

**СПЕЦИАЛИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ
ФУНКЦИЙ ВОЛНОВЫХ КАТАСТРОФ**D.V. Rastyagaev
S.V. Rogachev**SOFTWARE FOR MODELING SPECIAL FUNCTIONS
OF WAVE CATASTROPHES****Введение**

При рассмотрении задач распространения и дифракции электромагнитных волн в рамках волновой теории катастроф применяются различные методы, которые позволяют получить равномерное асимптотическое решение в виде осциллирующего интеграла. Решение такого вида, в свою очередь, может быть представлено как разложение по конечному набору специальных функций и их первых производных с коэффициентами в виде асимптотически сходящихся рядов. Эти функции называются специальными функциями волновых катастроф (СВК). Вопросы построения асимптотических решений и волновая теория катастроф в целом изложены в [1–5; 9], в том числе – вопросы компьютерного моделирования [7; 10; 14].

Таким образом, возможность быстро рассчитывать СВК – ключевой момент в нахождении равномерных асимптотических решений. Эффективные численные расчеты невозможны без привлечения современных вычислительных машин, и, соответственно, создание комплекса программ, способного выполнять такие вычисления, важно для эффективного решения задач распространения, рассеяния и дифракции ЭМ волн.

Этот комплекс программ должен обладать рядом характеристик: максимально использовать аппаратные возможности современных

компьютеров (многопроцессорные системы, команды для векторных вычислений), быть расширяемым с целью увеличения числа особенностей, доступных для расчета, и переносимым среди современных операционных сред.

**Алгоритмы и математические методы
Метод вычисления СВК**

Для вычисления СВК выбран метод обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Как уже было замечено в публикациях, посвященных этому методу [6; 7], он превосходит другие подходы, такие, как контурный метод (трудности интегрирования нарастают с увеличением кратности), метод суммирования рядов Тейлора (с ростом соразмерности особенности растет кратность рядов, хотя в ряде случаев кратность рядов возможно сократить), метод неравномерных асимптотик (сложность метода резко возрастает с ростом сложности особенности).

Метод ОДУ является развитием подходов, которые явно используют для расчетов системы канонических дифференциальных уравнений. Отличие состоит в том, что из системы в частных производных удается выписать систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полученная система ОДУ разрешима численно и имеет единственное решение (в силу теоремы о существовании единственного решения СОДУ). Для численного решения в большинстве случаев подходят традиционные методы численного интегрирования четвертого порядка точности.

Метод ОДУ многократно рассматривался в публикациях А.С. Крюковского [4; 6] и описываться подробно не будет.

¹ Кандидат физико-математических наук, доцент, начальник управления информатизации НОУ ВПО «Российский новый университет».

© Растягаев Д.В., 2014.

² Аспирант НОУ ВПО «Российский новый университет».

© Рогачев С.В., 2014.

Интегрирование систем ОДУ

Используя метод ОДУ, особенности записываются в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, готовых к численному интегрированию. Из множества параметров особенности λ выбираются два параметра λ_i и λ_j , которые будут изменяться дискретно с заданными значениями шага h_i и h_j . Значения других параметров фиксируются.

Для каждой точки S, представляющей совокупность текущих значений параметров, производится интегрирование системы ОДУ по t от 0 до 1.

Легко заметить, что интегрирование в каждой точке проводится независимо, следовательно, возможно построение параллельного алгоритма интегрирования системы [10].

В этой работе применяется декомпозиция задачи лишь по одному из параметров (рис. 1). С точки зрения оптимизации вычислений за счет использования параллелизма, не имеет значения число параметров, по которым производится декомпозиция, если число шагов изменения параметра достаточно велико.

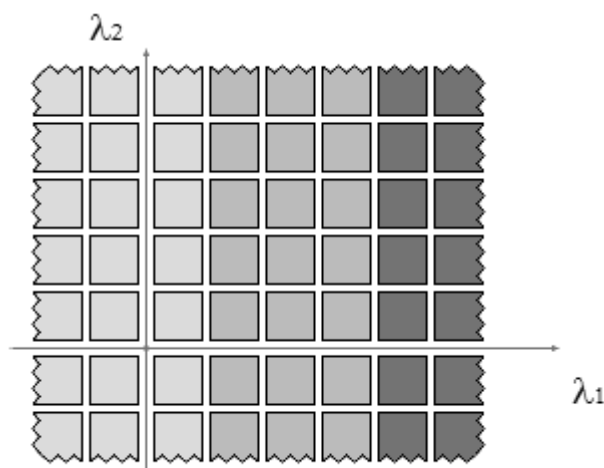


Рис. 1. Декомпозиция задачи по одному из параметров

Для оценки изменения времени вычислений при использовании параллельного алгоритма удобно пользоваться формулой:

$$T' = \frac{T}{N} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N c_{i,j} \quad (1)$$

Таким образом выражается зависимость времени исполнения в параллельной среде, константы $c_{1,j}$, $c_{2,j}$ и $c_{3,j}$ – постоянные временные задержки на создание потоков (включая передачу

начальных данных), сбор результатов вычислений и их композицию, соответственно;

T – время последовательных вычислений;

N – число независимых вычислительных устройств.

Для того чтобы величина шага интегрирования сохранилась в рамках каждой подзадачи, а результат склейки решений был максимально приближен к оригинальному (отсутствовали артефакты склейки), границы изменения параметра, по которому происходит декомпозиция задачи, должны вычисляться особым образом.

Условие равенства величины шага можно записать так:

$$k = k' = \frac{b-a}{s} = \frac{b'-a'}{s'} \quad (2)$$

В данном выражении k – величина шага;

k' – локальная величина шага, которая должна сохраняться для данной подзадачи;

a и b – глобальные границы изменения параметра;

a' и b' – границы изменения параметра для подзадачи;

s и s' – количество шагов для задачи в целом и подзадачи, соответственно.

Число шагов для данной подзадачи выражается через число независимых вычислительных устройств машины (процессоров, ядер):

$$s' = \frac{s}{n} \quad (3)$$

Зная нижнюю границу изменения параметра для подзадачи, величину шага и количество шагов, можно получить и верхнюю границу:

$$b' = ks' + a' \quad (4)$$

Итеративно можно найти границы для всех N подзадач.

В качестве алгоритмов интегрирования применены традиционный метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности и метод Кутты – Мерсона с динамическим изменением величины шага интегрирования. В большинстве случаев этих методов достаточно для точного вычисления СВК в интересующих областях изменения параметров.

Поскольку результат интегрирования системы комплексный, в качестве решения рассматриваются значения модуля или фазы результата.

Решение строится в виде матрицы, где каждому сочетанию значений изменяемых параметров ставится в соответствие результат интегрирования. По такой матрице возможно построить трехмерный график или график линий равного уровня.

Построение графика линий равного уровня

Для графического отображения решения выбраны контурные графики с закраской сечений, как наиболее ясно отражающие поведение функции за счет линий равного уровня и различных цветов сечений. Трехмерные графики, напротив, порой не обладают достаточной ясностью, требуют довольно сложного освещения, чтобы можно было наблюдать все минимумы функции.

Для построения графика используется алгоритм на основе метода «марширующие квадраты». Рассмотрим алгоритм изображения закрашенных сечений, опустив алгоритм изображения контуров, поскольку он хорошо описан в других источниках (например [8]).

Введем понятие ячейки. Ячейкой будем называть квадрат, сторона которого равна величине шага изменения параметров (прямоугольник в случае различных значений шага). Вершины ячейки – значения СВК для некоторых величин параметров λ_n и λ_m : $p_1(\lambda_n^i, \lambda_m^j), p_2(\lambda_n^{i+1}, \lambda_m^j), p_3(\lambda_n^{i+1}, \lambda_m^{j+1}), p_4(\lambda_n^i, \lambda_m^{j+1})$.

Сеткой будем называть множество смежных по горизонтали и вертикали ячеек. Каждая ячейка может быть классифицирована на основании значений СВК в ее вершинах и параметра l , представляющего аппликату секущей плоскости и отвечающего за уровень.

Для классификации ячейки применяется функция f с четырьмя аргументами – значениями СВК в вершинах данной ячейки. Функция обычно представляет собой сложный предикат вида:

$$f(p_1, p_2, p_3, p_4) = \begin{cases} p_1 > l \cap p_2 > l \cap p_3 > l \cap p_4 > l \rightarrow 15, \\ p_1 > l \cap p_2 > l \cap p_3 > l \cap p_4 \leq l \rightarrow 14, \\ \dots \\ p_1 \leq l \cap p_2 \leq l \cap p_3 \leq l \cap p_4 \leq l \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5)$$

Очевидно, что число возможных выражений в предикате – 16, как и число классов. Предикат может быть предельно упрощен с применением бинарных операций «или» и «сдвиг влево».

Оценкой m_n вершины, где n принадлежит $N = \{1, 2, 3, 4\}$, будем называть значение множества $M = \{0, 1\}$, такое что $m_n = 1$, если значение СВК в данной точке превышает аппликату секущей плоскости l , в обратном случае значение $m_n = 0$.

Тогда выражение для классификации ячейки может быть переписано следующим образом:

$$f(m_1, m_2, m_3, m_4) = (m_1 \ll 3) \vee (m_2 \ll 2) \vee (m_3 \ll 1) \vee m_4. \quad (6)$$

Каждому классу ячейки может быть сопоставлен графический прообраз (табл. 1).

Таблица 1

Соответствие числового класса ячейки и графического прообраза

Кл.	Образ	Кл.	Образ	Кл.	Образ	Кл.	Образ
0		1		2		3	
4		5		6		7	
8		9		10		11	
12		13		14		15	

Получаемое в итоге изображение хоть и отражает функцию в некотором приближении, но выглядит рубленным. Для того чтобы контуры сечений были гладкими, применяется простая интерполяция:

$$r = \frac{l - p_n}{p_m - p_n}, \quad (7)$$

где r определяет положение точки пересечения диагональной линии со стороной ячейки (p_n, p_m) , представляя собой отношение частей этой стороны, разделенных точкой пересечения. l , как и выше, – аппликата секущей плоскости. Таким образом, базовое значение 0.5, используемое в случае со стандартными графическими прообразами, будет пересчитано для каждой стороны ячейки, и контуры станут гладкими.

Вычисление СВК

Рассмотрим несколько построений, полученных при помощи комплекса программ.

Основная катастрофа E_6 .

$$V_{E_6}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \exp(i(k_1 x^4 + k_2 y^3 + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 xy + \lambda_5 x^2 y)), k_1 = \pm 1, k_2 = \pm 1. \quad (8)$$

Сделаем несколько построений для различных значений параметров (рис. 2–4).

Легко заметить, что вычислительная программа позволяет выбрать для изменения любые из доступных параметров.

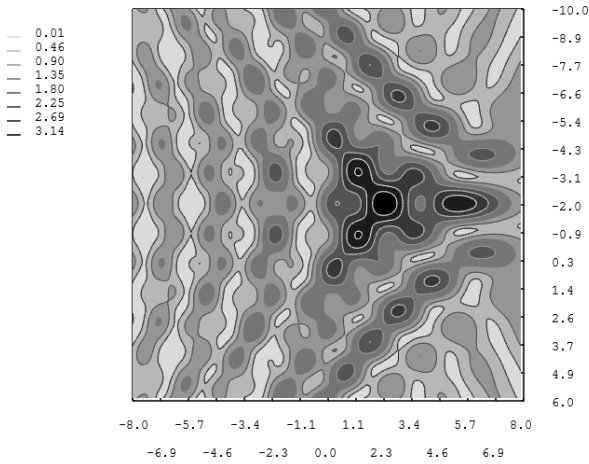


Рис. 2. Основная катастрофа E_6 – амплитуда. $\lambda_1 = [-8, 8]$, $\lambda_2 = [-10, 6]$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = -4$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$

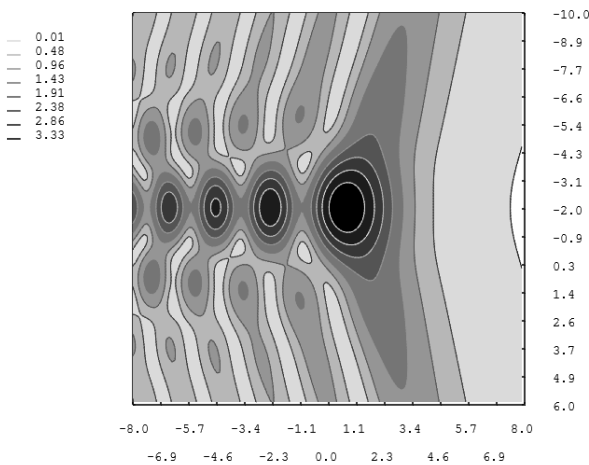


Рис. 3. Основная катастрофа E_6 – амплитуда. $\lambda_1 = [-8, 8]$, $\lambda_2 = [-10, 6]$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = -2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$

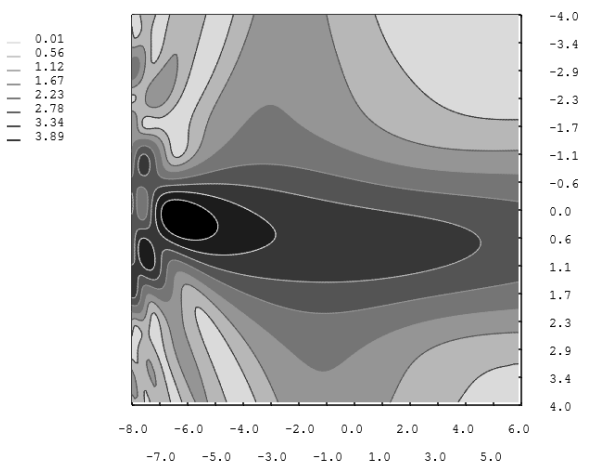


Рис. 4. Основная катастрофа E_6 – амплитуда. $\lambda_1 = [-8, 8]$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 0.5$, $\lambda_5 = [-4, 4]$, $k_1 =$, $k_2 = 1$. Изменяемые параметры λ_1 и λ_5

Краевая катастрофа B_3 .

$$V_{B_3}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \exp(i(kx^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x)) dx, k = \pm 1 \quad (9)$$

Построим амплитуду данной особенности (рис. 5).

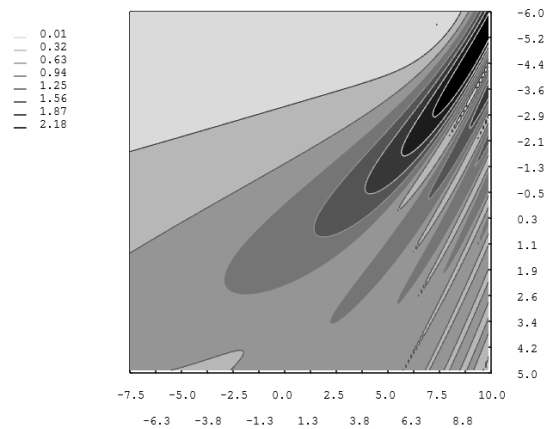


Рис. 5. Краевая катастрофа B_3 – амплитуда. $\lambda_1 = [-7.5, 10]$, $\lambda_2 = [-6, 5]$, $k = -1$

Технические характеристики комплекса программ

С точки зрения архитектуры программный комплекс можно разделить на две части – вычислительное ядро и клиентскую программу.

Вычислительное ядро реализовано с использованием языка C (стандарт GNU99) и имеет встроенные механизмы интегрирования систем ОДУ, методы расчета необходимых математических функций, процедуры управления потоками и формированием отчетов о результатах вычисления. В программе разработана модульная система с единым интерфейсом для модулей, реализующих отдельные особенности. Добавление новой особенности может быть выполнено без изменения остального кода проекта. Символы, экспортируемые одним модулем, теоретически могут использоваться другим. Например, многие модули расчета краевых катастроф используют код модуля вычисления функции Пирси.

Клиентская программа написана на JavaScript и исполняется в любом современном браузере. С ее помощью пользователь может отправлять запросы вычислительному ядру и получать осмысленные ответы в виде графика СВК. Построение графика выполняется клиентской программой на стороне пользователя и не нагружает вычислительное ядро дополнительной работой.

Для более простого создания вычислительных модулей был разработан предметноориентированный язык [11]. Препроцессор для данного языка реализован на языке программирования Ocaml. Препроцессор не выполняет практически никаких семантических проверок и при этом чрезвычайно легок (250 строк кода). Планируется расширение препроцессора до полноценного компилятора с целью поиска максимального количества ошибок в коде на предметно ориентированном языке перед трансляцией модуля в язык C.

Заключение

В статье рассмотрен комплекс программ, разработанный для эффективного расчета СВК. Методы и алгоритмы, положенные в основу вычислительного ядра системы, позволяют эффективно получать довольно точные результаты расчетов (до 1.5 секунд на однопроцессорной машине среднего уровня), при этом время вычисления возможно еще больше сократить на многопроцессорных машинах. Решение может быть изучено в виде графика линий равного уровня. За счет использования клиент-серверной архитектуры возможно использование системы в качестве облачного сервиса, предоставляющего вычислительные ресурсы интересующимся посетителям.

На данный момент комплекс способен считать следующие особенности: $A_3, B_3, C_4, E_6, F_4, P_8, K_{4,2}, A_1^4$. Готовятся модули для расчета других основных, краевых и угловых катастроф.

Требуется дальнейшее развитие в области микрооптимизации вычислительных модулей, рьяда внутренних интерфейсов.

Интересной возможностью была бы интеграция вычислительного ядра с существующей системой символьных вычислений, например Mathematica, с целью автоматизации вывода систем ОДУ.

Планируется внедрение готового продукта в информационную систему «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» [12; 13].

Литература

1. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. – М. : МФТИ, 1982. – 159 с.
2. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Применение теории краевых катастроф для построения равномерных асимптотик быстроосциллирующих интегралов // Дифракция и рас-

пространение волн : междувед. сборник. – М. : МФТИ, 1985. – С. 4–21.

3. Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Palkin E.A. Uniform asymptotics for evaluating oscillatory edge integrals by methods of catastrophe theory // Soviet journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 1987. – V. 2. – № 4. – Pp. 219–312.

4. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. – М. : РосНОУ, 2013. – 368 с.

5. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Классификация и равномерное асимптотическое описание пространственно-временных трехмерных краевых фокусировок волновых полей // Радиотехника и электроника. – 2005. – Т. 50. – № 10. – С. 1221–1230.

6. Крюковский А.С. Метод обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета специальных функций волновых катастроф (СВК) // Дифракция и распространение электромагнитных волн : межведомственный сборник научных трудов. – М. : Московский физико-технический институт, 1992. – С. 29–48.

7. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Малышенко А.Б. Разработка численных алгоритмов расчета и визуализации волновых катастроф // Вестник Российского нового университета. – Серия «Управление, вычислительная техника и информатика». – 2008. – Вып. 3. – С. 25–47.

8. Чернышенко А.Ю. Построение сеток типа восьмеричное дерево со склотыми ячейками в неоднородных областях // Вычислительные методы и программирование / НИВЦ МГУ. – 2013. – Вып. 14. – С. 229–245.

9. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Теория расчета эталонных фокальных и дифракционных электромагнитных полей на основе специальных функций волновых катастроф // Радиотехника и электроника. – 2003. – Т. 48. – № 8. – С. 912–921.

10. Крюковский А.С., Рогачев С.В. Система расчета и визуализации специальных функций волновых катастроф // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2013. – Т. 18. – № 8. – С. 10–17.

11. Рогачев С.В. Проектирование предметно ориентированного языка для расчета специальных функций волновых катастроф // Вестник Российского нового университета. – Серия «Управление, вычислительная техника и информатика». – 2013. – Вып. 4. – С. 47–52.

12. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» // Электромагнитные волны и

электронные системы. – 2007. – Т. 12. – № 8. – С. 71–75.

13. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Волкова Е.В., Костьо А.О., Павлова М.В. Создание информационной системы волновой теории катастроф и её применение при математическом моделировании // Вестник Российского нового университета. – 2007. – Вып. 2. – С. 91–107.

14. Дорохина Т.В., Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягев Д.В. Математическое компьютерное моделирование волновых полей типа катастроф // Распространение радиоволн : сборник докладов XXI Всероссийской научной конференции, Йошкар-Ола, 25–27 мая 2005 г. – Йошкар-Ола : МарГТУ, 2005. – Т. 2. – С. 336–339.