 4. – S. 20–25.

9. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* Lokal'naya asimptotika bystro ostsilliruyushchikh integralov, opisyvayushchikh volnovoe pole v oblastyakh fokusirovki // Difraktsiya i rasprostranenie elektromagnitnykh voln. – M. : MFTI, 1984. – S. 39–53.

10. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S., Rastyagaev, D.V.* Teoriya prostranstvennoy fokusirovki videoimpul'sov v dispergiruyushchikh sredakh // Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy. – 2007. – T. 12. – № 8. – S. 15–25.

11. *Kryukovskiy, A.S., Zaychikov, I.V.* Osobennosti rasprostraneniya radioimpul'sov v sredakh s dispersiey // Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy. – 2008. – T. 13. – № 8. – S. 36–41.