

И.С. Клименко¹
С.В. Холодков²

I.S. Klimenko
S.V. Kholodkov

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ УДАРЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА О ДЕФОРМИРУЕМУЮ ПРЕГРАДУ

DISTRIBUTION OF THE PRESSURE AND STRAIN FIELDS IN THE CASE OF HITTING DEFORMABLE BARRIER BY IMPACT SOLID BODY

В статье приводятся результаты математического моделирования двухмерной осесимметричной задачи удара твердого тела о деформируемую преграду. Получены зависимости полей давления и деформаций от начальных условий (скорости, массы, энергии ударника). Выявлена динамика внутренних процессов в деформируемой области (преграде) после взаимодействия с ударником.

Ключевые слова: математическое моделирование, твердое тело, деформируемая преграда, поля давлений и деформаций.

The results of mathematical modeling of two-dimensional axially symmetric task hitting deformable barrier by impact solid body are represented in the article. The dependences of the pressure and strain fields from initial conditions (velocity, mass, hammer energy) are obtained. The dynamics of internal processes in the deformed region (barrier) after interaction with the hammer is discovered.

Keywords: mathematical modeling, solid body, deformable barrier, pressure and strain fields.

Введение

Исследование полей давления и деформаций, возникающих при выстрелах из травматического оружия, представляется весьма важным в связи с его возрастающим распространением и применением. Совершенствование оружия самообороны и боеприпасов при законодательном ограничении кинетической энергии ударника связано с оптимизацией его калибра применительно к достижению целевого эффекта в сочетании с уменьшением вероятности нанесения глубоких ранений.

В настоящей работе моделируется задача удара по деформируемой преграде пулей крупного калибра с относительно невысокой скоростью. Такими пулями, в частности, снаряжается травматический патрон комплекса самообороны «Оса». В качестве преграды может рассматриваться любое тело, подверженное деформации, с заданием необходимых параметров. В нашем

случае, естественно, для преграды задаются параметры, характерные для биологического тела.

Нами использовался численный метод расчета упругопластических течений, основанный на решении конечно-разностных уравнений [1]. Этот метод достаточно широко применяется в работах по гидродинамике, а также при исследовании пластичности металлов [2]. При выборе этого метода применительно к нашей задаче мы исходили из предположения, что он может открыть новые возможности для расчета деформаций в биологических структурах, в том числе – с учетом нелинейности их материала.

Кратко суть метода состоит в расчете скоростей и перемещений узлов расчетных сеток, конфигурация которых выбирается исходя из требуемого соотношения точности и сложности моделирования. В нашем случае с необходимостью расчет проводится с использованием подвижных сеток, поскольку имеет место перемещение границ рассматриваемой сплошной среды. Поэтому задача решается в переменных Лагранжа, т.е. рассматривается перемещение подвижных сеток [3].

¹ Доктор физико-математических наук, профессор НОУ ВПО «Российский новый университет».

² Аспирант НОУ ВПО «Российский новый университет».

Отметим, однако, что применение так называемых лагранжевых сеток ограничено кругом задач с относительно небольшими деформациями среды, следовательно, они не подходят для ситуаций с пробитием мягких тканей. Тем не менее, с их помощью можно получать косвенные данные об уровне возникающих в этом случае нагрузок и тем самым косвенно судить о характере протекания процесса.

Для расчета упругопластических течений необходимо задать уравнение состояния. Уравнение состояния должно описывать упругую, упругопластическую и гидродинамическую стадии движения. Для последних двух режимов движения должны быть сформулированы соответствующие критерии текучести.

Основные уравнения

1. Уравнения движения:

$$\frac{\partial \sum_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = \rho \ddot{x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sum_{yy}}{\partial y} = \rho \ddot{y}, \quad (2)$$

где T_{xy} – касательное напряжение;

ρ – плотность, \sum_{xx} , \sum_{yy} – полные напряжения;

$$\sum_{xx} = S_{xx} - (P + q), \sum_{yy} = S_{yy} - (P + q), \quad (3)$$

где q – искусственная вязкость (вводится для расчета гидродинамических ударных волн, позволяя заменить скачок давления в ударной волне его быстрым, но непрерывным изменением), S и P – соответственно девиаторная и гидростатическая составляющие напряжений:

P представляет собой среднее арифметическое трех напряжений сжатия, т.е.:

$$-P = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (4)$$

Здесь и ниже используются принятые обозначения, согласно которым напряжения положительны при растяжении и отрицательны при сжатии, а знак их противоположен давлению. Поэтому перед давлением появляется знак минус.

При описании текучести и пластического течения ограничиваются лишь теми компонентами напряжений, которыми обусловлена деформация сдвига. Поэтому каждое напряжение $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ раскладывается на гидростатическую составляющую P и девиаторную часть S , то есть будем иметь соотношения:

$$\sigma_1 = -P + S_1; \quad \sigma_2 = -P + S_2; \quad \sigma_3 = -P + S_3.$$

2. Уравнение неразрывности (выражает в дифференциальной форме закон сохранения массы для любого объема движущейся жидкости):

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y}, \quad (5)$$

где V – относительный объем.

3. Уравнение энергии (выражает закон сохранения энергии в дифференциальной форме):

$$\dot{E} = -(P + q)\dot{V} + V(S_{xx}\dot{\epsilon}_{xx} + S_{yy}\dot{\epsilon}_{yy} + T_{xy}\dot{\epsilon}_{xy}), \quad (6)$$

где E – внутренняя энергия на единицу начального объема, ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} – деформации S_{xx} , S_{yy} – компоненты девиатора напряжений. Искусственная вязкость (квадратичная) необходима, чтобы создавать сопротивление между движущимися слоями текучих тел (не твердых):

$$q = C_0^2 \rho^0 (\dot{V}/V)^2 A/V, \quad (7)$$

где C_0 – постоянная, A – площадь ячейки.

Использование квадратичной вязкости позволяет локализовать разрыв давления и скорости на ударном фронте на ограниченном числе ячеек, причем это число остается постоянным по мере прохождения волны давления через сетку.

4. Уравнения состояния (служат для связи напряжений и деформаций):

• Компоненты напряжений:

$$\dot{S}_{xx} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{xx} - \frac{1}{3}\dot{V}/V \right) + \delta_{xx}, \quad (8)$$

$$\dot{S}_{yy} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{yy} - \frac{1}{3}\dot{V}/V \right) + \delta_{yy}, \quad (9)$$

$$\dot{T}_{xy} = \mu \dot{\epsilon}_{xy} + \delta_{xy}, \quad (10)$$

где μ – модуль сдвига, δ – поправки на поворот, которые прибавляются к напряжениям.

При смещении элемента среды из начального напряженного состояния, помимо деформации, может произойти его поворот на некоторый угол. Этот поворот не будет влиять на рост напряжений, но первоначальное состояние этого элемента, которое характеризуется *переменными* (S_{xx}^n , S_{yy}^n , T_{xy}^n), поворачивается на определенный угол. Поскольку уравнения движения записаны для конкретной системы координат, то повернутые напряжения должны быть пересчитаны и приведены к этой системе координат.

• Скорости деформаций:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \quad (11)$$

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \quad (12)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}. \quad (13)$$

Точка над параметром означает производную по времени для фиксированной частицы.

5. Гидростатическое давление (сила давления жидкости на единицу площади):

$$P = a(\eta - 1) + b(\eta - 1)^2 + c(\eta - 1)^3 + d\eta E, \quad (14)$$

$$\eta = \frac{1}{V}$$

a, b, c – постоянные, при которых давление $P(\eta)$ превышает предел упругости.

6. Условие текучести Мизеса, необходимое для учета предела упругости. Это условие задает границу, отделяющую область пластического состояния материала от области упругого состояния:

$$(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - \frac{2}{3}(Y^0)^2 \leq 0, \quad (15)$$

где Y^0 – предел текучести для простого растяжения (напряжение при котором начинает развиваться пластическая деформация), который может быть как константой (для идеально-пластических сред), так и некоторой функцией (для анизотропных материалов, то есть материалов с упрочнением).

Для корректного применения конечно-разностной схемы метода необходимо записать выражения в частных производных для заданной точки пространства в данный момент времени. Подробное описание конечно-разностных уравнений в данной работе опускается, и на приведенных ниже рисунках показаны результаты применения рассматриваемого метода к конкретной задаче.

В качестве преграды в нашем случае рассматривается биологическая ткань, моделируемая описанным методом с заданием необходимых физико-механических характеристик, типичных для мягких тканей [5]: плотность $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, скорость звука = 1600 м/с, модуль объемного сжатия $K = \rho c_0^2 = 25.6 \cdot 10^8 \text{ Па}$, а также предел упругости, модуль Юнга и другие.

Моделируемая область представлена в виде регулярной (равномерной) сетки с квадратными ячейками. Так как задача является осесимметричной, рассматривается только одна (правая) половина моделируемой области.

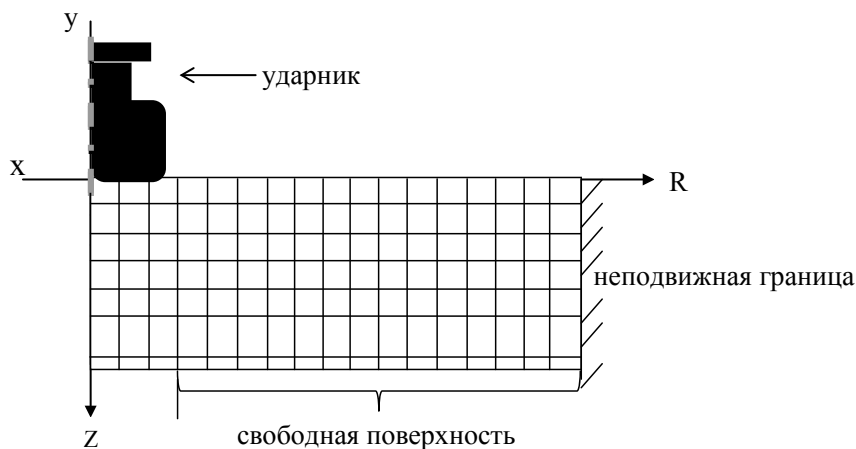


Рис. 1. Графическая модель задачи (начальная конфигурация регулярной лагранжевой сетки с ударником)

Начальные условия:

- Размер расчетной области по оси z – 5 см.
- Размер расчетной области по оси R – 20 см.
- Масса ударника – 12 г.
- Радиус ударника – 7,65 мм.

Предполагается, что ударник недеформируемый, а узлы сетки ячеек, расположенных под ударником, двигаются со скоростью ударника вдоль оси z (по вертикали). Горизонтальные скорости этих узлов считаются равными нулю. Ударник имеет форму цилиндра и считается недеформируемым.

Скорость ударника после взаимодействия с преградой рассчитывается по второму закону Ньютона [6; 7]. Размер области по глубине (4 см)

задается исходя из средней суммарной толщины кожи, подкожной клетчатки, мышц и жировой ткани тела человека в области наиболее уязвимых внутренних органов (печени, легких, селезенки). Начальная скорость ударника составляет 100 м/с, что соответствует штатной скорости пули (энергия пули $\approx 70 \text{ Дж}$).

Результаты расчетов и их обсуждение

Основные расчёты проводились на регулярных (равномерных) сетках. Характеристики, представляющие основной интерес, – это новые координаты узлов расчетной сетки. Их можно получить в виде изображений деформируемой области. Как выяснилось, основные внутренние процессы происходят вблизи оси симметрии,

следовательно, всю свободную поверхность, показанную на рис. 1, можно не учитывать. Поэтому в дальнейшем будет показана только часть расчетной области по радиальной координате (оси R).

Приложение для исследования полей давления и деформаций, возникающих в рамках поставленной задачи, представляет собой программу, написанную на языке Object Pascal в среде разработки Delphi 7 [10].

Поскольку программа моделирует динамический процесс, можно исследовать разные ситуации, получая нужные характеристики в любой момент времени. Естественно, максимальное давление будет возникать в первом слое ячеек, контактирующих с ударником, главным образом – в первой ячейке относительно оси симметрии (закрашенная ячейка на рис. 2).

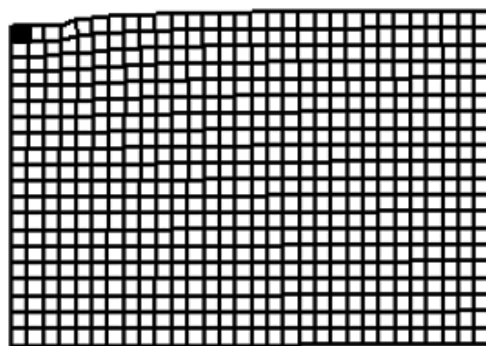


Рис. 2. Расчетная сетка через 1 мс, после удара

Ниже приведены результаты расчетов, показывающие характер изменения давления в деформируемой области и скорости ударника с течением времени.

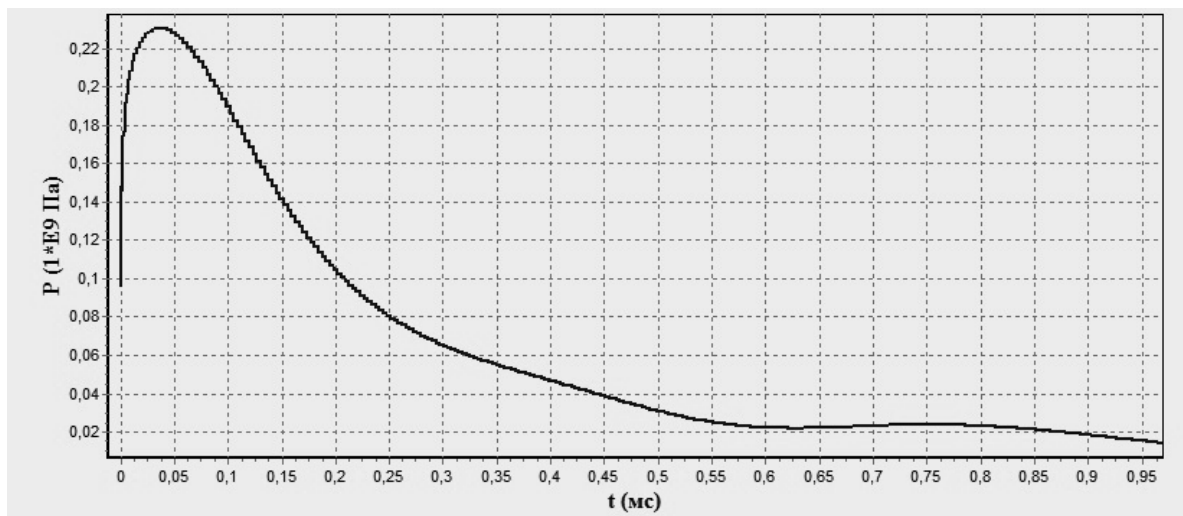


Рис. 3. Изменение давления во времени (в закрашенной ячейке)

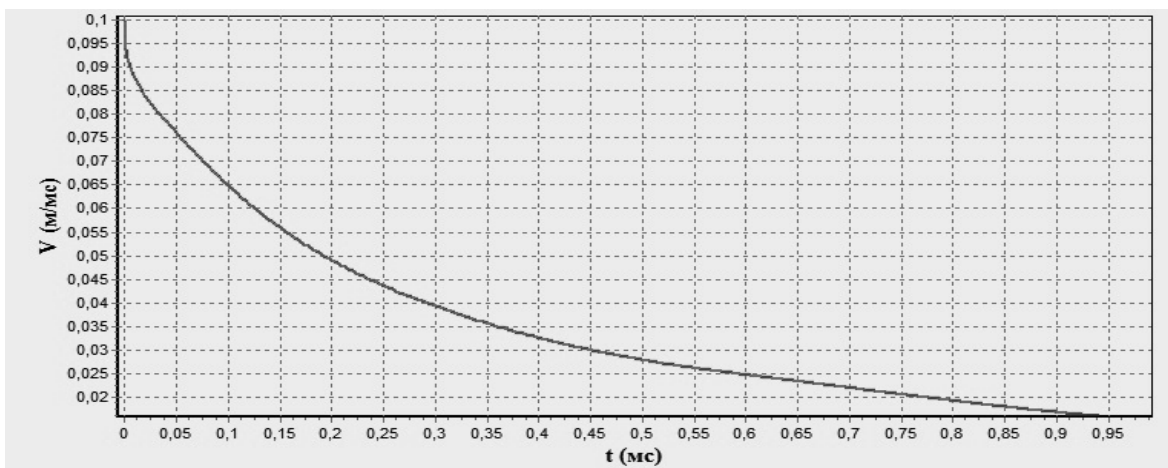


Рис. 4. Зависимость уменьшения скорости ударника от времени в результате торможения при ударе

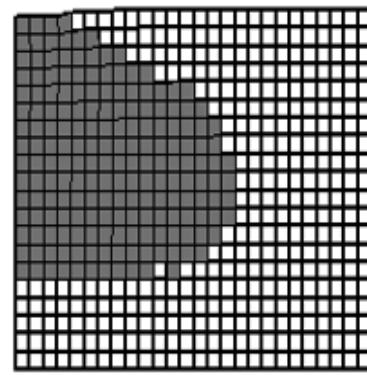
Существенным достоинством используемого подхода является возможность наблюдения динамики распространения деформации в тканях с заданными характеристиками. При этом оказалось возможным визуализировать как образование гематомы, так и разможнение тканей с образованием так называемой откольной тарелки [8], которая является достаточно объективной характеристикой динамической прочности материала на растяжение в микросекундном диапазоне длительности действия нагрузки [9]. Откольное разрушение материала (возникновение откольной тарелки) является результатом интерференции волны нагрузки (сжатия) и *отраженной* волны разгрузки (растяжения), распространяющихся навстречу друг другу. При определенном соотношении между толщинами ударника и преграды внутри нее создаются растягивающие напряжения, приводящие к указанному эффекту.

Основным вопросом при разработке и применении травматического оружия является вопрос о возникновении поражений наружных покровов, тканей и внутренних органов. Поражение органов происходит при пробитии наружных покровов.

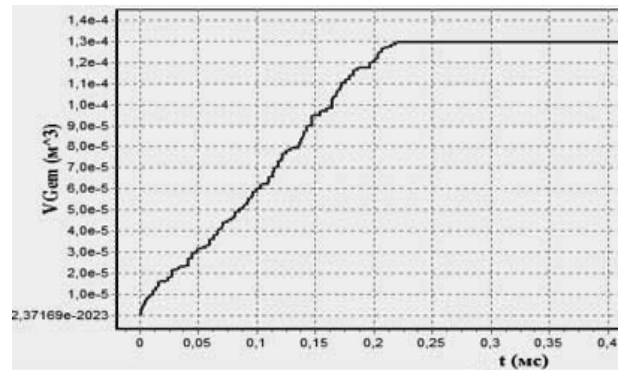
Как уже отмечалось, наша программа, основанная на лагранжевом подходе к описанию движения, не может полноценно использоваться для расчета процесса проникания из-за очень больших деформаций лагранжевой сетки. Однако, как оказалось, на основе такой программы можно косвенно выявить характер такого процесса при соответствующих уровнях нагрузок, действующих в биологических тканях при ударе.

На рис. 5 (а) выделена область мягкой ткани, в которой максимальное давление при ударе превосходит 10^7 Па. Считается, что такого давления достаточно для разрушения кровеносных сосудов и образования гематомы (синяка). Естественной мерой интенсивности травматического воздействия может служить максимальный объем гематомы. На рис. 5 (б) показано расчетное изменение объема гематомы во времени до достижения максимального значения.

Кроме подкожной гематомы другим видом повреждения мягких тканей (более тяжелым по последствиям) является их разможнение при ударе. Для оценки возможности такого повреждения, по результатам расчетов, находилась область, в которой растягивающие напряжения, появляющиеся при отражении ударной волны сжатия от внутренней поверхности мягких тканей, превосходили $50 \cdot 10^5$ Па. Такая величина заведомо превосходит предел прочности мягких



а)



б)

Рис. 5. Вид модели гематомы в момент времени $t = 0,22$ мс. (а) и изменение ее объема с течением времени (б)

тканей на разрыв. Указанная область растяжения имеет классический вид откольной тарелки (рис. 6).

Область смятия тканей (область гематомы) рис. 5(а) и область разрушения тканей разрывом рис. 6, во-первых, пересекаются, а во-вторых, в совокупности простираются практически на всю толщину мягких тканей (4 см). Это свидетельствует о том, что при заданных расчетных параметрах удара мягкие покровные ткани подвергнутся разможению.

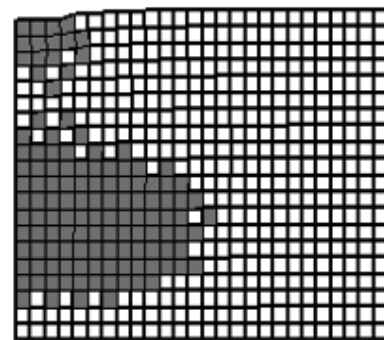


Рис. 6. Вид волны растяжения в момент времени $t = 0,45$ мс

Таким образом, результаты моделирования подтверждают исходную гипотезу об эффективности применения указанного метода для исследования полей давления и деформаций в биологических тканях. По крайней мере, на качественном уровне они вполне соответствуют практическим данным, отражаемым статистикой применения травматического оружия. Очевидный интерес представляет проведение более детального исследования, в том числе – на количественном уровне с подбором оптимальных параметров расчетной сетки.

Авторы благодарят Л.С. Евтерева за обсуждение задачи и результатов исследования.

Литература

1. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. – М. : Мир, 1967.
2. Численные методы в задачах физики взрыва и удара : учебник для вузов / В.В. Семенов. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 516 с., ил. (Прикладная механика сплошных сред : в 3 т.)
3. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. : Наука, 2004. – 400 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М. : Наука, 1978. – 512 с., ил.
5. Применение ультразвука в медицине : физические основы / под ред. К. Хилла. – М. : Мир, 1989. – 282 с.
6. Динамика удара : сб. переводов / под ред. С.С. Григоряна. – М. : Мир, 1985.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.
8. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортон А.В. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. – М. : Янус-К, 1999. – 408 с.
9. Глушак Б.П., Куропатенко В.Ф., Новиков С.А. Исследование прочности материалов при динамических нагрузках. – Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1992.
10. Архангельский А.Я. Программирование в Delphi / А.Я. Архангельский. – М. : Бином-Пресс, 2008. – 816 с.