СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ: МОДЕЛИ, АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI: 10.25586/RNU.V9187.18.06.P.05 УДК 537.87; 621.371; 517.958

А.С. Крюковский

ЛОКАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ КАТАСТРОФЫ A_3[1]

Развит метод построения локальных асимптотик, описывающих фокусировки электромагнитных полей каспоидного типа, позволяющий получать коэффициенты универсальной деформации и фазу бегущей волны в виде отрезков степенных рядов. Построены первое (*линейное*) *и второе* (*квадратичное*) *приближения для волновой катастрофы типа «каустическое остриё»* (*«клюв»*).

Ключевые слова**:** *локальные асимптотики, катастрофы, фокусировки, каустическое остриё, универсальная деформация.*

A.S. Kryukovsky

LOCAL DETERMINATION OF THE UNFOLDING COEFFICIENTS OF THE CATASTROPHE A_3

Here is developed a method for constructing local asymptotics describing the focusing of cuspoid-type electromagnetic fields, which makes it possible to obtain the coefficients of unfolding and the phase of a traveling wave in the form of segments of power series. The first (*linear*) *and second* (*quadratic*) *approximation for a caustic-type wave catastrophe* (“*cusp*”) *are constructed.*

Keywords**:** *local asymptotics, catastrophes, focusing, cusp, unfolding.*

Определению структуры волнового поля в фокальных областях методами волновой теории катастроф посвящено в настоящее время значительное число исследований [1–3]. Для того чтобы успешно применять теорию катастроф к различным областям физики [4–5], необходимо уметь связывать физические параметры реальной задачи с параметрами эталонных структур, соответствующих катастрофам того или иного типа, то есть находить «параметры подобия». Важнейшей топологической особенностью является катастрофа $\mathbf{A_3}$, устойчивая не только в трехмерном пространстве, но и на плоскости.

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 18-02-00544-а, № 17-02-01183-а).

В настоящей работе рассмотрены первое и второе приближения для коэффициентов универсальной деформации катастрофы $\Sigma = \mathbf{A_3}$ – каустическое остриё («клюв»). Выражение для универсальной деформации этой особенности имеет вид:

$$F_\Sigma = j\left(\xi^4 + X\xi^4 + Y\xi\right), \tag{1}$$

где $j = \pm1$, а X и Y – коэффициенты универсальной деформации.

Рассмотрим фазовую функцию $\Phi(\eta,\alpha,\beta)$ в окрестности особой точки с координатами (α_o,β_o), в которой универсальная деформация имеет вид $F_\Sigma = j\xi^4$. Справедливо тождество (см., например, [1; 2]):

$$\Lambda\Phi = F_\Sigma + j\theta\,, \tag{2}$$

в котором Λ – большой параметр задачи (Λ>>1 как аргумент не рассматривается), а $\theta(\alpha,\beta)$ – фаза бегущей волны. Для упрощения вычислений введем функцию $\mu = j\Lambda\Phi$. Тогда основное тождество приобретает вид:

$$\mu(\eta(\alpha,\beta),\alpha,\beta) - \xi^4 - X(\alpha,\beta)\xi^4 - Y(\alpha,\beta)\xi - \theta(\alpha,\beta) = 0. \tag{3}$$

Для определения коэффициентов $X(\alpha,\beta)$, $Y(\alpha,\beta)$ и фазы бегущей волны $\theta(\alpha,\beta)$ нами был разработан метод локальной асимптотики [2; 6; 7]. Следует отметить, что первое линейное приближение было ранее рассмотрено нами в работах [7–9] для случая, когда фазовая функция Ф зависит только от одного внутреннего параметра. Для случая, когда фазовая функция Ф зависит от двух внутренних параметров, линейное приближение было рассмотрено в работах [10–12]. Второе приближение к фазе бегущей волны рассматривалось в работах [13; 14]. В работе [14] было показано, что учёт только второго приближения для фазы $\theta(\alpha,\beta)$ недостаточно. Целесообразно также учитывать поправки второго порядка и для коэффициентов $X(\alpha,\beta)$, $Y(\alpha,\beta)$. В данной работе рассмотрено как первое, так и второе приближение.

Найдем методом локальной асимптотики выражения для коэффициентов $X(\alpha,\beta)$, $Y(\alpha,\beta)$ и фазы $\theta(\alpha,\beta)$.

Введем обозначения:

$$\mu_k = \left.\frac{\partial^k\mu}{\partial\eta^k}\right|_{(\alpha_o,\beta_o)}, \quad d_k = \left.\frac{\partial^k\eta}{\partial\xi^k}\right|_{(\alpha_o,\beta_o)}, \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

В первую очередь отметим, что (см. [6; 7]) в особой точке

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0,\ \mu_4 \neq 0\,. \tag{5}$$

Учитывая (4), нетрудно установить, что для того, чтобы получить d_1, необходимо продифференцировать тождество (3) в особой точке четыре раза по ξ, для определения d_2 – пять раз и так далее.

Выполняя вычисления, находим (см. также [2; 6]):

$$d \equiv d_1 = \sqrt[4]{\frac{24}{\mu_4}}\,, \quad d_2 = -\frac{1}{10}\frac{\mu_5}{\mu_4}d^2\,,\ d_3 = \left(\frac{21}{400}\frac{\mu_5^2}{\mu_4^2} - \frac{1}{20}\frac{\mu_6}{\mu_4}\right)d^3,$$

$$d_4 = \left(\frac{2}{25}\frac{\mu_5\mu_6}{\mu_4^2} - \frac{6}{125}\frac{\mu_5^3}{\mu_4^3} - \frac{1}{35}\frac{\mu_7}{\mu_4}\right)d^4,$$

$$d_5 = \left(\frac{9}{140}\frac{\mu_5\mu_7}{\mu_4^2} + \frac{3}{80}\frac{\mu_6^2}{\mu_4^2} - \frac{117}{800}\frac{\mu_5^2\mu_6}{\mu_4^3} + \frac{1989}{32000}\frac{\mu_5^4}{\mu_4^4} - \frac{1}{56}\frac{\mu_8}{\mu_4}\right)d^5. \tag{6}$$

Таким образом, в формировании второго (квадратичного) приближения участвуют восемь производных исходной функции по внутреннему параметру. Для линейного приближения необходимо пять производных, хотя универсальная деформация имеет четвертый порядок.

Пусть $\mu_4 > 0$. Тогда из (6) находим, что $j = \operatorname{sign} \Phi_4$. Будем искать приближенные выражения для $X(\alpha,\beta)$, $Y(\alpha,\beta)$ и $\theta(\alpha,\beta)$ в виде:

$$Y(\alpha,\beta) \cong Y_\alpha \Delta\alpha + Y_\beta \Delta\beta + \frac{1}{2}\left(Y_{\alpha\alpha}(\Delta\alpha)^2 + 2Y_{\alpha\beta}(\Delta\alpha\,\Delta\beta) + Y_{\beta\beta}(\Delta\beta)^2\right),$$

$$X(\alpha,\beta) \cong X_\alpha \Delta\alpha + X_\beta \Delta\beta + \frac{1}{2}\left(X_{\alpha\alpha}(\Delta\alpha)^2 + 2X_{\alpha\beta}(\Delta\alpha\,\Delta\beta) + X_{\beta\beta}(\Delta\beta)^2\right),$$

$$\theta(\alpha,\beta) \cong \theta(\alpha_o,\beta_o) + \theta_\alpha \Delta\alpha + \theta_\beta \Delta\beta + \frac{1}{2}\left(\theta_{\alpha\alpha}(\Delta\alpha)^2 + 2\theta_{\alpha\beta}(\Delta\alpha\,\Delta\beta) + \theta_{\beta\beta}(\Delta\beta)^2\right). \tag{7}$$

В формулах (7) индексами α и β обозначены соответствующие производные коэффициентов и фазы бегущей волны в особой точке. Ниже эти обозначения сохранятся и для производных других функций.

Определим коэффициенты, входящие в (7). Для того чтобы найти Y_α или Y_β, необходимо продифференцировать тождество (3) один раз по ξ, один раз – по α или β и положить:

$$\alpha = \alpha_o,\ \beta = \beta_o,\ \xi = 0. \tag{8}$$

Тогда находим, что:

$$Y_\alpha = \mu_{1\alpha}\, d,\ \ Y_\beta = \mu_{1\beta}\, d. \tag{9}$$

Для определения коэффициентов $Y_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\alpha}$, $Y_{\beta\beta}$, необходимо продифференцировать тождество (3) один раз по ξ, один раз по α, один раз по β или два раза по α или β соответственно, а потом учесть (8):

$$Y_{\alpha\beta} = \mu_{1\alpha} d_\beta + \mu_{1\beta} d_\alpha + \left(\mu_{1\alpha\beta} + \eta_\beta \mu_{2\alpha} + \eta_\alpha \mu_{2\beta}\right) d,$$

$$Y_{\alpha\alpha} = 2\mu_{1\alpha} d_\alpha + \left(\mu_{1\alpha\alpha} + 2\eta_\alpha \mu_{2\alpha}\right) d,$$

$$Y_{\beta\beta} = 2\mu_{1\beta} d_\beta + \left(\mu_{1\beta\beta} + 2\eta_\beta \mu_{2\beta}\right) d. \tag{10}$$

В формуле (10) возникли неизвестные производные d_α, d_β, η_α, η_β. Для определения η_α, η_β продифференцируем тождество (3) три раза по ξ, один раз – по α, или один раз – по β и учтем (8).

Получим:

$$\eta_\alpha = -\frac{\mu_{1\alpha} d_3}{\mu_4 d^3} - \frac{\mu_{2\alpha} d_2}{\mu_4 d^2} - \frac{\mu_{3\alpha}}{\mu_4},\ \ \eta_\beta = -\frac{\mu_{1\beta} d_3}{\mu_4 d^3} - \frac{\mu_{2\beta} d_2}{\mu_4 d^2} - \frac{\mu_{3\beta}}{\mu_4}. \tag{11}$$

Для определения производных d_α, d_β продифференцируем тождество (3) четыре раза по ξ, один раз – по α, или один раз – по β и учтем (8):

$$d_\alpha = -\frac{\mu_{1\alpha} d_4}{4\mu_4 d^3} - \frac{3\mu_{2\alpha} d_2^2}{4\mu_4 d^3} - \frac{\mu_{2\alpha} d_3}{\mu_4 d^2} - \frac{3\mu_{2\alpha} d_2 (\mu_{3\alpha} + \eta_\alpha \mu_4)}{2\mu_4 d} - \frac{\mu_{2\alpha} d (\mu_{4\alpha} + \eta_\alpha \mu_5)}{4\mu_4}. \tag{12}$$

Величина d_β получается из d_α заменой α на β.

Перейдем теперь к вычислению $X(\alpha,\beta)$. Для того чтобы найти X_α или X_β, необходимо продифференцировать тождество (3) два раза по ξ, один раз – по α или β и учесть (8). Получим:

$$X_\alpha = \frac{1}{2}\left(\mu_{1\alpha}\, d_2 + \mu_{2\alpha}\, d^2\right),\ X_\beta = \frac{1}{2}\left(\mu_{1\beta}\, d_2 + \mu_{2\beta}\, d^2\right). \tag{13}$$

Как и в формулах (9), все необходимые величины уже определены. Для определения коэффициентов $X_{\alpha\beta}$, $X_{\alpha\alpha}$, $X_{\beta\beta}$, необходимо продифференцировать тождество (3) два раза по ξ, один раз – по α, один раз – по β или два раза по α или β соответственно, а потом учесть (8). В результате получим:

$$X_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Big(\mu_{1\alpha} d_{2\beta} + \mu_{1\beta} d_{2\alpha} + 2\mu_{2\alpha} d_\beta d + 2\mu_{2\beta} d_\alpha d + \left(\mu_{1\alpha\beta} + \mu_{2\alpha}\eta_\beta + \mu_{2\beta}\eta_\alpha\right) d_2 +$$

$$+\left(\mu_{2\alpha\beta} + \mu_{3\alpha}\eta_\beta + \mu_{3\beta}\eta_\alpha + \mu_4\eta_\alpha\eta_\beta\right) d^2\Big),$$

$$X_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\Big(2\mu_{1\alpha} d_{2\alpha} + 4\mu_{2\alpha} d_\alpha d + \left(\mu_{1\alpha\alpha} + 2\mu_{2\alpha}\eta_\alpha\right) d_2 + \left(\mu_{2\alpha\alpha} + 2\mu_{3\alpha}\eta_\alpha + \mu_4\eta_\alpha^2\right) d^2\Big),$$

$$X_{\beta\beta} = \frac{1}{2}\Big(2\mu_{1\beta} d_{2\beta} + 4\mu_{2\beta} d_\beta d + \left(\mu_{1\beta\beta} + 2\mu_{2\beta}\eta_\beta\right) d_2 + \left(\mu_{2\beta\beta} + 2\mu_{3\beta}\eta_\beta + \mu_4\eta_\beta^2\right) d^2\Big). \quad (14)$$

Неизвестными в формулах (14) являются $d_{2\alpha}$, $d_{2\beta}$. Для их определения продифференцируем тождество (3) пять раз по ξ, один раз – по α, или один раз – по β и, как обычно, учтем (8):

$$d_{2\alpha} = -\frac{1}{10\mu_4 d^3}\Big(\mu_{1\alpha} d_5 + 10\mu_{2\alpha} d_2 d_3 + 5\mu_{2\alpha} d_4 d + 30 d_2 d_\alpha d^2 \mu_4 + 15\left(\mu_{3\alpha} + \eta_\alpha\mu_4\right) d_2^2 d +$$

$$+10\left(\mu_{3\alpha} + \eta_\alpha\mu_4\right) d_3 d^2 + 5\mu_5 d_\alpha d^4 + 10(\mu_{4\alpha} + \eta_\alpha\mu_5) d_2 d^3 + (\mu_{5\alpha} + \eta_\alpha\mu_6) d^5\Big). \quad (15)$$

Величина $d_{2\beta}$ получается из $d_{2\alpha}$ заменой α на β.

Рассмотрим определение с точностью до членов второго порядка включительно фазы бегущей волны $\theta(\alpha,\beta)$.

Величина $\theta(\alpha_o,\beta_o)$ легко находится из тождества (3):

$$\theta(\alpha_o,\beta_o) = \mu(\eta(0,\alpha_o,\beta_o),\alpha_o,\beta_o), \quad (16)$$

где $\eta(0,\alpha_o,\beta_o) = \eta_0$ – значение внутреннего параметра задачи в особой точке.

Для определения θ_α и θ_β, продифференцируем тождество (3) один раз по α или по β соответственно и учтём (8). Тогда:

$$\theta_\alpha = \mu_\alpha,\ \theta_\beta = \mu_\beta. \quad (17)$$

Для определения коэффициентов $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\alpha}$, $\theta_{\beta\beta}$, необходимо продифференцировать тождество (3) один раз по ξ, один раз – по α, один раз – по β и учесть (8). Получим:

$$\theta_{\alpha\beta} = \mu_{1\alpha}\eta_\beta + \mu_{1\beta}\eta_\alpha + \mu_{\alpha\beta},\ \theta_{\alpha\alpha} = 2\mu_{1\alpha}\eta_\alpha + \mu_{\alpha\alpha},\ \theta_{\beta\beta} = 2\mu_{1\beta}\eta_\beta + \mu_{\beta\beta}. \quad (18)$$

Таким образом, в работе получены формулы, позволяющие рассчитывать параметры универсальной деформации волновой катастрофы типа $\mathbf{A_3}$ (каустическое остриё, или «клюв» – cusp): коэффициенты $X(\alpha,\beta)$, $Y(\alpha,\beta)$ и фазу бегущей волны $\theta(\alpha,\beta)$. Рассмотрены как первое (линейное), так и второе (квадратичное) приближение. В работе мы ограничились случаем двумерного пространства внешних параметров задачи (α,β). Обобщение полученных формул на пространства большей размерности очевидно и не требует дополнительных вычислений.

Литература

1. *Kryukovskii, A.S., Rastyagaev, D.V., Lukin, D.S.* Construction of uniform asymptotic solutions of wave-type differential equations by methods of catastrophe theory // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2009. – V. 16. – № 2. – P. 251–264.

2. *Крюковский А.С.* Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. – М. : РосНОУ, 2013. – 368 с.

3. *Крюковский А.С., Растягаев Д.В.* Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта // Распространение и дифракция электромагнитных волн. – М. : МФТИ, 1993. – С. 20–37.

4. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. – М. : Мир, 1980. – 608 с.

5. *Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т. 12. – № 8. – С. 71–74.

6. *Kryukovskii, A.S.* Local uniform asymptotics of wave fields in the vicinity of basic and boundary cuspoidal caustics // Journal of Communications Technology and Electronics. – 1996. – Т. 41. – № 1. – С. 51–57.

7. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического острия в плоско-слоистой среде // Вопросы дифракции электромагнитных волн. – М. : МФТИ, 1982. – С. 40–45.

8. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Определение структуры коротковолнового поля в областях одномерной и двумерной фокусировки в плоскослоистой среде // Труды 6-й конференции молодых ученых / Московский физ.-тех. ин-т. – М., 1981. – С. 218–227 (рукопись деп. В ВИНИТИ, 2 июля 1981, № 3278-81).

9. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое // Радиотехника и электроника. – 1981. – Т. 26. – № 6. – С. 1121–1126.

10. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Локальная асимптотика быстроосциллирующих интегралов, описывающих волновое поле в областях фокусировки // Дифракция и распространение электромагнитных волн. – М. : МФТИ, 1984. – С. 39–53.

11. *Крюковский А.С., Растягаев Д.В.* О необходимых и достаточных условиях образования каспоидных катастроф // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах. – М. : МФТИ, 1989. – С. 56–60.

12. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Локальные асимптотики волновых полей в фокальных областях типа катастроф коранга один и два // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2018. – № 1. – С. 5–17.

13. *Balykina, A.M., Kryukovskii, A.S.* Investigation of the electromagnetic field of caustic-cusp and butterfly edge waves in the shadow region // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2010. – Т. 55. – № 5. – С. 497–504.

14. *Крюковский А.С., Маслянкин В.И., Хусамов Р.К.* Исследование каспоидной фокусировки A_3 методом локальной асимптотики // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2016. – № 4. – С. 20–25.

References

1. *Kryukovskii, A.S., Rastyagaev, D.V., Lukin, D.S.* Construction of uniform asymptotic solutions of wave-type differential equations by methods of catastrophe theory // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2009. – V. 16. – № 2. – P. 251–264.

2. *Kryukovskiy, A.S.* Ravnomernaya asimptoticheskaya teoriya kraevykh i uglovykh volnovykh katastrof. – M. : RosNOU, 2013. – 368 s.

3. *Kryukovskiy, A.S., Rastyagaev, D.V.* Issledovanie ustoychivykh fokusirovok, voznikayushchikh pri narushenii simmetrii volnovogo fronta // Rasprostranenie i difraktsiya elektromagnitnykh voln. – M. : MFTI, 1993. – S. 20–37.

4. *Poston, T., Styuart, I.* Teoriya katastrof i ee prilozheniya. – M. : Mir, 1980. – 608 s.
5. *Dorokhina, T.V., Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* Informatsionnaya sistema “Volnovye katastrofy v radiofizike, akustike i kvantovoy mekhanike” // Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy. – 2007. – T. 12. – № 8. – S. 71–74.
6. *Kryukovskii, A.S.* Local uniform asymptotics of wave fields in the vicinity of basic and boundary cuspoidal caustics // Journal of Communications Technology and Electronics. – 1996. – T. 41. – № 1. – C. 51–57.
7. *Kryukovskiy, A.S., Lukin. D.S.* Lokal’noe asimptoticheskoe opisanie elektromagnitnogo polya v okrestnosti kausticheskogo ostriya v plosko-sloistoy srede // Voprosy difraktsii elektromagnitnykh voln. – M. : MFTI, 1982. – S. 40–45.
8. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* Opredelenie struktury korotkovolnovogo polya v oblastyakh odnomernoy i dvumernoy fokusirovki v ploskosloistoy srede // Trudy 6-y konferentsii molodykh uchenykh / Moskovskiy fiz.-tekh. in-t. – M., 1981. – S. 218–227 (rukopis’ dep. V VINITI, 2 iyulya 1981, № 3278-81).
9. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* K voprosu o pole v okrestnosti kausticheskogo ostriya v ionosfernom plazmennom sloe // Radiotekhnika i elektronika. – 1981. – T. 26. – № 6. – S. 1121–1126.
10. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* Lokal’naya asimptotika bystroostsilliruyushchikh integralov, opisyvayushchikh volnovoe pole v oblastyakh fokusirovki // Difraktsiya i rasprostranenie elektromagnitnykh voln. – M. : MFTI, 1984. – S. 39–53.
11. *Kryukovskiy, A.S., Rastyagaev, D.V.* O neobkhodimykh i dostatochnykh usloviyakh obrazovaniya kaspoidnykh katastrof // Rasprostranenie i difraktsiya voln v neodnorodnykh sredakh. – M. : MFTI, 1989. – S. 56–60.
12. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* Lokal’nye asimptotiki volnovykh poley v fokal’nykh oblastyakh tipa katastrof koranga odin i dva // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya “Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie”. – 2018. – № 1. – S. 5–17.
13. *Balykina, A.M., Kryukovskii, A.S.* Investigation of the electromagnetic field of caustic-cusp and butterfly edge waves in the shadow region // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2010. – T. 55. – № 5. – C. 497–504.
14. *Kryukovskiy, A.S., Maslyankin, V.I., Khusamov, R.K.* Issledovanie kaspoidnoy fokusirovki A_3 metodom lokal’noy asimptotiki // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya “Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie”. – 2016. – № 4. – S. 20–25.