

10. *Nechaj A.A., Borisov A.A., Borisova Yu.I.* Tochechnyj analiz dannyh distancionnogo zondirovaniya Zemli sredstvami yazyka programmirovaniya Python // Vestnik Rossijskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2019. Vyp. 1. S. 49–55.
11. *Nechaj A.A., Kop'ev A.I.* Metod upravlyаемого raspredeleniya resursov mezhdu yadrami processora // Vestnik Rossijskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2018. Vyp. 2. S. 101–107.
12. *N'yuell P., Sajmon G.* GPS-programma, modeliruyushchaya process chelovecheskogo myshleniya // Vychislitel'nye mashiny i myshlenie. M.: Mir, 1967. S. 283–301.
13. *Poddubnyj V.A., Pervuhin D.A.* Opredelenie ocenok chastichnoj precedentnosti v situacionnyh sovetuyushchih sistemah boevogo nadvodnogo korablya // Trudy rossijsko-pol'skoy konferencii "Analiz, prognozirovanie i upravlenie v slozhnyh sistemah". SPb.: SZTU, 2002. S. 360–366.
14. *Polonchik O.L., Artyushkin A.B., Nechaj A.A., Polonchik E.O.* Radiolokacionnye sistemy distancionnogo zondirovaniya Zemli na baze sputnikov so stabilizaciej vrashcheniem // Vestnik Rossijskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2017. Vyp. 1. S. 35–41.
15. *Svinarchuk A.A., Nechaj A.A.* Ispol'zovanie kvantovyh vychislenij pri vybore upravlencheskogo resheniya // Vestnik Rossijskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2018. Vyp. 2. S. 31–36.
16. *Hajkin S.* Nejronnye seti: polnyj kurs = Neural Networks: A Comprehensive Foundation. 2-e izd. M.: Vil'yams, 2006. 1104 s.
17. *Hlopkov Yu.I., Tkachenko V.V., Voronich I.V., Zeya M'o M'int.* Proekt informacionnoj tekhnologii "ADANAT" // Nauka i tekhnologii v sovremennom obshchestve: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Ufa, 2014. S. 64–67.
18. *Shajmardanov A.M., Nechaj A.A., Lepekhin S.V.* Matematicheskie modeli sistem avtomaticheskogo upravleniya s shirotno-impul'snoj modulyaciej // Vestnik Rossijskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2019. Vyp. 2. S. 27–39.
19. *Shirobokov V.V., Nechaj A.A.* Algoritm planirovaniya energosberegayushchej parallel'noj obrabotki informacii s uchetom informacionnoj vazhnosti i vremeni postupleniya zadach // Vestnik Rossijskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". 2017. Vyp. 1. S. 88–93.
20. *Yasnitskij L.N.* Vvedenie v iskusstvennyj intellekt. M.: Akademiya, 2005. 176 s.
21. *Simon H.A.* The New Science of Management Decision Support System. New Jersey: Prentice Hall Inc., 1982. 135 s.

DOI: 10.25586/RNU.V9I87.20.04.P.042

УДК 519.6

**Ю.А. Завражнов**

---

**АДАПТИВНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ  
С ПОМОЩЬЮ РЕЗОЛЬВЕНТНОГО ПОДХОДА**

---

Разработан адаптивный метод для решения волнового уравнения с помощью резольвентного подхода, использующий параллельное разбиение процессов и высокую точность оценок.

*Ключевые слова:* алгоритм, численный метод, сетка, устойчивость, явная схема, спектральная задача, собственные значения, метод конечных разностей.

Yu.A. Zavrazhnov

ADAPTIVE METHOD FOR SOLVING THE WAVE EQUATION  
USING THE RESOLVENT APPROACH

An adaptive method has been developed for solving the wave equation using the resolvent approach, using parallel partitioning of processes and high accuracy of estimates.

*Keywords:* algorithm, numerical method, grid, stability, explicit scheme, spectral problem, eigenvalues, finite difference method.

*Введение*

Нахождение классического решения одномерного волнового уравнения путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье. Подробно изложена суть данного резольвентного подхода, предложенного Августом Петровичем Хромовым [3; 4].

Это упрощает подход для реализации численного метода в вещественном пространстве, но для минимальных условий начальных данных, так как такие решения имеют малую погрешность на каждом шаге; но если пренебрегать упрощением начальных данных, то подсчет решения увеличивается в разы, и возрастает погрешность в случае неоднородного уравнения. При однородности уравнения скорость работы при минимальных значениях начальных параметров выполняется за константу.

В данной работе представлено дальнейшее развитие метода А.Н. Крылова и В.А. Чернятина путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье. В результате удастся получить классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения (в случае условий закрепления) при минимальных условиях на исходные данные, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях [1, 2].

Таким образом, актуальной является разработка адаптивного алгоритма для реализации сжатия изображения или определения биометрии человека, но для этого нужно проводить исследования в этой области. Также данные преобразования можно использовать для погашения волн (например, цунами).

*Постановка задачи*

Рассмотрим задачу

$$\frac{d^2 u(x, t)}{dt^2} = \frac{d^2 u(x, t)}{dt^2} - p(x)u(x, t), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0. \quad (1)$$

Считаем, что  $p(x) \in C[0, 1]$ , и

$$\varphi(x) \in C^2[0, 1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0. \quad (2)$$

Условие  $u'_t = 0$  берется для простоты.

## Преобразование формального решения

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора  $L$ :

$$Ly = y''(x) + p(x)y(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Собственные значения оператора  $L - \lambda$ , при которых краевая задача имеет нетривиальные решения.

Высокая универсальность метода конечных разностей и связанные с ним широкие возможности для разработки параллельных вычислительных алгоритмов делает его эффективным средством решения многомерных краевых задач для дифференциальных уравнений. Для проведения расчетов были разработаны параллельные вычислительные алгоритмы.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 u(x, t)}{dt^2} = a^2 \left( \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} + \frac{d^2 u(x, t)}{dy^2} \right) + f(x, y, t, u(x, t), u_t(x, t)):$$

$$t_0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y \leq Y$$

с граничными условиями  $u(0, y, t) = g_1(y, t)$ ,  $u(X, y, t) = g_2(y, t)$ :  $0 \leq y \leq Y$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $u(x, 0, t) = g_3(x, t)$ ,  $u(x, Y, t) = g_4(x, t)$ :  $0 \leq x \leq X$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , и начальными условиями  $u(x, t) = \varphi(x, y, t)$ :  $0 \leq x \leq X$ ,  $0 \leq y \leq Y$ ,  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ .

Здесь  $x, y, t$  – независимые переменные;  $u(x, t, y)$  – искомая функция;  $u_t$  – функция-предыстория искомой функции к моменту  $t$ ;  $\tau$  – величина запаздывания,  $f(x, y, t, u(x, y, t), u_t(x, y, t))$  – функционал, определенный на  $[0, X] \times [0, Y] \times [t_0, T] \times R \times Q$ ;  $Q = Q[-\tau, 0]$  – множество функций  $u(\xi)$ , кусочно-непрерывных на  $[-\tau, 0]$  с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа,  $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{\xi \in [-\tau, 0]} |u(\xi)|$ . Предположим, что функционал  $f$  и функции  $\varphi, g_1, g_2, g_3, g_4$  таковы, что задача имеет единственное решение.

Разобьем отрезок  $[0, X]$  на части с шагом  $h_1 = X/N_1$ ,  $[0, Y]$  на части с шагом  $h_2 = Y/N_2$ , где  $N_1, N_2$  – некоторые целые числа. Введем точки:  $x_i = ih_1, i = 0, 1, \dots, N_1, y_k = kh_2, k = 0, 1, \dots, N_2$ . Разобьем отрезок  $[t_0, T]$  на части с шагом  $\Delta t_j = t_0 + j\Delta, j = -m, \dots, M$ . Обозначим приближение точного решения  $u\{x_i, y_k, t_j\}$  через  $u_{i,k}^j$ .

Введем дискретную предысторию точного решения к моменту  $t_j$  при фиксированных  $i, k$ :  $\{u_{i,k}^j\}^j = \{u_{i,k}^j : j - m \leq j \leq j\}$ . Оператором интерполяции-экстраполяции назовем отображение  $I: \{u_{i,k}^j\}^j \rightarrow u_{i,k}^j(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$ .

Для  $0 \leq s \leq 1$  рассмотрим семейство методов:

$$\frac{u_{i,k}^{j+1} - 2u_{i,k}^j + u_{i+1,k}^{j-1}}{\Delta^2} = sa^2 \left( \frac{u_{i-1,k}^{j+1} - 2u_{i,k}^{j+1} + u_{i+1,k}^{j+1}}{h_1^2} \right) + sa^2 \left( \frac{u_{i-1,k-1}^{j+1} - 2u_{i,k}^{j+1} + u_{i+1,k+1}^{j+1}}{h_2^2} \right) +$$

$$+ sa^2 \left( \frac{u_{i-1,k}^{j-1} - 2u_{i,k}^{j-1} + u_{i+1,k}^{j-1}}{h_1^2} + \frac{u_{i-1,k-1}^{j-1} - 2u_{i,k}^{j-1} + u_{i+1,k+1}^{j-1}}{h_2^2} \right) +$$

$$+ (1-2s)a^2 \left( \frac{u_{i-1,k}^j - 2u_{i,k}^j + u_{i+1,k}^j}{h_1^2} + \frac{u_{i-1,k-1}^j - 2u_{i,k}^j + u_{i+1,k+1}^j}{h_2^2} \right) + F_{i,k}^j,$$

Завражнов Ю.А. Адаптивный метод для решения волнового уравнения...

где  $i = 1, \dots, N_1, k = 1, \dots, N_2, j = 0, \dots, M - 1$ , с граничными условиями  $u_{\{0,k\}}^j = g_1(y_k, t_j)$ ,  $u_{\{N_1,k\}}^j = g_2(y_k, t_j)$ ,  $u_{\{i,0\}}^j = g_3(x_i, t_j)$ ,  $u_{\{i,N_2\}}^j = g_4(x_i, t_j)$  и начальными условиями  $u_{\{i,k\}}^j = \varphi_1(x_i, y_k, t_j)$ ;  $-m \leq j \leq 0$ ,  $F_{i,k}^j(v_{i,k}^j)$  – функционал, определенный на  $v_{i,k}^j = I(u_{i,k}^j) \in Q[-\tau, \Delta]$ , связанный с функционалом  $f(x_i, y_k, t_j, u_{i,k}^j)$ .

При  $s = 0$  получается явная схема, при  $0 \leq s \leq 1$  при каждом фиксированном  $j$  получаем систему уравнений. Чтобы привести систему к виду, при котором ее можно решить методом прогонки, перейдем к факторизованной схеме. Идея метода заключается в замене оператора.

При каждом  $t_j$  определим значения дискретной модели:

$$y_j = \begin{pmatrix} u_{\{0,0\}}^j & \cdots & u_{\{0,N_2\}}^j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{\{N_1,0\}}^j & \cdots & u_{\{N_1,N_2\}}^j \end{pmatrix}.$$

Введем операторы  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_1 u_i^j = -a^2 \frac{u_{\{i-1,k\}}^j - 2u_{\{i,k\}}^j + u_{\{i+1,k\}}^j}{h_1^2}, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad A_1 u_{\{0,k\}}^j = 0, \quad A_1 u_{\{N_1,k\}}^j = 0,$$

$$A_2 u_i^j = -a^2 \frac{u_{\{i,k-1\}}^j - 2u_{\{i,k\}}^j + u_{\{i,k+1\}}^j}{h_2^2}, \quad 1 \leq i \leq N_2 - 1, \quad A_2 u_{\{0,k\}}^j = 0, \quad A_2 u_{\{N_1,k\}}^j = 0.$$

Тогда можно переписать в виде

$$y_{\{j+1\}} - 2y_j + y_{\{j-1\}} + \Delta^2 s (A_1 + A_2) (y_{\{j+1\}} + y_{\{j-1\}}) + \Delta^2 (1 - 2s) (A_1 + A_2) y_j = \Delta^2 F^j.$$

Введем оператор  $R = E + \Delta^2 s A_1 + \Delta^2 s A_2$ . Тогда уравнение (2) можно привести к виду

$$R(y_{\{j+1\}} - 2y_j + y_{\{j-1\}}) + \Delta^2 (A_1 + A_2) y_j = \Delta^2 F^j. \quad (3)$$

С учетом соотношения  $(E + \Delta^2 s A_1)(E + \Delta^2 s A_2) = E + \Delta^2 s A_1 + \Delta^2 s A_2 + O(\Delta^4)$ , получаем

$$R = R_1 R_2 + O(\Delta^4) = (E + \Delta^2 s A_1)(E + \Delta^2 s A_2) + O(\Delta^4).$$

Перейдем к факторизованной схеме:

$$R_1 R_2 (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) + \Delta^2 (1 - 2s) (A_1 + A_2) y_j = \Delta^2 F^j. \quad (3)$$

При фиксированном  $j$  получаем систему, которая эффективно решается с помощью двух прогонок по каждому из направлений  $j$ .

Данное уравнение устойчиво, следовательно, рассмотрим следующие утверждение.

**Теорема.** Для устойчивости схемы (3) достаточно выполнения неравенства

$$\left( \frac{\Delta t^y}{\Delta x^2} \right) = \frac{1}{2^{1-y}}. \quad (4)$$

**Доказательство.** Для анализа устойчивости разностной схемы воспользуемся методом Неймана. Предположим, что решение имеет вид

$$y_j^k = \delta_k e^{i q \Delta x},$$

где  $q$  – вещественное пространственное волновое число. Подставим это представление в выражение (3) и полученное выражение разделим на правую часть (4).

С учетом того факта, что

$$e^{iq\Delta x} - 2 + e^{-iq\Delta x} = \sin\left(\frac{q\Delta y}{2}\right),$$

получим

$$\delta_{k+1} - 2\delta_k + \delta_{k-1} = 4 \frac{\Delta t^y}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{q\Delta y}{2}\right) \sum_{l=0}^k \omega_l^{1-y} \delta_{k-l}, \quad (5)$$

если

$$\left| \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \right| < 1, \forall k, q.$$

Положим  $\delta_{k+1} = \xi \delta_k$  и предположим, что  $\xi = \xi(q)$  не зависит от времени.

Тогда из (5) получаем уравнение на  $\xi$ :

$$\xi - 2 + \frac{1}{\xi} = -4 \frac{\Delta t^y}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{q\Delta y}{2}\right) \sum_{l=0}^k \omega_l^{1-y} \xi^{-l}. \quad (6)$$

Если  $|\xi| > 1$  для некоторого  $q$ , то схема неустойчива. Из (5) следует, что если

$$\xi - 2 + \frac{1}{\xi} > 0 \quad (\Leftrightarrow \xi > 0),$$

то

$$\sum_{l=0}^k \omega_l^{1-y} \xi^{-l} < 0.$$

Заметим, что при  $\xi \geq 1$  имеем  $\sum_{l=0}^k \omega_l^{1-y} \geq 0$ , и, следовательно, (5) выполнено только в области устойчивости, откуда непосредственно видно, что при  $\xi \geq 1$   $\sum_{l=0}^k \omega_l^{1-y} \xi^{-l} \geq 0$ .

Теперь, если  $\xi < 0$ , то необходимо  $\sum_{l=0}^k \omega_l^{1-y} \xi^{-l} \geq 0$ . Используя подход, рассмотрим экстремальное значение  $\xi = -1$ . В результате получим условие устойчивости

$$\frac{\Delta t^y}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{\sum_{l=0}^k \omega_l^{1-y} (-1)^{-l}}. \quad (7)$$

Обозначим

$$S_{y,k} = \frac{1}{\sum_{l=0}^k \omega_l^{1-y} (-1)^{-l}}.$$

В [6] показано, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{y,k} = S_y = \frac{1}{2^{1-y}}$ , на основе чего из (5) немедленно получаем (4).

Утверждение 1 доказано.

### Параллельные алгоритмы

Вследствие огромной трудоемкости (десятки миллиардов и более вычислительных операций) для решения задачи были разработаны параллельные алгоритмы расчета. В случае явных схем метод расчета в каждой из ячеек основан на получении результатов расчетов в предыдущий момент времени от смежных ячеек и выполнении вычислений текущей и смежных ячеек. Для распараллеливания вычислений расчетная область разделяется на несколько подобластей по числу процессоров. При использовании регулярных сеток, топологически эквивалентных индексному прямоугольнику или параллелепипеду, задача декомпозиции решается разбиением области на заданное число подобластей, в каждой из которых содержится одинаковое число узлов, плоскостями, перпендикулярными ин-

дексным плоскостям. Подобласти имеют ряд фиктивных ячеек, которые перекрываются с ячейками соседних подобластей и хранят граничные значения соседних блоков. Шаблон разностной схемы определяет, какие и сколько внешних узлов оказываются необходимыми для получения корректного решения. В случае явной схемы используется трехточечный шаблон, вследствие чего для шивки решений используются функции из одного соседнего узла с каждой стороны. Каждая подобласть обрабатывается одним процессором, а обмен данными между процессорами требуется только при переходе к следующему временному слою. Связь подобластей осуществляется при помощи копирования значений искомым функций в фиктивные ячейки. Таким образом, при использовании, к примеру, 16 процессоров мы получаем 32 нити, каждая из которых реализуется одним из процессоров и обрабатывает свою подобласть данных [5; 6].

Тяжесть нагрузки осуществляется за счет нагрузки сетки при расчете данных. Простому решению сопутствует одномерная или двумерная сетки, которые построены для текущей задачи; но более сложной реализацией является трехмерная сетка (рис. 1). Данное построение является «тяжелым грузом» для машинного вычисления.

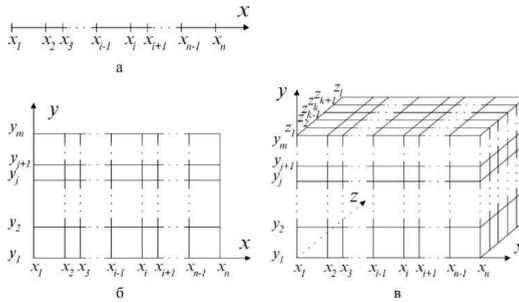


Рис. 1. Трехмерная сетка

В качестве примера было использовано уравнение  $y'(x) + 2x/y + 2C = 12y'$  с граничными условиями  $X = 1, Y = 1$  и ограниченным временем, равным 100.

Ниже приведены результаты исследований для вышепоставленной задачи (рис. 2).

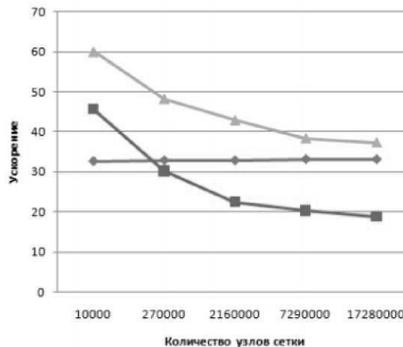


Рис. 2. Результаты исследования:

- 1 – метод конечной разности в рамках данной задачи;
- 2 – метод конечной разности из системы MathCat;
- 3 – метод конечной разности из системы Mathematica

Вывод: данная система работает по ускорению и времени работы намного быстрее, чем алгоритмы, которые встроены в популярные расчетные системы.

### Литература

1. *Петровский И.Г.* Лекции по уравнениям с частичным производством. М.: ГИТТЛ, 1953. 360 с.
2. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики / под ред. В.С. Владимирова. 2-е изд. М.: Наука, 1983. 432 с.
3. *Хромов А.П.* Смешанная задача для волнового уравнения с произвольными двухточечными краевыми условиями // Доклады АН. 2015. Т. 462, № 2. С. 148–150.
4. *Хромов А.П., Корнев В.В.* Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 4. С. 621–630.
5. *Чернов А.В., Чернов В.М., Чичева М.А., Фурсов В.А.* Компьютерная обработка изображений. Ч. II: Методы и алгоритмы.
6. *Lupo D., Payne K., Popivanov N.* Non-Existence of Nontrivial Solutions for Supercritical Equations of Mixed Elliptic-Hyperbolic Type // Contributions to Nonlinear Analysis. Basel: Birkhauser, 2006. P. 371–390.

### Literatura

1. *Petrovskij I.G.* Lekcii po uravneniyam s chastichnym proizvodstvom. M.: GITTL, 1953. 360 s.
2. *Steklov V.A.* Osnovnye zadachi matematicheskoy fiziki / pod red. V.S. Vladimirova. 2-e izd. M.: Nauka, 1983. 432 s.
3. *Hromov A.P.* Smeshannaya zadacha dlya volnovoogo uravneniya s proizvol'nymi dvuhtochечnymi kraevymi usloviyami // Doklady AN. 2015. T. 462, № 2. S. 148–150.
4. *Hromov A.P., Kornev V.V.* Rezol'ventnyj podhod k metodu Fur'e v odnoj smeshannoj zadache dlya volnovoogo uravneniya // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki. 2015. T. 55, № 4. S. 621–630.
5. *Сhernov A.V., Сhernov V.M., Сhicheva M.A., Fursov V.A.* Komp'yuternaya obrabotka izobrazhenij. Сh. II: Metody i algoritmy.
6. *Lupo D., Payne K., Popivanov N.* Non-Existence of Nontrivial Solutions for Supercritical Equations of Mixed Elliptic-Hyperbolic Type // Contributions to Nonlinear Analysis. Basel: Birkhauser, 2006. P. 371–390.