

Н.М. Миназетдинов

---

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ КАВИТАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОЛИТА  
ПРИ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ

---

Построена математическая модель двумерной задачи электрохимической обработки металлов с учетом влияния кавитации на процесс анодного растворения металла. Электрическое поле в межэлектродном промежутке описывается моделью «идеального процесса», а течение электролита моделируется идеальной несжимаемой жидкостью. Представлены результаты расчетов установившейся формы поверхности детали, полученной при обработке электродом-инструментом заданной формы. Графики отражают качественные эффекты, связанные с влиянием кавитации.

*Ключевые слова:* электрохимическая обработка металлов, потенциал, идеальная несжимаемая жидкость, гармоническая функция.

N.M. Minazetdinov

---

ON ONE MODEL OF CAVITATION FLOW OF ELECTROLYTE  
IN ELECTROCHEMICAL MACHINING

---

A mathematical model of the two-dimensional problem of the electrochemical machining of metals is constructed taking into account the influence of cavitation on the anodic dissolution of the metal. The electric field in the inter electrode gap is described by the “ideal process” model, and the electrolyte flow is modeled by an ideal incompressible fluid. The results of calculations of the steady-state shape of the surface of the part obtained by processing the specified shape with an electrode tool are presented. The graphs reflect the qualitative effects associated with the influence of the cavity.

*Keywords:* electrochemical machining of metals, potential, ideal incompressible fluid, harmonic function.

*Введение*

Одной из актуальных задач теории электрохимической обработки (ЭХО) металлов [2; 3; 4; 13] является разработка методов расчета формы поверхностей, образующихся в процессе ЭХО, с учетом гидродинамики течения электролита в промежутке между неизвестной границей обрабатываемой детали (анода) и заданной границей электрода-инструмента (катода).

В работе [11] на основе модели идеального процесса [3] решена двумерная задача, связанная с определением установившейся или стационарной [8; 9] границы анода с учетом кавитационного течения электролита в межэлектродном промежутке. Для описания течения использована модель идеальной несжимаемой жидкости [1]. В модели задачи рабочая часть катода представлена полубесконечной пластиной, совершающей поступательное движение к обрабатываемой заготовке с постоянной скоростью  $V$ , причем направление подачи перпендикулярно указанной границе катода.

В данной работе приводится решение задачи при условии, что обработка осуществляется катодом-пластиной, толщина которой пренебрежимо мала, а направление подачи параллельно граням катода.

## Схема электрохимической обработки

Схема сечения межэлектродного промежутка изображена на рисунке 1-а.

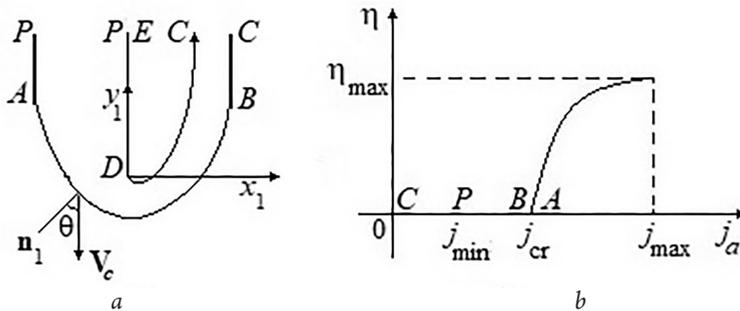


Рис. 1. Межэлектродный промежуток:

а – геометрия межэлектродного промежутка; б – график зависимости  $\eta(j_a)$

Граница катода-инструмента – пластина  $PDE$ . Система декартовых координат  $(x_1, y_1)$  связана с катодом, и ее начало выбрано в точке  $D$ . Точки  $P$  и  $E$  являются бесконечно удаленными. Вектор  $\mathbf{V}_c$  указывает направление подачи катода. В процессе обработки происходит заглубление катода в тело заготовки, и с течением времени формируется установившаяся анодная граница  $PABC$ . Поток электролита направлен от точки  $P$  к точке  $C$ . В точке  $D$  происходит отрыв потока от поверхности катода с образованием каверны, заполненной парами жидкости и газом. Каверна ограничена гранью  $DE$  катода и линией  $DC$ , простирающейся до бесконечности. Требуется определить установившуюся форму анодной границы  $PABC$ .

Для решения задачи необходимо рассмотреть два векторных поля, а именно стационарное электрическое поле и поле скоростей установившегося течения идеальной несжимаемой жидкости в межэлектродном промежутке, а также их взаимосвязь.

#### Модель электрического поля в межэлектродном промежутке

Для решения задачи используются методы теории функций комплексной переменной [10]. На основе допущений, принятых в работе [3], введем аналитическую функцию  $W_1(z_1) = v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1)$  комплексной переменной  $z_1 = x_1 + iy_1$ , называемой комплексным потенциалом электрического поля. Будем считать, что  $v(x_1, y_1) = \text{Re } W(z_1)$  соответствует силовой функции электрического поля, а  $u(x_1, y_1) = \text{Im } W(z_1)$  совпадает с потенциалом электрического поля в межэлектродном промежутке. Потенциал  $u(x_1, y_1)$  принимает постоянные значения на границах электродов:

$$u|_{PABC} = u_a, \quad u|_{PDE} = u_c. \quad (1)$$

В модели каверна считается диэлектриком [11], и ее граница  $DC$  является линией уровня функции  $v(x_1, y_1) = \text{Re } W(x_1, y_1)$ . Будем считать, что

$$v(x_1, y_1)|_{DC} = 0. \quad (2)$$

Для обеспечения точности обработки процесс электрохимического растворения металла локализуется в рабочей зоне, соответствующей нормальной проекции рабочей поверхности катода на обрабатываемую поверхность. За пределами этой зоны скорость растворе-

Миназетдинов Н.М. Об одной модели кавитационного течения электролита...

ния металла резко уменьшается вплоть до нуля, при этом на анодной границе формируются участки, на которых растворение металла прекращается. Локализация растворения зависит от многих факторов, в том числе от состава электролита и свойств обрабатываемого материала. Одной из важнейших характеристик локализирующих свойств электролита и металла является выход по току  $\eta$  для реакций анодного растворения металла [2].

Для электрохимической обработки сталей с использованием электролитов на основе водных растворов нитрата или хлората натрия введена зависимость выхода по току  $\eta$  от анодной плотности тока  $j_a$  [7]:

$$\eta(j_a) = 0 \text{ при } 0 < j_a \leq j_{cr}; \quad \eta(j_a) = a_0 + a_1/j_a \text{ при } j_{cr} < j_a \leq j_{max}$$

где  $a_0 > 0$ ,  $a_1 < 0$ ,  $j_{cr}$  – постоянные,  $\eta_{max} = \eta(j_{max})$  (рис. 1-б).

На участке АВ анодной границы, соответствующей рабочей зоне, выполняются условия

$$j_{cr} < j_a \leq j_{max}, \quad 0 < \eta \leq \eta_{max}$$

а нормальная производная потенциала электрического поля удовлетворяет условию [Там же]

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{1}{\kappa a_0} \left( -a_1 + \frac{\rho V_c}{\epsilon} \cos \theta \right), \tag{3}$$

где  $\kappa$  – удельная электропроводность среды;  $\epsilon$  – электрохимический эквивалент металла;  $\rho$  – плотность материала анода;  $\theta$  – угол между вектором  $V_c$  скорости подачи катода и вектором  $n_1$  нормали к анодной границе (рис. 1-а).

Увеличение межэлектродных зазоров в процессе обработки приводит к уменьшению значений анодной плотности тока, причем на некоторых участках анодной границы плотность тока достигает значений меньше критического  $j_{cr}$ , соответственно, выход по току на этих участках равен нулю. На участке AP плотность тока убывает от значения  $j_{cr}$  в точке А до величины  $j_{min}$  в точке P (см. рис. 1-б).

Наличие каверны является дополнительным фактором, способствующим падению анодной плотности тока, а зачастую и возникновению коротких замыканий. Экранирование части анодной границы каверной приводит к тому, что на участке ВС плотность тока убывает от значения  $j_{cr}$  в точке В до нуля в точке С (см. рис. 1-б). Следовательно,

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial n_1} \Big|_P = j_{min}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_1} \Big|_C = 0. \tag{4}$$

Электроизолирующее свойство каверны является причиной отсутствия симметрии межэлектродного промежутка относительно катода-пластины. Положения точек А и В неизвестны и определяются в процессе решения.

Произведем замену переменных по формулам

$$\psi = (u - u_c)/(u_a - u_c), \quad z = z_1/H = x + iy,$$

где  $\psi$  – безразмерный потенциал электрического поля;  $H$  – характерная длина. Условие (3) можно записать в виде

$$\frac{a_0 \kappa (u_a - u_c)}{j_0 H} \frac{\partial \psi}{\partial n_1} = -\frac{a_1}{j_0} + \cos \theta,$$

где  $j_0 = \rho V_c / \epsilon$  характерная плотность тока [6].

Параметр  $a_0$  является безразмерным, выражение  $\kappa(u_a - u_c)/j_0$  имеет размерность длины [6], поэтому характерную длину можно задать выражением  $H = a_0 \kappa(u_a - u_c)/j_0$ .

Искомые безразмерные геометрические величины должны быть таковы, чтобы безразмерный комплексный потенциал  $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , где  $\varphi(x, y)$  – гармонически сопряженная функция по отношению к функции  $\psi(x, y)$ , согласно формулам (1)–(3) удовлетворял граничным условиям

$$\psi|_{PABC} = 1, \quad \psi|_{PD} = 0; \quad (5)$$

$$\varphi|_{DC} = 0; \quad (6)$$

$$\left| \frac{dW}{dz} \right|_{AB} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{AB} = b + \cos \theta, \quad b = -\frac{a_1}{j_0}. \quad (7)$$

Из формул (4) следует

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_P = a_0 \frac{j_{\min}}{j_0}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_C = 0. \quad (8)$$

Из условий (5) и первого равенства из условий (8) следует, что безразмерная величина зазора  $h_p$  на бесконечности в сечении  $PP$

$$h_p = \frac{j_0}{j_{\min} a_0}. \quad (9)$$

Соотношения (5)–(9) будут использованы на следующем этапе, связанном с рассмотрением кавитационного течения в межэлектродном промежутке.

#### Численно-аналитический метод решения

В односвязной области  $z = x + iy$  рассмотрим установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости, ограниченное прямолинейной стенкой  $PD$ , свободной поверхностью  $DC$  и твердой границей, состоящей из трех частей – прямой  $AP$ , кривой  $AB$ , переходящей в прямую  $BC$ .

Скорость течения на входе в межэлектродный канал в окрестности бесконечно удаленной точки  $P$  равна  $V_p$ , а величина скорости на свободной границе  $DC$  постоянна и равна  $V_0$  [1]. Требуется определить формы границ  $AB$  и  $DC$ .

Для решения задачи введем вспомогательную комплексную переменную  $t = \xi + i\delta$ , изменяющуюся в области  $G_t (0 < \xi < \pi/2, 0 < \delta < \pi/2)$  ( $\tau = i|\tau|$ ) (рис. 2), и будем искать функцию  $z(t)$ , конформно отображающую прямоугольник  $G_t$  на область течения с соответствием точек, указанных на рисунках 1-а, 2.

Введем в рассмотрение аналитическую функцию  $W_g(t) = \varphi_g(t) + i\psi_g(t)$  – комплексный потенциал течения, где  $\varphi_g$  – потенциал скорости;  $\psi_g$  – функция тока и функции Жуковского [Там же]

$$\chi(t) = \ln \frac{V_0 dz}{dW_g} = r + i\theta_g, \quad r = \ln \frac{V_0}{V}, \quad (10)$$

где  $V$  – модуль скорости;  $\theta_g$  – угол скорости с осью абсцисс.

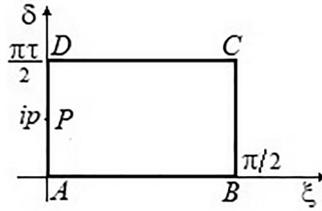


Рис. 2. Плоскость параметрической переменной  $t$

Параметрическую зависимость  $z(t)$  можно получить с помощью соотношения [1]

$$\frac{dz}{dt} = \frac{e^{\lambda(t)} dW_g(t)}{V_0 dt}. \tag{11}$$

Твердые и свободные границы течения являются линиями тока, на которых  $\text{Im } W_g(t) = \text{const}$  [Там же], следовательно,

$$\begin{aligned} \psi_g(i\delta) = 0, \delta \in [0, p]; \quad \psi_g(\xi) = 0, \xi \in [0, \pi/2]; \quad \psi_g(\pi/2 + i\delta) = 0, \delta \in [0, \pi|\tau|/2]; \\ \psi_g(i\delta) = Q, \delta \in (p, \pi|\tau|/2]; \quad \psi_g(\xi + \pi\tau/2) = Q, \xi \in [0, \pi/2], \end{aligned}$$

где  $Q$  – расход жидкости в струе.

В плоскости комплексного потенциала  $W_g$  области течения соответствует полоса ширины  $Q$  (рис. 3).

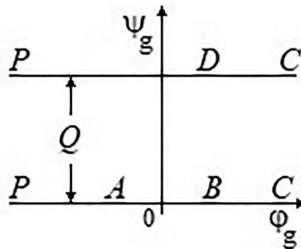


Рис. 3. Область изменения комплексного потенциала  $W_g(t)$

Функция  $dW_g/dt$  на горизонтальных сторонах прямоугольника  $G_t$  принимает действительные значения, а на вертикальных – мнимые; имеет нули первого порядка в точках  $A(t=0)$ ,  $B(t=\pi/2)$ ,  $D(t=\pi\tau/2)$  и полюса первого порядка в точках  $P(t=ip)$ ,  $C(t=\pi/2 + \pi\tau/2)$ . Согласно принципу симметрии Шварца [10], функцию  $dW_g/dt$  можно аналитически продолжить через границы области  $G_t$  на всю плоскость. Продолженная таким образом функция будет двоякопериодической с периодами  $\pi$ ,  $\pi\tau$  и известными особенностями в прямоугольнике периодов [14]. Используя представление эллиптической функции с периодами  $\pi$  и  $\pi\tau$  через тета-функции [Там же], найдем

$$\frac{dW_g}{dt} = N \frac{\vartheta_1(t)\vartheta_2(t)\vartheta_4(t)}{\vartheta_1(t-ip)\vartheta_1(t+ip)\vartheta_3(t)}, \tag{12}$$

где  $\vartheta_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  – тета-функции для периодов  $\pi$  и  $\pi\tau$ .

Интегрированием выражения (12) по дуге полуокружности бесконечно малого радиуса с центром в точке  $t = ip$  с помощью теории вычетов [7] найдем

$$N = \frac{2Q}{\pi} \vartheta_3^2(ip).$$

Исследуем область изменения функции Жуковского. Из формулы (10) следует, что вдоль свободной поверхности  $DC$  постоянна действительная, а вдоль прямолинейных участков  $AP, DP, BC$  – мнимая часть функции  $\chi(t)$ .

Представим функцию  $\chi(t)$  в виде суммы [6]

$$\chi(t) = \chi_0(t) + \omega(t), \tag{13}$$

где  $\chi_0(t) = r_0 + i\theta_0$  – функция Жуковского для вспомогательного течения жидкости по заданной схеме при условии, что на границе  $AB$  модуль скорости постояен и равен  $V$ ;  $\omega(t)$  – функция, аналитическая в области  $G_t$  и непрерывная в ее замыкании  $\bar{G}_t = G_t \cup \partial G$ , где  $\partial G$  – граница области  $G_t$ .

Согласно схеме течения должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \chi(i\delta) &= \operatorname{Im} \chi_0(i\delta) = -\pi/2, \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/2]; \\ \operatorname{Im} \chi(\pi/2 + i\delta) &= \operatorname{Im} \chi_0(\pi/2 + i\delta) = \pi/2, \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/2]; \\ \operatorname{Re} \chi(\xi + \pi\tau/2) &= \operatorname{Re} \chi_0(\xi + \pi\tau/2) = 0, \quad \xi \in [0, \pi/2]. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\operatorname{Re} \chi_0(\xi) = \ln \frac{V_0}{V_*} = r_*, \quad \xi \in [0, \pi/2]. \tag{15}$$

В плоскости изменения переменной  $\chi_0 = r_0 + i\theta_0$  области вспомогательного течения соответствует прямоугольник  $G_{\chi_0} (0 < r_0 < r_*, -\pi/2 < \theta_0 < \pi/2)$  (рис. 4).

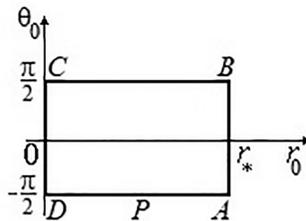


Рис. 4. Область изменения переменной  $\chi_0$

Конформное отображение области  $G_t$  (см. рис. 2) на область  $G_{\chi_0}$  задается формулой

$$\chi_0(t) = \pi|\tau| + i\left(2t - \frac{\pi}{2}\right), \tag{16}$$

из которой следует, что  $r_* = \pi|\tau|$ .

Введем для функции  $\chi(t)$  на криволинейном участке  $AB$  граничное условие, являющееся следствием условий (5)–(8) электрохимического формообразования. Рассмотрим соотношение

$$\frac{dW_g}{dz} = \frac{dW_g}{dW} \frac{dW}{dz} = \frac{dW_g}{dt} \frac{dt}{dW} \frac{dW}{dz}. \tag{17}$$

Миназетдинов Н.М. Об одной модели кавитационного течения электролита...

Граница  $AB$  является линией тока идеальной жидкости и эквипотенциальной линией электрического поля. На этом участке анодной границы выполняется равенство  $\theta_g(x, y) = \theta(x, y)$ . Тогда из условия (7) и формулы (17) следует, что

$$V = \left| \frac{dW_g}{dz} \right| = (b + \cos \theta_g(\xi)) \left| \frac{d\varphi_g}{d\xi} \frac{d\xi}{d\varphi} \right|, \quad \xi \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Таким образом, на границе  $AB$  граничные значения гармонически сопряженных функций  $r(\xi)$  и  $\theta_g(\xi)$  связаны соотношением

$$e^{-r} = \frac{(b + \cos \theta_g)}{V_0} \left| \frac{d\varphi_g}{d\xi} \frac{d\xi}{d\varphi} \right| \quad (18)$$

Выражение производной  $d\varphi_g/d\xi$  найдем из формулы (12). Для определения производной  $d\varphi/d\xi$  найдем производную  $dW/dt$  комплексного потенциала электрического поля. Согласно соотношениям (5), (6) для функции  $W(t)$  выполняются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \psi(i\delta) = 1, \quad \delta \in [0, p]; \quad \psi(\xi) = 1, \quad \xi \in [0, \pi/2]; \quad \psi(\pi/2 + i\delta) = 1, \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/2]; \\ \psi(i\delta) = 0, \quad \delta \in (p, \pi|\tau|/2]; \quad \varphi(\xi + \pi\tau/2) = 0, \quad \xi \in [0, \pi/2]. \end{aligned}$$

Область изменения комплексного потенциала электрического поля представлена на рисунке 5.

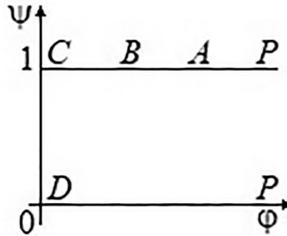


Рис. 5. Область изменения комплексного потенциала  $W(t)$

Функция  $dW/dt$  на стороне  $AB$  прямоугольника  $G_i$  принимает действительные значения, а на сторонах  $AD$ ,  $BC$  и  $DC$  – мнимые; имеет нули первого порядка в точках  $A(t=0)$ ,  $B(t=\pi/2)$  и полюс первого порядка в точке  $P(t=ip)$ . Используя метод особых точек Чаплыгина [1], получим

$$\frac{dW}{dt} = M \frac{\vartheta_1(t)\vartheta_2(t)}{\vartheta_1(t-ip)\vartheta_1(t+ip)}, \quad M = -\frac{2}{\pi} \vartheta_3(ip)\vartheta_4(ip). \quad (19)$$

Используя формулы (12), (19) условие (18) представим в виде

$$\frac{Q}{V_0} \frac{\vartheta_3(ip)}{\vartheta_4(ip)} \frac{\vartheta_4(\xi)}{\vartheta_3(\xi)} (b + \cos \theta_g(\xi)) e^{r(\xi)} = 1, \quad (20)$$

откуда при  $\xi = 0$

$$\frac{Q}{V_0} = \frac{1}{b} \frac{\vartheta_4(ip)}{\vartheta_3(ip)} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_4(0)} e^{-r(0)}. \quad (21)$$

Соотношение (20) с учетом равенства (21) представим в виде

$$\frac{1}{b} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_4(0)} \frac{\vartheta_4(\xi)}{\vartheta_3(\xi)} (b + \cos \theta_g(\xi)) e^{r(\xi) - r(0)} = 1. \quad (22)$$

Учитывая, что  $Q = V_0 h_C$ , где  $h_C$  – безразмерная величина зазора на бесконечности в сечении СС, из формулы (21) следует

$$h_C = \frac{1}{b} \frac{\vartheta_4(ip)}{\vartheta_3(ip)} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_4(0)} e^{-r(0)}. \quad (23)$$

Из формул (13)–(16) и (22) следует, что для неизвестной функции  $\omega(t)$  выполняются следующие граничные условия:

$$\operatorname{Im} \omega(i\delta) = 0, \quad \operatorname{Im} \omega(\pi/2 + i\delta) = 0, \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/2], \quad (24)$$

$$\operatorname{Re} \omega(\xi + \pi\tau/2) = 0, \quad \xi \in [0, \pi/2], \quad (25)$$

$$\frac{1}{b} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_4(0)} \frac{\vartheta_4(\xi)}{\vartheta_3(\xi)} (b + \sin(2\xi + \mu(\xi))) e^{v(\xi) - v(0)} = 1, \quad (26)$$

$$\mu(\xi) = \operatorname{Im} \omega(\xi), \quad v(\xi) = \operatorname{Re} \omega(\xi), \quad \xi \in [0, \pi/2].$$

В силу условий (22), (25) функцию  $\omega(t)$  можно разложить в ряд с вещественными коэффициентами [5; 13]:

$$\dot{u}(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sh}(\delta_1 + 2ti)k, \quad \tau_1 = \pi|\tau|. \quad (27)$$

Используя формулы (13), (16) и (27), получим

$$\chi(t) = \pi|\tau| + i \left( 2t - \frac{\pi}{2} \right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sh}(\tau_1 + 2ti)k. \quad (28)$$

Отсюда из условия  $\chi(ip) = \ln \frac{V_0}{V_p} - \frac{\pi}{2}i$  следует, что

$$\frac{V_0}{V_p} = \exp \left( \pi|\tau| - 2p + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sh}(\tau_1 - 2p)k \right). \quad (29)$$

Используя равенство  $V_p h_p = V_0 h_C$  и формулы (23), (29) найдем

$$h_p = h_C \frac{V_0}{V_p} = \frac{1}{b} \frac{\vartheta_4(ip)}{\vartheta_3(ip)} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_4(0)} \exp \left( -2p + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\operatorname{sh}(\tau_1 - 2p)k - \operatorname{sh} \tau_1 k) \right). \quad (30)$$

Из формулы (27) при условии  $t = \xi$ ,  $\xi \in [0, \pi/2]$  получим

$$\operatorname{Re} \chi(\xi) = \pi|\tau| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sh}(\tau_1 k) \cos(2\xi k);$$

$$\text{Im}\chi(\xi) = 2\xi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ch}(\tau_1 k) \sin(2\xi k) - \pi/2,$$

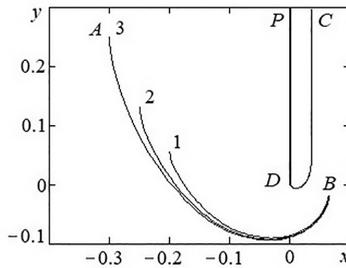
и условие (26) можно представить в виде

$$\frac{1}{b} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_4(0)} \frac{\vartheta_4(\xi)}{\vartheta_3(\xi)} \frac{b + \sin\left(2\xi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ch}(\tau_1 k) \sin(2\xi k)\right)}{\exp\left(2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{sh}(\tau_1 k) (1 - \cos(2\xi k))\right)} = 1 \quad (31)$$

При заданных значениях геометрической величины  $h_p$ , коэффициента  $a_1$  и характерной плотности тока  $j_0 = \rho V_c / \epsilon$  коэффициенты разложений (27) и математические параметры  $p$ ,  $|\tau|$  определяются таким образом, чтобы на искомой анодной границе удовлетворялось условие (30) и соотношение (31). Геометрические характеристики определяются из соотношения (11).

*Результаты расчетов*

Расчеты выполнены для значения  $a_1 = -12,818$ , соответствующего электрохимической обработке сталей в 15%-м водном растворе нитрата натрия [7]. При характерной плотности тока  $j_0 = 5 \text{ A/cm}^2$  выполнен расчет координат точек участка АВ анодной границы и каверны DC при трех различных значениях величины  $h_p$ : 0,2; 0,25; 0,3. В результате выполненных расчетов для заданных величин было установлено, что для указанных значений  $h_p$  форма границы DC каверны практически не меняется (рис. 6).



**Рис. 6.** Результаты расчета границ анода и каверны:  
 1 -  $h_p = 0,2$ ; 2 -  $h_p = 0,25$ ; 3 -  $h_p = 0,3$

В таблице представлены результаты расчета параметров  $\tau$ ,  $p$ , ординаты  $y_A$  точки А, координаты  $x_B, y_B$  точки В, отношения  $V_p/V_0$  и зазора  $h_c$ .

**Результаты расчета параметров**

$h_p$	$\tau$	$p$	$y_A$	$x_B$	$y_B$	$V_p/V_0$	$h_c$
0,20	0,5142	0,1288	0,0555	0,0630	-0,0163	0,1345	0,0269
0,25	0,5141	0,0801	0,1315	0,0640	-0,0165	0,1097	0,0274
0,30	0,5222	0,0445	0,2493	0,0640	-0,0181	0,0917	0,0275

Из таблицы и графиков участка  $AB$  анодной границы (см. рис. б) видно, что координаты точки  $B$  и величина  $h_c$  практически не зависят от величины  $h_p$ .

Аналогичная ситуация имеет место в задаче [12], связанной с определением установившейся анодной границы, при обработке детали трехгранным электродом-инструментом с вертикальными боковыми гранями, одна из которых является диэлектриком.

### Литература

1. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
2. Давыдов А.Д., Козак Е. Высокоскоростное электрохимическое формообразование. М.: Наука, 1990. 272 с.
3. Де Барр А.Е., Оливер Д.А. Электрохимическая обработка. М.: Машиностроение, 1973. 183 с.
4. Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008. 413 с.
5. Киселёв О.М., Котляр Л.М. Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 156 с.
6. Клоков В.В. Электрохимическое формообразование. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. 80 с.
7. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. Определение формы анода с учетом свойств электролита в задачах электрохимической обработки металлов // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44, № 3. С. 179–184.
8. Крылов А.А. Задача Коши для уравнения Лапласа в теории электрохимической обработки металлов // Доклады АН СССР. 1968. Т. 178, № 2. С. 321–323.
9. Крылов А.А., Шустер В.Г., Эйдельман Р.Д. О решении плоской стационарной задачи электрохимической обработки металла (задача Коши для уравнения Лапласа) // Электронная обработка материалов. 1969. № 3. С. 21–27.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
11. Миназетдинов Н.М. О кавитационном течении идеальной несжимаемой жидкости при электрохимической обработке металлов // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 1. С. 45–53.
12. Миназетдинов Н.М. Об одной схеме фиктивного течения идеальной несжимаемой жидкости в задаче электрохимической обработки металлов // Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений: сборник трудов конференции. Уфа: Изд-во Уфимского авиац. техн. ун-та, 2019. С. 119–124.
13. Седыкин Ф.В. Размерная электрохимическая обработка деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 304 с.
14. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963. Т. 2: Трансцендентные функции. 688 с.

### Literatura

1. Gurevich M.I. Teoriya struj ideal'noj zhidkosti. M.: Nauka, 1979. 536 s.
2. Davydov A.D., Kozak E. Vysokoskorostnoe elektrokhimicheskoe formoobrazovanie. M.: Nauka, 1990. 272 s.
3. De Barr A.E., Oliver D.A. Elektrokhimicheskaya obrabotka. M.: Mashinostroenie, 1973. 183 s.

Тукмаков Д.А. Влияние учета межкомпонентного взаимодействия на параметры...

4. Zhitnikov V.P., Zajtsev A.N. Impul'snaya elektrokhimicheskaya razmernaya obrabotka. M.: Mashinostroenie, 2008. 413 s.
5. Kiselyov O.M., Kotlyar L.M. Nelinejnye zadachi teorii strujnykh techenij tyazhelej zhidkosti. Kazan': Izd-vo Kazan. un-ta, 1978. 156 s.
6. Klokov V.V. Elektrokhimicheskoe formoobrazovanie. Kazan': Izd-vo Kazan. un-ta, 1984. 80 s.
7. Kotlyar L.M., Minazetdinov N.M. Opredelenie formy anoda s uchetom svojstv elektrolita v zadachakh elektrokhimicheskoy obrabotki metallov // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2003. T. 44, № 3. S. 179–184.
8. Krylov A.L. Zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasy v teorii elektrokhimicheskoy obrabotki metallov // Doklady AN SSSR. 1968. T. 178, № 2. S. 321–323.
9. Krylov A.L., Shuster V.G., Ejdel'man R.D. O reshenii ploskoj stacionarnoj zadachi elektrokhimicheskoy obrabotki metalla (zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasy) // Elektronnaya obrabotka materialov. 1969. № 3. S. 21–27.
10. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funktsij kompleksnogo peremennogo. M.: Nauka, 1987. 688 s.
11. Minazetdinov N.M. O kavitatsionnom techenii ideal'noj neszhimaemoj zhidkosti pri elektrokhimicheskoy obrabotke metallov // Prikladnaya matematika i mekhanika. 2017. T. 81, vyp. 1. S. 45–53.
12. Minazetdinov N.M. Ob odnoj skheme fiktivnogo techeniya ideal'noj neszhimaemoj zhidkosti v zadache elektrokhimicheskoy obrabotki metallov // Informatsionnye tekhnologii intellektual'noj podderzhki prinyatiya reshenij: sbornik trudov konferentsii. Ufa: Izd-vo Ufimskogo aviats. tekhn. un-ta, 2019. S. 119–124.
13. Sedykin F.V. Razmernaya elektrokhimicheskaya obrabotka detalej mashin. M.: Mashinostroenie, 1976. 304 s.
14. Uitteker E.T., Watson Dzh.N. Kurs sovremennogo analiza. M.: Fizmatgiz, 1963. T. 2: Transsendentnye funktsii. 688 s.

DOI: 10.25586/RNUV9187.20.03.P.051

УДК 51-72, 533

Д.А. Тукмаков

ВЛИЯНИЕ УЧЕТА МЕЖКОМПОНЕНТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
НА ПАРАМЕТРЫ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ  
МОДЕЛИРОВАНИИ ИСТЕЧЕНИЯ ГАЗОВЗВЕСИ В ВАКУУМ

Моделируется течение однородного газа и неоднородной среды. Целью является изучение влияния дисперсной компоненты смеси на истечение смеси в вакуум. Проводится сопоставление истечения вязкого газа с аналитическим решением для идеального (невязкого и нетеплопроводного газа), известным из литературы. Примененная математическая модель реализует континуальную методологию моделирования течения неоднородной среды. Методика моделирования движения смеси предполагает решение полной гидродинамической модели движения для каждой из компо-