

Т.В. Калинин, А.О. Жуков, Е.В. Абраменко

## ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРА КОСМИЧЕСКОГО БАЗИРОВАНИЯ\*

*В статье проведена оценка значения такого основного показателя качества информационного обеспечения системы управления движением и навигацией как разрешающая способность оптико-электронного прибора с прибором с зарядовой связью в диапазоне 0,1–1,0 мкм. Получено выражение, позволяющее оценить потенциальную разрешающую способность с учетом диапазона длин волн принимаемого излучения, и определено условие, при котором приемник можно считать пространственно непрерывным.*

**Ключевые слова:** разрешающая способность, оптико-электронный прибор, пятно рассеяния, дифракционная оптическая система.

T.V. Kalinin, A.O. Zhukov, E.V. Abramenko

## POTENTIAL RESOLUTION OPTO-ELECTRONIC DEVICE IS A SPACE-BASED

*This article assessed the implications of such a main indicator of the quality of the information security system of motion control and navigation as the resolution of the opto-electronic device c with a charge-coupled device in the range of 0.1–1.0 microns. The expression allowing to estimate potential resolving power taking into account a range of wavelengths of the received radiation is received, and the condition at which the receiver can be considered spatially continuous is defined.*

**Keywords:** resolving power, optoelectronic device, scattering spot, diffraction optical system.

На борту космических аппаратов (КА) оптико-электронные приборы (ОЭП) совместно с системой обработки информации (СОИ) являются основными информационными элементами систем управления движением и навигацией (СУДН) или дистанционного зондирования земли (ДЗЗ).

Во входящих в СУДН датчиках блока определения координат звезд семейства (БОКЗ) используются в качестве фотоприемных устройств отечественные ПЗС-матрицы «Лев» и «Сфера-1000» [1]. Отдельные основные параметры этих ПЗС-матриц приведены ниже (см. табл.).


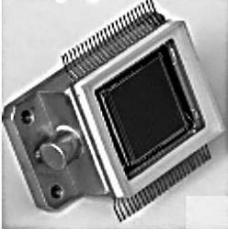
Развитие звездных датчиков ориентации неизменно идет по пути повышения помехозащищенности приборов к воздействию внешних факторов, увеличения точности измерений при снижении массогабаритных и энергетических параметров. Одновременно перечисленные параметры звездных датчиков ориентации должны соответствовать требованиям конкретных типов изделий космической техники. В по-

© Калинин Т.В., Жуков А.О., Абраменко Е.В., 2018.

\* Статья подготовлена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект МД-4052.2018.8 «Методы получения и обработки внеатмосферной информации для обнаружения и идентификации космических объектов в широком спектральном диапазоне»).

следнее время не произошло событий, радикально изменяющих подходы к построению звездных датчиков ориентации. Так, например, для наблюдения звезд отсутствует необходимость ухода из видимой и ближней ИК-областей спектра в какой-либо иной спектральный диапазон [1–3].

### Основные параметры ПЗС-матриц «Лев» и «Сфера-1000»

Характеристика	«Лев»	«Сфера-1000»
Внешний вид ПЗС-матрицы		
Размер фотозоны, пкс	512 × 512	1024 × 1024
Размер пиксела, мкм	16 × 16	16 × 16
Квантовая эффективность, %, не менее, на длинах волн, нм:		
550	45	34
700	45	45
900	10	13

Выходная информация ОЭП и СОИ содержит координаты источников излучения искусственного или естественного происхождения (далее – источники), по которым производится построение ориентации КА или наводится бортовая аппаратура зондирования. При этом источник излучения должен быть по крайней мере разрешен, обнаружен и отсекалирован от других похожих источников излучения искусственного (ложных объектов) и естественного (звезд, планет и других подобных им объектов) происхождения.

Процесс обнаружения, селекции и измерения параметров движения цели ОЭП носит ярко выраженный вероятностный характер. Причиной тому являются флуктуации излучений искусственных источников, помехи от фоновых (распределенных по полю зрения) и точечных естественных источников на входе прибора и его собственные шумы. В результате выходная информация ОЭП после обработки СОИ выдается в СУДН с некоторой погрешностью, определяющей качество информационного обеспечения СУДН КА.

Исходя из вышеизложенного оценим значение такого основного показателя качества информационного обеспечения СУДН, как разрешающая способность ОЭП с ПЗС в диапазоне 0,1–1,0 мкм.

#### Оценка потенциальной разрешающей способности ОЭП

Очевидно, что разрешающая способность ОЭП зависит:

- от эквивалентной весовой функции оптической системы (ОС) и промежуточных звеньев (электронно-оптического преобразователя), характеризующей пространственные искажения, вносимые в оптическое изображение источника («размытие» точки в пятно рассеяния, или просто пятно);

- от растровой структуры матричного фотоприемника (МФП), характеризующей пространственные искажения, вносимые в электронное изображение источником (дискретизация по пространственным координатам оптического изображения).

Учет только первого фактора дает возможность оценить разрешающую способность при идеальном с точки зрения пространственной дискретизации приемнике

(пространственно-непрерывный приемник). При этом если рассматривается ОС дифракционного качества и предполагается отсутствие электронно-оптического преобразователя (ЭОП), то полученная оценка характеризует потенциальные возможности ОЭП по разрешению двух точечных источников (ТИ).

В материале данной статьи будет получено выражение, позволяющее оценить потенциальную разрешающую способность ОЭП с учетом диапазона длин волн принимаемого излучения, и определено условие, при котором приемник можно считать пространственно непрерывным.

Общепринятым критерием разрешающей способности оптического обнаружителя является критерий Рэля раздельного восприятия двух ТИ [4]. Он требует, чтобы максимум изображения (пятна рассеяния) одного ТИ в фокальной плоскости дифракционной ОС совпадал с первым темным кольцом в дифракционном пятне другого ТИ. Таким образом, минимальное угловое расстояние  $\theta_{\min}$  в радианах между двумя ТИ определяется выражением

$$\theta_{\min} = \frac{1,22\lambda}{d_0}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – длина волны принимаемого от ТИ монохроматического излучения;  $d_0$  – диаметр входного зрачка ОС.

Полагая, что радиус первого темного кольца в дифракционной картине изображения ТИ  $\rho_{01} = d_{\text{ТИ}}/2$ , где  $d_{\text{ТИ}}$  – диаметр пятна рассеяния, (1) можно записать в виде

$$\theta_{\min} = \frac{d_{\text{ТИ}}}{2f'}. \quad (2)$$

Выражение (2) можно считать более общим, так как  $d_{\text{ТИ}}$  определяется исходя из конкретного вида весовой функции ОС. Для ОС дифракционного качества, например,

$$d_{\text{ТИ}} = \frac{2,44\lambda f'}{d_0}.$$

Запишем критерий (2) применительно к ОЭП. При этом необходимо учесть увеличение в  $\Gamma_{\text{ОЭП}}$  раз изображения ТИ в его промежуточных звеньях:

$$\theta_{\min} = \frac{d_{\text{ТО}}}{2\Gamma_{\text{ОЭП}}^2 f'_{\text{ОЭП}}}, \quad (3)$$

где  $f'_{\text{ОЭП}}$  – эквивалентное заднее фокусное расстояние ОЭП.

Следует обратить внимание на то, что формулы (1)–(3) справедливы, если пренебречь пространственной дискретизацией изображения растровыми элементами (волоконно-оптическими и микроканальными пластинами и МФП).

При наличии в ОЭК только ОС и пространственно непрерывного МФП потенциальная разрешающая способность может быть определена по формуле (1). Однако реально принимаемое излучение не является монохроматическим, а характеризуется диапазоном  $\Delta\lambda$ . Уточним критерий (1) для этого случая.

В [5] приводится выражение распределения освещенности в плоскости изображения ОС дифракционного качества при приеме излучения в конечном диапазоне длин волн  $\lambda_1 + \Delta\lambda$  при нижней границе, равной  $\lambda_1$ :

$$E(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho) = \frac{\pi^2 d_0^4}{16 f'^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_1 + \Delta\lambda} \frac{\tau_o(\lambda) \tau_\phi(\lambda) E_{A\lambda}}{\lambda^2} \cdot \left\{ \frac{2J_1 \left[ \frac{\pi d_0}{\lambda f'} \rho \right]}{\left[ \frac{\pi d_0}{\lambda f'} \rho \right]} \right\}^2 d\lambda, \quad (4)$$

где  $\rho$  – полярный радиус в системе координат, связанной с центром пятна рассеяния;  $\tau_o(\lambda)$ ,  $\tau_\phi(\lambda)$  – спектральные коэффициенты пропускания оптики и фильтра;  $E_{A\lambda}$  – спектральная плотность освещенности, создаваемая источником излучения на апертуре ОС;  $J_1$  – функция Бесселя первого рода первого порядка.

Если усреднить спектральные характеристики  $E_{A\lambda}$ ,  $\tau_o(\lambda)$ ,  $\tau_\phi(\lambda)$  (заменяв их соответственно на  $\bar{E}_{A\lambda}$ ,  $\bar{\tau}_o$ ,  $\bar{\tau}_\phi$ ) по диапазону  $\Delta\lambda$ , то, вынеся их за знак интеграла, получим выражение

$$E(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho) = \frac{\pi^2 d_0^4 \bar{\tau}_o \bar{\tau}_\phi \bar{E}_{A\lambda}}{16 f'^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_1 + \Delta\lambda} \frac{4 J_1^2\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f' \rho}\right)}{\lambda^2 \left(\frac{\pi d_0}{\lambda f' \rho}\right)^2} d\lambda. \quad (5)$$

Делая замену  $t = \frac{\pi d_0}{\lambda f' \rho}$ , преобразуем интеграл в выражении (5):

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_1 + \Delta\lambda} \frac{1}{\lambda^2} \frac{J_1^2\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f' \rho}\right)}{\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f' \rho}\right)^2} d\lambda = -\frac{f'}{\pi d_0 \rho} \int_{t_1}^{t_2} \frac{J_1^2(t)}{t^2} dt. \quad (6)$$

Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{J_1^2(t)}{t^2} dt$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{J_1^2(t)}{t^2} dt &= -\int J_1^2(t) d\left(\frac{1}{t}\right) = -J_1^2(t) \left(\frac{1}{t}\right) + \int \frac{1}{t} d[J_1^2(t)] = \\ &= 2 \int \frac{1}{t} J_1(t) \left[ J_0(t) - \frac{1}{t} J_1(t) \right] dt = -J_1^2(t) \frac{1}{t} + 2 \int \frac{1}{t} J_1(t) J_0(t) dt - 2 \int \frac{J_1^2(t)}{t^2} dt, \end{aligned}$$

где  $J_0$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, т. е.

$$\int \frac{J_1^2(t)}{t^2} dt = \frac{2}{3} \int \frac{1}{t} J_1(t) J_0(t) dt - \frac{1}{3} \frac{J_1^2(t)}{t}.$$

Интеграл  $\int \frac{1}{t} J_1(t) J_0(t) dt$  можно найти, используя выражение  $\int \frac{1}{z} J_\mu(\alpha z) J_\nu(\alpha z) dz =$   
 $= \alpha z \frac{J_{\mu-1}(\alpha z) J_\nu(\alpha z) - J_\mu(\alpha z) J_{\nu-1}(\alpha z)}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{J_\mu(\alpha z) J_\nu(\alpha z)}{\mu + \nu}$  [30]:

$$\int \frac{1}{t} J_1(t) J_0(t) dt = t J_0^2(t) - t J_1(t) J_{-1}(t) - J_1(t) J_0(t).$$

Заменяя  $J_{-1}(t)$  на  $-J_1(t)$  согласно выражению  $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$  [31], получим

$$\int \frac{1}{t} J_1(t) J_0(t) dt = t J_0^2(t) - t J_1(t) J_{-1}(t) - J_1(t) J_0(t).$$

Тогда интеграл  $\int \frac{J_1^2(t)}{t^2} dt$  будет равен:

$$\int \frac{J_1^2(t)}{t^2} dt = \frac{1}{3} \left[ 2t J_0^2(t) - 2J_1(t) J_0(t) + \left( \frac{2t^2 - 1}{t} \right) J_1^2(t) \right]. \quad (7)$$

Возвращаясь к выражению (5) и учитывая (6) и (7), можем записать:

$$E(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho) = -\frac{\pi d_0^3 \bar{\tau}_0 \bar{\tau}_\phi \bar{E}_{A\lambda}}{12 f' \rho} \left[ 2t J_0^2(t) - 2J_1(t)J_0(t) + \left( \frac{2t^2 - 1}{t} \right) J_1^2(t) \right] \Big|_{t_1}^{t_2}$$

или окончательно

$$E(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho) = \frac{\pi d_0^3 \bar{E}_{A\lambda} \bar{\tau}_\phi \bar{\tau}_0}{6 f' \rho} \left[ f1 \left( \frac{\pi d_0}{\lambda_1 f' \rho} \right) - f1 \left( \frac{\pi d}{(\lambda_1 + \Delta\lambda) f' \rho} \right) \right], \quad (8)$$

где  $f1(z) = \left[ \left( \frac{z^2 - 0,5}{z} \right) J_1^2(z) + z J_0^2(z) - J_1(z)J_0(z) \right]$ .

Полученное выражение позволяет рассчитать освещенность в пятне рассеяния дифракционной ОС с учетом диапазона принимаемого излучения, но не дает возможности в явном виде выделить соответствующую весовую функцию. Преобразуем формулу (8), сделав замену  $k = \frac{\pi d_0}{f'}$ :

$$E(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho) = \frac{1}{6} k^2 d_0^2 \bar{E}_{A\lambda} \bar{\tau}_\phi \bar{\tau}_0 \frac{1}{k \rho} \left[ f1 \left( \frac{k \rho}{\lambda_1} \right) - f1 \left( \frac{k \rho}{\lambda_1 + \Delta\lambda} \right) \right]. \quad (9)$$

Рассмотрим функцию

$$f3(k, \rho, \lambda) = \frac{1}{k \rho} f1 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} J_1^2 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) - \frac{\lambda}{2(k \rho)^2} J_1^2 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda} J_0^2 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) - \frac{1}{k \rho} J_0 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) J_0 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right).$$

Найдем  $\lim_{\rho \rightarrow 0} f3(k, \rho, \lambda)$ , определив пределы каждого из слагаемых функции  $f3(k, \rho, \lambda)$ :

- 1)  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} J_1^2 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \lim_{\rho \rightarrow 0} J_1^2 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} J_1^2(0) = 0;$
- 2)  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ -\frac{\lambda}{2(k \rho)^2} J_1^2 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) \right] = -\frac{1}{2\lambda} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ J_1^2 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) / \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right)^2 \right],$

используя выражение

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J_n(x)}{x^n} = \frac{1}{2^n n!}, \text{ будет равно } -\frac{1}{8\lambda};$$

- 3)  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} J_0^2 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \lim_{\rho \rightarrow 0} J_0^2 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} J_0^2(0) = \frac{1}{\lambda};$

- 4)  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{k \rho} J_0 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) J_1 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) \right] = \left| \text{по правилу Лопиталья} \right| = -\frac{1}{k} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ J_0 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) J_1 \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right) \right]' =$   
 $= \left| [J_0(x)J_1(x)]' = J_0^2(x) - \frac{1}{x} J_0(x)J_1(x) - J_1^2(x) = \frac{1}{2} \right| = -\frac{1}{2k} \left( \frac{k \rho}{\lambda} \right)' = -\frac{1}{2\lambda}.$

Таким образом, можем записать:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f3(k, \rho, \lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{8\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{8\lambda} = f3(k, 0, \lambda). \quad (10)$$

Используя (10), найдем освещенность в центре пятна рассеяния, определяемого выражением (9):

$$\begin{aligned} E(\lambda_1, \Delta\lambda, 0) &= \frac{1}{6} k^2 d_0^2 \bar{E}_{A\lambda} \bar{\tau}_\phi \bar{\tau}_o [f3(k, 0, \lambda_1) - f3(k, 0, \lambda_1 + \Delta\lambda)] = \\ &= \frac{1}{16} k^2 d_0^2 \bar{E}_{A\lambda} \bar{\tau}_\phi \bar{\tau}_o \left[ \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1 + \Delta\lambda} \right] = \frac{1}{16} k^2 d_0^2 \bar{E}_{A\lambda} \bar{\tau}_\phi \bar{\tau}_o \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1(\lambda_1 + \Delta\lambda)}. \end{aligned}$$

Весовая функция теперь может быть найдена так:

$$w_{\text{дифр}}(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho) = \frac{E(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho)}{E(\lambda_1, \Delta\lambda, 0)}.$$

Окончательное выражение для весовой функции ОС дифракционного качества с учетом диапазона длин волн принимаемого излучения имеет вид:

$$w_{\text{дифр}}(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho) = \frac{8\lambda_1(\lambda_1 + \Delta\lambda)}{3\Delta\lambda} [f3(k, \rho, \lambda_1) - f3(k, \rho, \lambda_1 + \Delta\lambda)] \quad (11)$$

или

$$w_{\text{дифр}}(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho) = \frac{8\lambda_1(\lambda_1 + \Delta\lambda)}{3\pi d_0 \rho \Delta\lambda} f' \left[ f1\left(\frac{\pi d_0 \rho}{f' \lambda_1}\right) - f1\left(\frac{\pi d_0 \rho}{f' \{\lambda_1 + \Delta\lambda\}}\right) \right]. \quad (12)$$

Рассмотрим поведение  $w_{\text{дифр}}(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho)$  при уменьшении диапазона  $\Delta\lambda$ , другими словами, найдем  $w_{\text{дифр}}(\lambda_1, 0, \rho) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} w_{\text{дифр}}(\lambda_1, \lambda_1 + \Delta\lambda, \rho)$ :

$$\begin{aligned} w_{\text{дифр}}(\lambda, \lambda + \Delta\lambda, \rho) &= \frac{8\lambda(\lambda + \Delta\lambda)}{3(\lambda + \Delta\lambda - \lambda)} [f3(k, \rho, \lambda) - f3(k, \rho, \lambda + \Delta\lambda)] = \\ &= -\frac{8}{3} (\lambda^2 + \lambda \Delta\lambda) \frac{f3(k, \rho, \lambda + \Delta\lambda) - f3(k, \rho, \lambda)}{\Delta\lambda}. \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned} w_{\text{дифр}}(\lambda, 0, \rho) &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} w_{\text{дифр}}(\lambda, \lambda + \Delta\lambda, \rho) = -\frac{8\lambda^2}{3\lambda} \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{f3(k, \rho, \lambda + \Delta\lambda) - f3(k, \rho, \lambda)}{\Delta\lambda} = \\ &= -\frac{8\lambda^2}{3} [f3(k, \rho, \lambda)]'_\lambda = \left| [f3(k, \rho, \lambda)]'_\lambda = -\frac{3}{2} \frac{J_1^2\left(\frac{k\rho}{\lambda}\right)}{(k\rho)^2} \right| = \frac{4J_1^2\left(\frac{k\rho}{\lambda}\right)}{\left(\frac{k\rho}{\lambda}\right)^2} = w_{\text{дифр}}(\rho). \end{aligned}$$

Таким образом, при сужении границ диапазона длин волн принимаемого излучения  $w_{\text{дифр}}(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho)$  стремится к весовой функции ОС дифракционного качества, определяемой выражением (13):

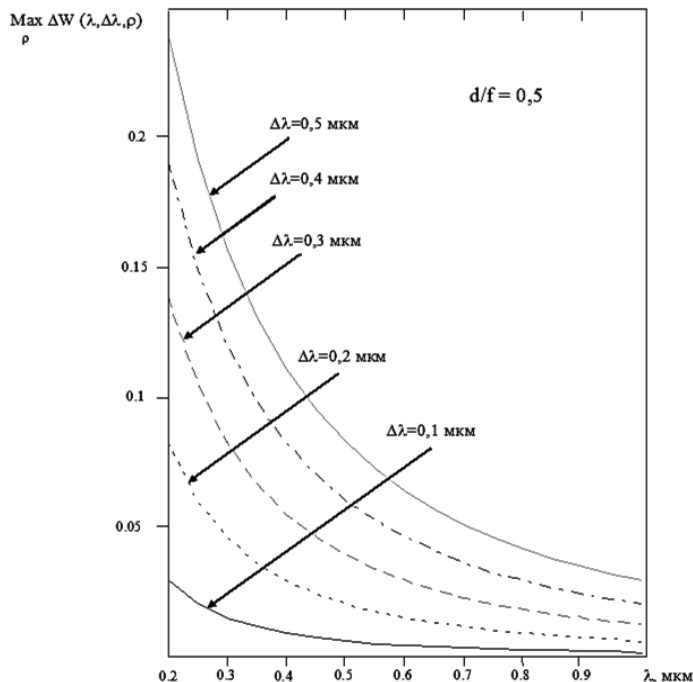
$$w_{\text{дифр}}(\lambda, \rho) = \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f'} \rho\right)}{\frac{\pi d_0}{\lambda f'} \rho} \right]^2. \quad (13)$$

Увеличение диапазона  $\Delta\lambda$  от нуля приводит к все большему рассогласованию весовых функций (13) и (11), которое можно оценить функцией разности следующего вида:

$$\Delta W(\lambda, \Delta\lambda, \rho) = \left| w_{\text{дифр}}(\lambda, \lambda + \Delta\lambda, \rho) - w_{\text{дифр}}(\lambda + a\Delta\lambda, \rho) \right|. \quad (14)$$

В выражении (14) весовая функция (13) записана как функция двух переменных: полярного радиуса  $\rho$  и длины волны  $\lambda + a\Delta\lambda$ , где  $a$  – некоторый коэффициент, имеющий значение в пределах от 0 до 1. То есть с помощью функции разности (14) можно оценить ошибку использования вместо  $w_{\text{дифр}}(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho)$  весовой функции  $w_{\text{дифр}}(\lambda, \rho)$ , определяемой выражением (13), в которой диапазон  $\Delta\lambda$  подменяется некоторой эквивалентной длиной волны между нижней  $\lambda_1$  и верхней  $\lambda_1 + \Delta\lambda$  границами диапазона (конкретное значение определяется коэффициентом  $a$ ).

На рис. 1 приведено максимальное по полярному радиусу  $\rho$  значение функции разности  $\Delta W(\lambda, \Delta\lambda, \rho)$  при  $a = 0,5$ , изменении нижней границы диапазона (абсцисса графика) от 0,2 до 1 мкм и разности между границами диапазона  $\Delta\lambda$  от 0,1 до 0,5 мкм. Легко заметить, что только в области, близкой к 1 мкм, и при достаточно узких диапазонах ошибка не превышает 1–5%. В ультрафиолетовой и синей части видимого диапазона ошибка достигает уже десятков процентов.



**Рис. 1.** Максимальное расхождение весовых функций ОС дифракционного качества в зависимости от диапазона длин волн принимаемого излучения

В отличие от весовой функции (13),  $w_{\text{дифр}}(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho)$  не имеет нулей, и оценку радиуса пятна рассеяния целесообразно производить по энергетическим соображениям.

Для ОС с весовой функцией (13) часть  $\Delta\Phi$  полного энергетического потока, падающего на круг радиусом  $\rho_0$ , определяется выражением [6]

$$\Delta\Phi(\rho_0) = 1 - J_0^2\left(\frac{\pi d}{\lambda f'}\rho_0\right) - J_1^2\left(\frac{\pi d}{\lambda f'}\rho_0\right). \quad (15)$$

В пределах первого темного кольца дифракционной картины, например,  $\Delta\Phi = 0,838$ . Найдем выражение, аналогичное (15), с учетом диапазона  $\Delta\lambda$ . Согласно выражениям (15) и (4),

$$\Delta\Phi(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho_0) = \frac{1}{E(\lambda_1, \Delta\lambda)} \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_1 + \Delta\lambda} \tau_o(\lambda)\tau_\phi(\lambda)E_{A\lambda} \times \\ \times \left[ 1 - J_0^2\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f'}\rho_0\right) - J_1^2\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f'}\rho_0\right) \right] d\lambda, \quad (16)$$

где  $E(\lambda_1, \Delta\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_1 + \Delta\lambda} \tau_o(\lambda)\tau_\phi(\lambda)E_{A\lambda} d\lambda$  – энергетическая освещенность, создаваемая ТО на апертуре ОС в диапазоне  $\Delta\lambda$  с учетом искажений спектра, вносимых оптикой и фильтром.

Если вместо спектральных характеристик в формуле (16) взять их усредненные по диапазону  $\Delta\lambda$  значения, то, вынеся их за знаки интегралов, получим выражение

$$\Delta\Phi(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho_0) = \frac{\bar{E}_{A\lambda}}{E(\lambda_1, \Delta\lambda)} \int_{\lambda_1}^{\lambda_1 + \Delta\lambda} \left[ 1 - J_0^2\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f'}\rho_0\right) - J_1^2\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f'}\rho_0\right) \right] d\lambda. \quad (17)$$

Найдем неопределенный интеграл  $\int \left[ 1 - J_0^2\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f'}\rho_0\right) - J_1^2\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f'}\rho_0\right) \right] d\lambda$ :

$$\int \left[ 1 - J_0^2\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f'}\rho_0\right) - J_1^2\left(\frac{\pi d_0}{\lambda f'}\rho_0\right) \right] d\lambda = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ k_0 = \frac{\pi d_0}{f'}\rho_0, z = \frac{k_0}{\lambda} \end{array} \right| = \int \left[ 1 - J_0^2\left(\frac{k_0}{\lambda}\right) - J_1^2\left(\frac{k_0}{\lambda}\right) \right] d\lambda = \\ = \lambda - k_0 J_0^2(z) \frac{1}{z} - 2k_0 \int \frac{1}{z} J_0(z) J_1(z) dz - \frac{k_0}{3} J_1^2(z) \frac{1}{z} + \frac{2k_0}{3} \int \frac{1}{z} J_1(z) J_0(z) dz = \\ = \lambda - \frac{k_0}{z} \left[ J_0^2(z) + \frac{1}{3} J_1^2(z) \right] - \frac{4}{3} k_0 \int \frac{1}{z} J_1(z) J_0(z) dz = \lambda - \frac{k_0}{z} \left[ J_0^2(z) + \frac{1}{3} J_1^2(z) \right] - \\ - \frac{4}{3} k_0 \left\{ z \left[ J_0^2(z) + J_1^2(z) \right] - J_1(z) J_0(z) \right\} = \\ = \lambda - \left( \frac{\lambda^2 + 4/3 k_0^2}{\lambda} \right) J_0^2\left(\frac{k_0}{\lambda}\right) - \left( \frac{\lambda^2 + 4k_0^2}{3\lambda} \right) J_1^2\left(\frac{k_0}{\lambda}\right) + \frac{4}{3} k_0 J_1\left(\frac{k_0}{\lambda}\right) J_0\left(\frac{k_0}{\lambda}\right).$$

Подставляя полученное выражение в (17) и учитывая, что  $E(\lambda_1, \Delta\lambda) = \bar{E}_{A\lambda} \Delta\lambda$ , получим:

$$\Delta\Phi(\lambda_1, \Delta\lambda, \rho_0) = \frac{1}{\Delta\lambda} \cdot [f 2(\lambda_1 + \Delta\lambda, \rho_0) - f 2(\lambda_1, \rho_0)], \quad (18)$$



где  $f_2(\lambda, \rho_0) = \lambda - \left( \frac{\lambda^2 + 4/3k_0^2}{\lambda} \right) J_0^2 \left( \frac{k_0}{\lambda} \right) - \left( \frac{\lambda^2 + 4k_0^2}{3\lambda} \right) J_1^2 \left( \frac{k_0}{\lambda} \right) + \frac{4}{3} k_0 J_1 \left( \frac{k_0}{\lambda} \right) J_0 \left( \frac{k_0}{\lambda} \right)$ ;  
 $k_0 = \frac{\pi d_0 \rho_0}{f'}$ .

Как и в случае с весовыми функциями, можно показать, что при уменьшении  $\Delta\lambda$  до нуля выражение (18) преобразуется в (15). Степень же расхождения результатов, получаемых с помощью формул (15) и (18), можно охарактеризовать функцией разности радиусов пятен рассеяния следующего вида:

$$\Delta\rho(\Delta\Phi, \lambda, \Delta\lambda) = \frac{|\rho(\lambda, \lambda + \Delta\lambda, \Delta\Phi) - \rho(\lambda + a\Delta\lambda, \Delta\Phi)|}{\rho(\lambda + a\Delta\lambda, \Delta\Phi)} 100\%, \quad (19)$$

где  $\rho(\lambda, \lambda + \Delta\lambda, \Delta\Phi)$  и  $\rho(\lambda + a\Delta\lambda, \Delta\Phi)$  – функции, вычисляющие значение радиуса пятна рассеяния при заданном энергетическом пороге  $\Delta\Phi$ , т. е. обратные функции, представленным соответственно формулами (15) и (18). В явном виде их получить затруднительно, поэтому необходимо использовать для их вычисления методы последовательных приближений. На рис. 2 представлена зависимость функции разности (19) от диапазона длин волн принимаемого излучения при нижней границе  $\lambda = 0,3$  мкм и пороге, изменяющемся в пределах 0,8...0,95.

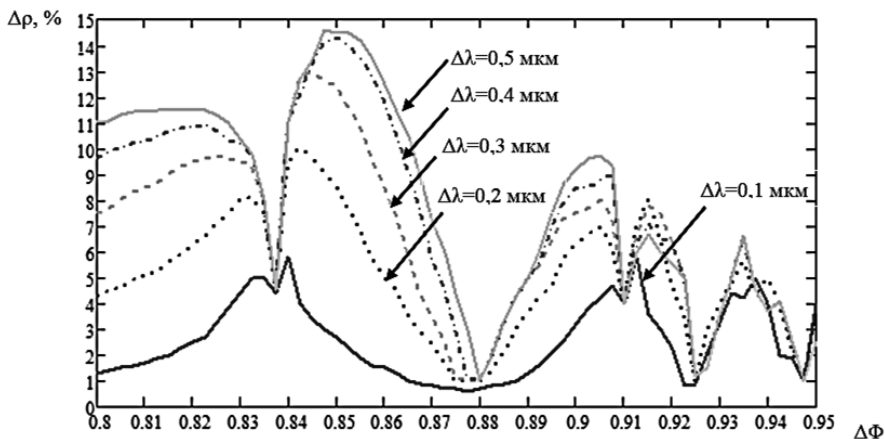


Рис. 2. Функция разности радиусов пятен рассеяния при различных значениях порога для нижней границы 0,3 мкм

Из рис. 2 следует, что ошибки применения формулы (15) для средней по диапазону длины волны могут достигать 15% в оценке радиуса пятна рассеяния. Рисунок также дает возможность выбрать значение порога, при котором ошибка минимальна, т. е. вместо формулы (18) можно использовать выражение (15). Одним из таких значений является энергетический порог, равный 0,877 (ошибка не превышает 1%). Можно показать, что порог 0,877 является оптимальным и для других значений нижней границы диапазона длин волн, а не только для 0,3 мкм.

При пороге 0,877 диаметр пятна рассеяния определяется выражением

$$d_{\text{ти}} = 2,44 \frac{f'(\lambda_1 + \Delta\lambda / 2)}{d_0}$$

Используя формулу (2), разрешающую способность оптической системы дифракционного качества с учетом диапазона принимаемого излучения определяют выражением

$$\theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda_1 + \Delta\lambda / 2}{d_0}. \quad (20)$$

Как было указано выше, выражения (1)–(3), а следовательно, и полученное (20) справедливы, когда искажениями пространственной структуры изображения ТИ можно пренебречь. Теперь определим условие, при котором этими искажениями можно пренебречь.

Пусть ОЭП состоит из ОС и МФП и весовая функция ОС известна, причем она является изопланарной и осесимметричной:

$$w_{\text{ОС}}(x, y, x_0, y_0) = w_{\text{ОС}}(x - x_0, y - y_0) = w_{\text{ОС}}(\rho), \quad (21)$$

где  $x, y$  – координаты точки плоскости изображения ОС в прямоугольной системе  $XOY$  с центром в осевой фокальной точке ОС;  $x_0, y_0$  – координаты центра весовой функции;  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Для простоты в дальнейшем будем полагать, что  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ .

Матричный приемник излучения является дискретной структурой. Координата в системе координат  $XOY$  (рис. 3) левой границы любого пикселя, находящегося в  $n$ -м столбце, будет определяться выражением

$$x_{\text{лн}} = \begin{cases} x_{\text{см}} + h_g / 2 + (n - 1)(l_g + h_g) & \text{при } n > 0; \\ x_{\text{см}} + h_g / 2 + n \cdot (l_g + h_g) & \text{при } n < 0, \end{cases}$$

правой границы –

$$x_{\text{прн}} = x_{\text{см}} - h_g / 2 + n(l_g + h_g),$$

нижней границы любого пикселя, находящегося в  $m$ -й строке

$$y_{\text{нм}} = \begin{cases} y_{\text{см}} + h_v / 2 + (m - 1)(l_v + h_v) & \text{при } m > 0, \\ y_{\text{см}} + h_v / 2 + m(l_v + h_v) & \text{при } m < 0. \end{cases}$$

и верхней границы –

$$y_{\text{вм}} = y_{\text{см}} - h_v / 2 + m(l_v + h_v).$$

Введем растровую функцию следующего вида: можно пренебречь

$$\chi(x, y, x_{\text{см}}, y_{\text{см}}) = \begin{cases} A, & \text{если } (x_{\text{лн}} \leq x \leq x_{\text{прн}}) \cup (y_{\text{нм}} \leq y \leq y_{\text{вм}}); \\ 0, & \text{если условие не выполнено,} \end{cases} \quad (22)$$

где  $A$  – постоянный множитель. Для удобства будем полагать  $A = 1$ . Тогда весовая функция рассматриваемой структуры ОЭП будет следующей:

$$w_{\text{ОЭП}}(x, y) = \chi(x, y, x_{\text{см}}, y_{\text{см}}) w_{\text{ОС}}(x, y). \quad (23)$$

Несмотря на то, что весовая функция ОС в соответствии с выражением (21) является изопланарной,  $w_{\text{ОЭП}}(x, y)$  не будет таковой из-за наличия в (23) множителя  $\chi(x, y, x_{\text{см}}, y_{\text{см}})$ . Однако при определенных условиях весовую функцию ОЭС можно считать изопланарной. Определим их.

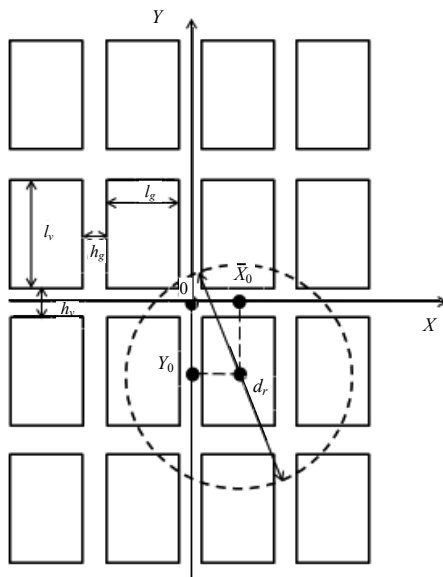


Рис. 3. Матричный приемник излучения

Согласно теореме отсчетов частота пространственной дискретизации  $w_{OC}(x, y)$  должна быть не менее удвоенной ширины ее пространственного спектра  $\Delta w_{OC}$  для неискаженного воспроизведения. Наибольший шаг дискретизации для МФП, представленной на рис. 3, составляет расстояние между серединами зон чувствительности смежных по диагонали пикселей. Фактически это длина диагонали пикселя  $d_{pix} = \sqrt{(l_g + h_g)^2 + (l_v + h_v)^2}$ . Тогда условие безыскаженного воспроизведения весовой функции ОС можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{d_{pix}} \geq 2 \Delta w_{OC}. \quad (24)$$

Ширина  $\Delta w_{OC}$  пространственного спектра весовой функции ОС зависит от ее конкретного вида.

Спектр весовой функции в виде гауссоиды вращения

$$w_{OC}(\rho) = e^{-\rho^2 / (2\rho_0^2)}, \quad (25)$$

где  $\rho_0$  – радиус пятна рассеяния на уровне 0,607, повторяет ее по форме с той лишь разницей, что вместо полярного радиуса  $\rho$  берется обратная ему величина – круговая пространственная частота  $u = (2\pi)/\rho$ :

$$\tilde{h}(u) = e^{-u^2 / (2u_0^2)},$$

где  $u_0 = 1/\rho_0$ . Ширина спектра при этом равна:

$$\Delta w_0 = \frac{2}{\rho_0}.$$

Тогда формула (24) для весовой функции в виде гауссоиды вращения примет вид:

$$d_{pix} \leq 0,25 \rho_0. \quad (26)$$

Для ОС дифракционного качества с весовой функцией вида (13) ширина спектра  $\Delta w_{\text{дифр}} = \frac{2d_0}{\lambda f'}$ . Следовательно, условие (24) сводится к выражению

$$d_{\text{pix}} \leq \frac{\lambda f'}{4d_0}. \quad (27)$$

Ограничивая радиус пятна рассеяния ОС дифракционного качества первым нулем функции (13)  $\rho_{01} = 1,22 \frac{\lambda f'}{d_0}$ , запишем (27) в виде

$$d_{\text{pix}} \leq 0,2\rho_{01}. \quad (28)$$

Для весовых функций другого вида, имеющих бесконечный спектр, при ограничении его на уровне  $\sim 0,9$  от полного объема, заключенного под поверхностью, описываемой формулой весовой функции, условие (24) близко к выражению (28). Например, для круговой весовой функции

$$w_{\text{кр}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x^2 + y^2 \leq \rho_{\text{пр}}^2, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 > \rho_{\text{пр}}^2 \end{cases}$$

условие (24) имеет вид  $d_{\text{pix}} \leq 0,22\rho_{\text{пр}}$ , где  $\rho_{\text{пр}}$  – радиус пятна рассеяния.

Переходя от радиуса к диаметру пятна рассеяния и учитывая близость условия (24) к (28) для большинства весовых функций, получим достаточно общее выражение

$$d_{\text{pix}} \leq 0,4d_{\text{ти}}. \quad (29)$$

Физически формулу (29) можно интерпретировать так. Весовую функцию ОС, ограниченную на плоскости аргументов квадратом, в который вписан круг диаметром  $d_{\text{ти}}$ , можно представить (оцифровать) в виде матрицы не менее  $16 \times 16$ .

Таким образом, если параметры системы не удовлетворяют условию (29), то при оценке разрешающей способности необходимо учитывать неизопланарность весовой функции рассматриваемой конфигурации ОЭП. При соблюдении условия (29) (или при необходимости оценить потенциально достижимое значение разрешающей способности) можно воспользоваться выражениями (1)–(3), а с учетом диапазона длин волн принимаемого излучения – (20).

## Литература

1. Аванесов Г.А., Бессонов Р.В., Форш А.А., Куделин М.И. Анализ современного состояния и перспектив развития приборов звездной ориентации семейства БОКЗ // Изв. Приборостроение. – 2015. – Т. 58. – № 1.

2. Гладышев А.И., Жуков А.О., Захаров А.И. и др. К вопросу совершенствования высокоточных солнечных датчиков и возможный путь его решения // Вестн. ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина». – 2017. – № 4 (38). – С. 41–46.

3. Захаров А.И., Прохоров М.Е., Тучин М.С., Жуков А.О. Минимальные технические характеристики звездного датчика ориентации, необходимые для достижения заданной погрешности // Астрофиз. бюл. – 2013. – Т. 68. – № 4. – С. 507–520.

4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики / пер. с англ. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 855 с.

5. Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. – М. : МИКАП, 1994. – 382 с.

6. *Батраков А.С., Минеев В.В.* Прикладная оптика / под ред. проф. А.С. Батракова. – М. : М-во обороны СССР, 1992. – С. 167.

7. *Хадсон Р.* Инфракрасные системы. – М. : Знание, 1979. – 256 с.

## References

1. *Avanesov, G.A., Bessonov, R.V., Forsh, A.A., Kudelin, M.I.* Analiz sovremennogo sostoyaniya i perspektiv razvitiya priborov zvezdnoy orientatsii semeystva BOKZ // *Izv. vuzov. Priborostroenie*. – 2015. – Т. 58. – № 1.

2. *Gladyshev, A.I., Zhukov, A.O., Zakharov, A.I.* i dr. K voprosu sovershenstvovaniya vysokotochnykh solnechnykh datchikov i vozmozhnyy put' ego resheniya // *Vestn. FGUP "NPO im. S.A. Lavochkina"*. – 2017. – № 4 (38). – С. 41–46.

3. *Zakharov, A.I., Prokhorov, M.E., Tuchin, M.S., Zhukov, A.O.* Minimal'nye tekhnicheskie kharakteristiki zvezdnogo datchika orientatsii, neobkhodimye dlya dostizheniya zadannoy pogreshnosti // *Astrofiz. byul.* – 2013. – Т. 68. – № 4. – С. 507–520.

4. *Born, M., Vol'f, E.* Osnovy optiki / per. s angl. – М. : Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1970. – 855 s.

5. *Nosach, V.V.* Reshenie zadach approksimatsii s pomoshch'yu personal'nykh komp'yuterov. – М. : МИКАР, 1994. – 382 s.

6. *Batnikov, A.S., Mineev, V.V.* Prikladnaya optika / pod red. prof. A.S. Batnikova. – М. : М-во обороны СССР, 1992. – С. 167.

7. *Khudson, R.* Infrakrasnye sistemy. – М. : Znanie, 1979. – 256 s.