



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.86

А.С. Крюковский¹
Д.С. Лукин²
Д.В. Растягаев³

A.S. Kryukovsky
D.S. Lukin
D.V. Rastyagaev

КАТАСТРОФЫ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН⁴

Выполнен обзор основных результатов, посвященных применению волновой теории катастроф к задачам распространения, фокусировки и дифракции радиоволн. Рассмотрены лучевые и каустические структуры, а также волновые поля в фокальных областях.

Ключевые слова: моделирование волновых процессов, распространение, дифракция, рассеяние электромагнитных волн, электромагнитные сигналы, ионосфера, магнитосфера, пространственные и пространственно-временные фокусировки, волновые катастрофы.

CATASTROPHES IN PROBLEMS OF DIFFRACTION AND WAVE PROPAGATION

A review of the main results devoted to the application of the wave theory of catastrophes to problems of propagation, focusing, and diffraction of radio waves is reviewed. Ray and caustic structures as well as wave fields in the focal regions are considered.

Keywords: simulation of wave processes, propagation, diffraction, scattering of electromagnetic waves, electromagnetic signals, ionosphere, magnetosphere, spatial and space-time focusing, wave catastrophes.

1. Введение

На основе применения волновой теории катастроф рассмотрено математическое и численное моделирование распространения, фокусировки и

¹ Доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета ИСиКТ АНО ВО «Российский новый университет».

² Доктор физико-математических наук, профессор АНО ВО «Российский новый университет».

³ Кандидат физико-математических наук, проректор по информационным технологиям АНО ВО «Российский новый университет».

дифракции электромагнитных волн в неоднородной, нестационарной и диспергирующей ионосферной плазме. Применение теории катастроф в задачах распространения радиоволн является необходимым, поскольку традиционное лучевое описание волнового поля в окрестности каустик и их особенностей является неудовлетворительным (рис. 1, 2) [1; 2]. Каустики и их особенности (катастрофы) возникают во многих радиофизи-

⁴ Эта работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (Гранты № 15-02-04206-а, №17-02-01183-а).

ческих задачах, и их описание является решающим для многих физических эффектов [1; 3–6].

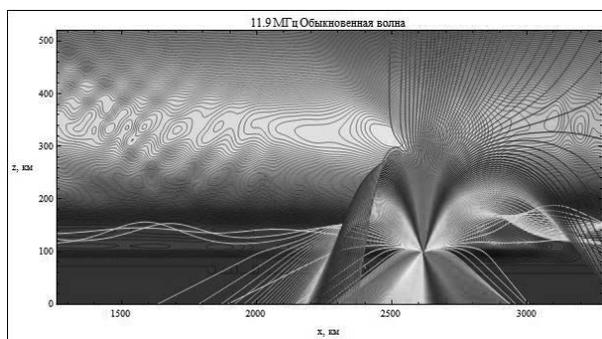


Рис. 1. Лучевое распространение в окрестности экваториальной аномалии. Источник излучения приподнят над поверхностью Земли

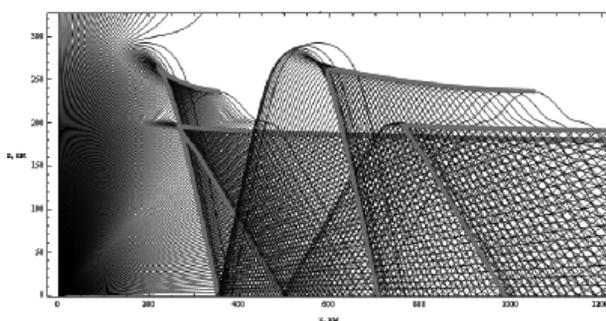


Рис. 2. Лучевая и каустическая структуры при однократном и двукратном отражении от поверхности Земли (каустики – толстые линии, лучи – тонкие линии)

2. Математическое моделирование

Согласно волновой теории катастроф [3; 5; 7–9], равномерная асимптотика поля в окрестности сингулярности основных Σ типа имеет вид:

$$U(\Lambda, \vec{q}) \cong \exp[i\Lambda\Theta(\vec{q})] \times \left[l_1 \Gamma^\Sigma(\vec{S}(\Lambda, \vec{q})) + \sum_{j=2}^N l_j \frac{\partial \Gamma^\Sigma(\vec{S})}{\partial S_{j-1}} \right], \quad \vec{S} = (\vec{\lambda}, \vec{a}), \quad (1)$$

$$\text{где } l_j = \sum_{n=0}^{+\infty} l_j^{(n)}(\Lambda, \vec{q}) = \Lambda^{\sigma_j} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\Lambda^n} \tilde{l}_j^{(n)}(\vec{q}) \quad (2)$$

– коэффициенты асимптотического разложения, и

$$\Gamma^\Sigma(\vec{\lambda}, \vec{a}) = \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iF_\Sigma(\vec{\xi}, \vec{a}, \vec{\lambda})] d\vec{\xi} \quad (3)$$

– специальная функция волновой катастрофы – СВК [11; 12].

Для определения коэффициентов асимптотического разложения в терминах амплитуды и фазы интегранты строятся цепочки рекуррентных соотношений в следующей форме [10; 13]:

$$\Lambda^{\frac{\delta}{2}} f|\Delta| = (l_1^{(0)})_g + i \sum_{j=2}^{N_g} \frac{\partial F_\Sigma}{\partial S_{j-1}^g} (l_j^{(0)})_g + \sum_{j=1}^{\delta} \frac{\partial F_\Sigma}{\partial \xi_j} (H_j^{(0)})_g, \quad (4)$$

$$i \sum_{j=1}^{\delta} \frac{\partial (H_j^{n-1})}{\partial \xi_j} = (l_1^{(n)})_g + i \sum_{j=2}^{N_g} \frac{\partial F_\Sigma}{\partial S_{j-1}^g} (l_j^{(n)})_g + \sum_{j=1}^{\delta} \frac{\partial F_\Sigma}{\partial \xi_j} (H_j^{(n)})_g. \quad (5)$$

Универсальная деформация, присутствующая в (3), выглядит следующим образом:

$$F_\Sigma(\vec{\xi}, \vec{a}, \vec{\lambda}) = \varphi_0^\Sigma(a, \xi_1, \dots, \xi_K) + \sum_{j=1}^L \lambda_j \varphi_j^\Sigma(\xi_1, \dots, \xi_K) + \sum_{j=1+K}^K \pm \xi_j^2, \quad (6)$$

$$\text{где } \varphi_0^\Sigma(a, \xi_1, \dots, \xi_K) \quad (7)$$

это нормальная форма, а

$$\varphi_j^\Sigma(\xi_1, \dots, \xi_K) \quad (8)$$

– форма возмущения.

Аналогичные результаты получены нами при решении задачи дифракции на телах с границами, в которых возникают краевые и угловые катастрофы [7; 9; 10].

3. Численные результаты. Каустики

На рис. 3–6 показаны характерные сечения каустик (толстые линии) и лучевые структуры (точки) ряда основных катастроф в соответствии с их классификацией [1–3; 8; 13].

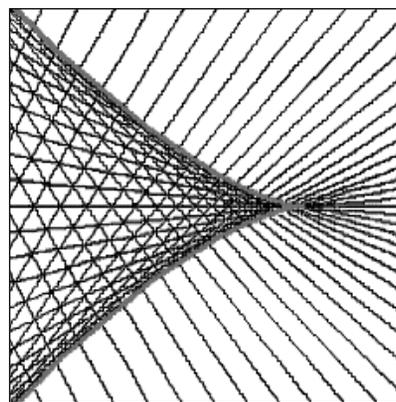


Рис. 3. Лучевая и каустическая структуры простой катастрофы A_3 (клюв)

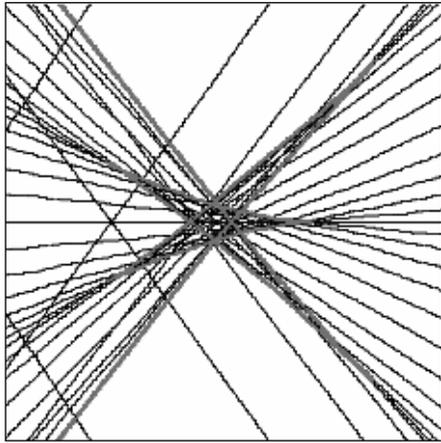


Рис. 4. Лучевая и каустическая структуры простой каспидной катастрофы A_2 (звезда)

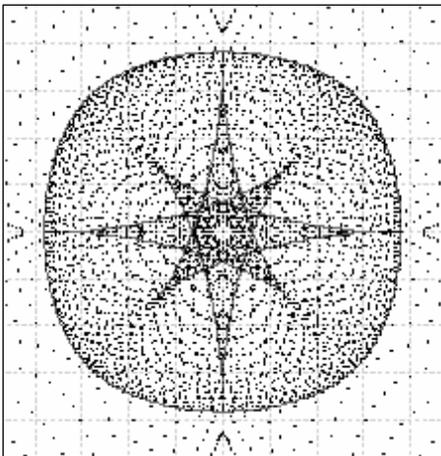


Рис. 5. Лучевая и каустическая структуры унимодальной катастрофы X_0

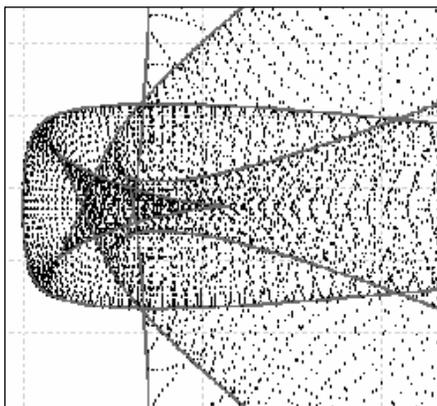


Рис. 6. Лучевая и каустическая структуры унимодальной катастрофы J_{10}

4. Численные результаты. Поля: распространение и фокусировка

Рисунки 7–9 иллюстрируют применение теории катастроф к описанию распространения волн в ионосферной плазме. Источником излучения является магнитный диполь. На рис. 7 показана общая лучевая структура и выделена область, в которой формируется катастрофа типа «бабочка» (A_3). Этот фрагмент более подробно показан на рис. 8. Вертикальной линией выделен разрез, в котором построена амплитуда поля на рис. 9 [14].

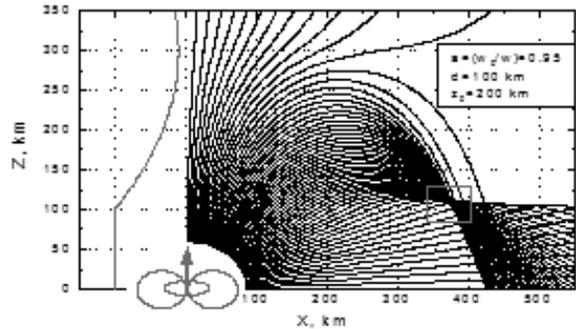


Рис. 7. Общая лучевая структура в ионосферной плазме

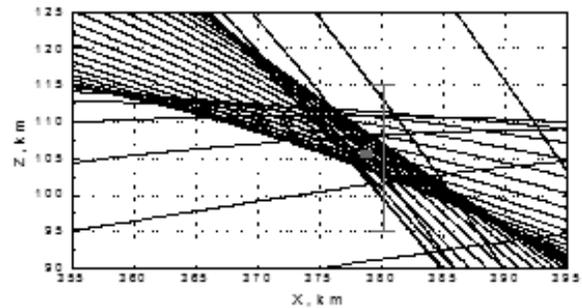


Рис. 8. Фрагмент рис. 7 с каустической структурой

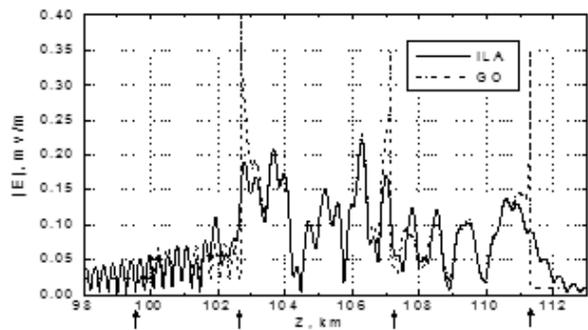


Рис. 9. Амплитуда поля, построенная методами волновой теории катастроф. Лучевое приближение показано пунктиром

На рис. 10–13 представлены линии равного уровня волнового поля в фокальной области. На рис. 10 показана амплитуда поля в окрестности клюва (каустического острия) (A_3), а на рис. 11 показана фазовая структура СВК этой особенности. На рис. 12 и 13 приведены амплитудные структуры поля, соответствующие гиперболической омбилике (D_4^-). На рис. 12 разрез проходит через центр фокусировки, и на рис. 13 – вдали от особенности.

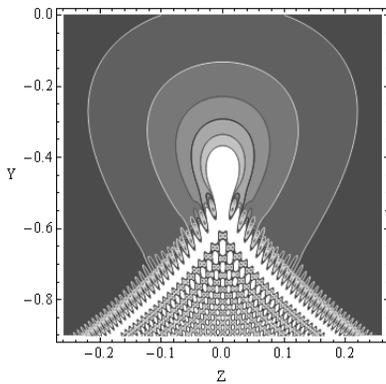


Рис. 10. Изолинии амплитуды поля, соответствующие катастрофе A_3

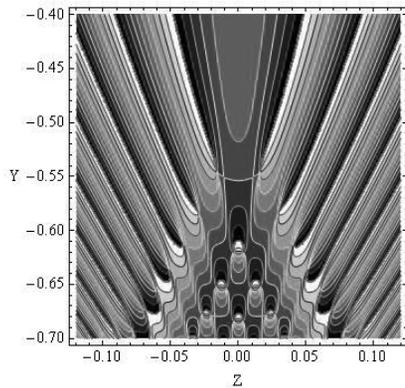


Рис. 11. Контурные линии фазы СВК (3), соответствующие катастрофе A_3

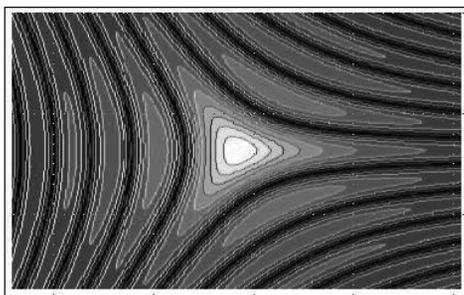


Рис. 12. Изолинии амплитуды, соответствующие катастрофе (D_4^-), центральное сечение

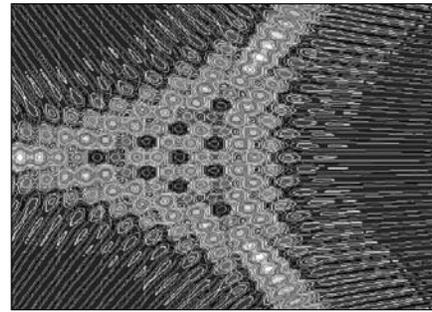


Рис. 13. Изолинии амплитуды, соответствующие катастрофе (D_4^-), нецентральное сечение

5. Численные результаты. Поля: дифракция

На рис. 14–17 показаны линии равного уровня амплитуд волновых полей в случае сочетания процессов фокусировки излучения и дифракции на препятствии. Рисунок 14 описывает совместную фокусировку первичного и вторичного краевых лучей типа A_3 . На рис. 15 и 16 показана фокусировка краевых лучей типа A_2 , которая возникает или на фоне сильного первичного поля (рис. 15), или в области тени (рис. 16).

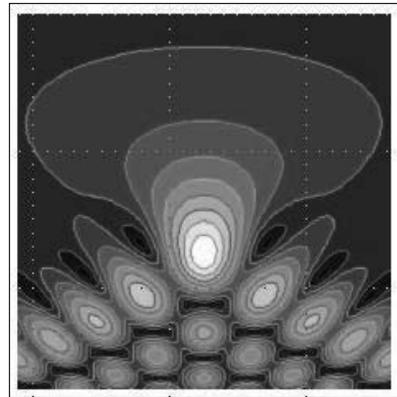


Рис. 14. Изолинии амплитуды, соответствующие краевой катастрофе $K_{4,2}$

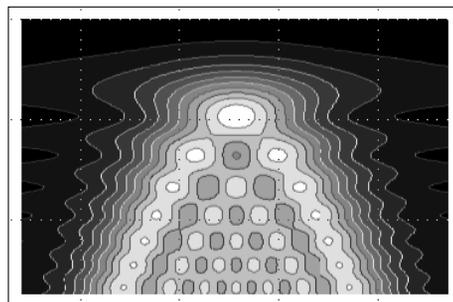


Рис. 15. Изолинии амплитуды поля, соответствующие краевой катастрофе C_3^+

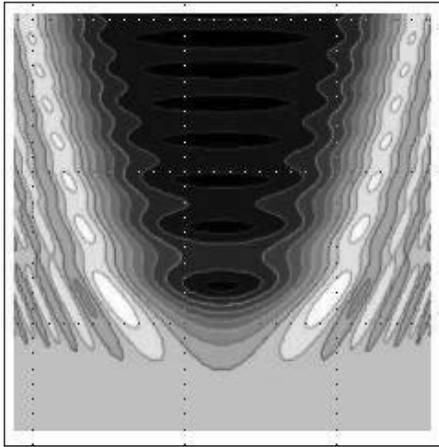


Рис. 16. Изолинии амплитуды поля, соответствующие краевой катастрофе C_3^-

На рис. 17 показана амплитудная структура, возникающая при дифракции волны на угловом вырезе и соответствующая угловой катастрофе A_1^4 .

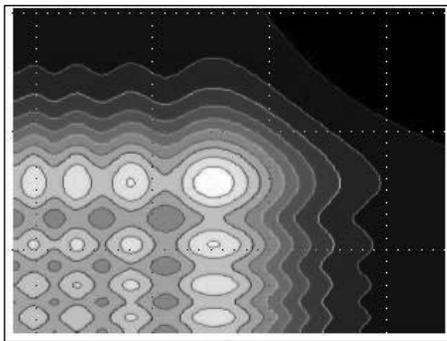


Рис. 17. Изолинии амплитуды поля, соответствующие угловой катастрофе A_1^4

6. Заключение

Помимо стационарных задач о распространении, дифракции и фокусировке излучения, методы теории катастроф волны нашли широкое применение при решении задач на распространение радио- и видеоимпульсов в диспергирующих средах [15–21]. Необходимо отметить, что для определения положения центров фокусировок (топологических центров катастроф) найдены дифференциальные необходимые и достаточные условия, содержащие уравнения, включающие различные производные фазовой функции по внутренним параметрам [9; 13; 22]. Исследованы устойчивые фокусировки, возникающие при нарушении симметрии волнового фронта [23]. Выполнены численные сопоставления результатов моделирования, проведенные как методом

волновой теории катастроф, так и другими асимптотическими методами [24; 25].

Результаты, полученные нами, обобщены в Информационной системе “wavecatt.rosnou.ru” [6].

Литература

1. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. – М.: МФТИ, 1982. – 159 с.
2. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57. – № 9. – С. 1028–1034.
3. Kryukovskii, A.S., Lukin, D.S., Rastyagaev, D.V. Construction of Uniform Asymptotic Solutions of Wave-Type Differential Equations by Methods of Catastrophe Theory // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2009. – Vol. 16. – No. 2. – Pp. 232–245.
4. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Теория катастроф и её приложения к описанию фокусировки, дифракции и распространения волновых полей // Труды МФТИ (ГУ). – 2009. – Т. 1. – № 2. – С. 54–71.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Волновые катастрофы – фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн // Радиотехника и электроника. – 2006. – Т. 51. – № 10. – С. 1155–1192.
6. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т. 12. – № 8. – С. 71–75.
7. Kryukovsky, A.S., Lukin, D.S., Palkin, E.A. Uniform asymptotics for evaluating oscillatory edge integrals by methods of catastrophe theory // Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 1987. – V. 2. – № 4. – P. 219–312.
8. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с вырожденными седловыми точками: препринт / ИРЭ АН СССР. – М., 1984. – № 41 (413). – 75 с.
9. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. – Казань: Каз. авиационный ин-т, 1988. – 199 с.
10. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Построение

равномерной геометрической теории дифракции методами краевых и угловых катастроф // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43. – № 9. – С. 1044–1060.

11. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Теория расчета эталонных фокальных и дифракционных электромагнитных полей на основе специальных функций волновых катастроф // Радиотехника и электроника. – 2003. – Т. 48. – № 8. – С. 912–921.

12. Kryukovsky, A.S., Rogachev, S.V., Lukin, D.S. Special Software for Computing the Special Functions of Wave Catastrophes // Revista de Matematica: Teoria y Aplicaciones. – San Pedro Montes de Oca, San Jose, Costa Rica : Universidad de Costa Rica. – 2015. – V. 22. – No. 1. – Pp. 21–30.

13. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф : монография. – М. : РосНОУ, 2013. – 368 с.

14. Карепов С.Л., Крюковский А.С. Расчет электромагнитного поля в параболическом плазменном слое методом интерполяционной локальной асимптотики // Вопросы дифракции и распространения электромагнитных волн : межвед. сб. – М. : МФТИ, 1999. – С. 74–90.

15. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Вергизаев И.А. Трехмерные пространственно-временные фокусировки волновых полей типа катастроф // Радиотехника и электроника. – 1999. – Т. 44. – № 4. – С. 455–462.

16. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т. 12. – № 8. – С. 15–25.

17. Kryukovskii, A.S., Lukin, D.S., Rastyagaev, D.V., Skvortsova (Bova), Yu.I. Mathematical Simulation of Propagation of Frequency-Modulated Radio Waves in Ionospheric Plasma // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2015. – Vol. 60. – No. 10. – P. 1049–1057. DOI: 10.7868/S0033849415100071.

18. Крюковский А.С., Зайчиков И.В. Особенности распространения радиоимпульсов в средах с дисперсией // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2008. – Т. 13. – № 8. – С. 36–41.

19. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2013. – Т. 18. – № 8. – С. 18–23.

20. Аллин И.В., Крюковский А.С. Особенности распространения видеоимпульсов в плазме в окрестности светового конуса // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т. 12. – № 8. – С. 26–40.

21. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Классификация пространственно-временных краевых катастроф и равномерные асимптотические решения волновых уравнений, описывающих распространение волн в ионосферной плазме // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2016. – Выпуск 4. – С. 5–12.

22. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспидных катастроф // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах : сборник. – М. : МФТИ, 1989. – С. 56–60.

23. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта // Дифракция и распространение электромагнитных волн : сборник. – М. : МФТИ, 1993. – С. 20–37.

24. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численное сравнение двух асимптотических методов решения задач дифракции волн в плавнонеоднородных средах // Изв. МВ и ССО СССР (Радиофизика). – 1986. – Т. 29. – № 1. – С. 79–88.

25. Андреева Е.С., Крюковский А.С., Куницын В.Е., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Кирьянова К.С. Моделирование лучевой и каустической структуры электромагнитных полей по данным радиотомографии ионосферы в окрестности экваториальной аномалии // Распространение радиоволн : сборник докладов XXIII Всероссийской научной конференции (23–26 мая, 2011; Йошкар-Ола). – Йошкар-Ола : Марийский государственный технический университет, 2011. – Т. 3. – С. 288–291.