Математическое моделирование

УДК 517.55; 517.988

А.С. Крюковский[1]
Ю.И. Бова[2]

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КРАЕВЫХ КАТАСТРОФ И РАВНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ[3]

Приведены классификация и необходимые и достаточные условия образования краевых катастроф со сложной каустической структурой (как нуль-модальных, так и унимодальных серий) в пространстве-времени при условии распространения электромагнитных волн в плазменной среде с сильной частотной дисперсией. Построены равномерные асимптотические решения волновых уравнений в областях, содержащих специальные функции пространственно-временных волновых катастроф, соответствующих эталонным структурам электромагнитных полей.

Ключевые слова: *краевые катастрофы, поля, волны, частотная модуляция, дисперсия, равномерные асимптотики, плазма, распространение, пространство-время.*

A.S. Kryukovsky
Yu.I. Bova

CLASSIFICATION OF SPACE-TIME EDGE CATASTROPHES AND UNIFORM ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATIONS DESCRIBING WAVE PROPAGATION IN IONOSPHERIC PLASMA

The classification and both necessary and sufficient conditions of formation of edge catastrophes with difficult caustic structures (as zero-modal, and uni-modal series) in space-time under condition of propagation of electromagnetic waves in plasma media with a strong frequency dispersion are given. The uniform asymptotic solutions of the wave equations in regions containing special functions of space-time wave catastrophes, corresponding to reference structures of electromagnetic fields are constructed.

Keywords*: edge catastrophes, field, wave, frequency modulation, dispersion, uniform asymptotics, plasma, propagation, space-time.*

В работе исследовано применение теории краевых катастроф к проблеме описания распространения электромагнитного излучения в холодной плазме в нестационарном случае. Рассмотрим условия образования краевых особенностей при распространении частотно-модулированного радиоимпульса в однородной диспергирующей среде – ионосферной плазме. Как ω_p обозначим плазменную частоту. Поместим ис-

[1] Доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета ИСиКТ АНО ВО «Российский новый университет».

[2] Заместитель декана факультета ИСиКТ АНО ВО «Российский новый университет».

[3] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-02-04206-а).

точник излучения в начало координат. Решение задачи может быть представлено в виде (см., например, [1–4]):

$$u\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z(\omega)\,u_0(\tau)\to$$
$$\to\exp\left[i\omega\left(t-\tau-\frac{r}{c}\left(\varepsilon(\omega)\right)^{1/2}\right)\right]d\omega\,d\tau, \qquad (1)$$

где c – скорость света; $\vec{r}=(x,y,z)$; $r=\left|\vec{r}\right|$;

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (2)$$

– эффективная диэлектрическая проницаемость среды (холодной плазмы);

$$u\left(\vec{r},t\right)\Big|_{r=r_0,\,t=\tau}=u_0(\eta)=$$
$$=\frac{1}{r_0}D(\eta)\exp\left\{i\omega\left(\tau+f(\tau)\right)\right\};$$
$$r_0\to 0,\ \omega_0>>\omega_p, \qquad (3)$$

а функция $Z(\omega)=\left|Z(\omega)\right|\exp\{is(\omega)\}$ (4)

– комплексная частотная характеристика фильтра приемного устройства. Рассмотрим полубесконечный радиосигнал, для которого

$$D(\tau)=\chi(\tau)A(\tau),\quad \chi(\tau)=\begin{cases}1, & \tau\geq 0\\ 0, & \tau<0\end{cases}, \qquad (5)$$

ω_0 – несущая частота; $f(\tau)$ – гладкая функция, характеризующая частотную модуляцию радиосигнала, а $A(\tau)$ – огибающая радиосигнала.

Значение интеграла определяется вкладами его критических точек, которые соответствуют лучевым семействам различного типа. Критическими точками интеграла (1) являются седловые точки фазовой функции, а также благодаря функции Хевисайда (см. (5)) – седловыми точками её сужения. Фазовая функция, определяющая совместно со своими сужениями лучевые семейства, которые описывают распространение радиосигналов в пространстве-времени, может быть представлена в виде:

$$\Phi\left(\tau,\omega,\vec{r},t\right)=s(\omega)+\omega\left(t-\tau-\frac{r}{\mathrm{c}}\sqrt{\varepsilon(\omega)}\right)+$$
$$+\omega_0\left(\tau+f(\tau)\right). \qquad (6)$$

Семейство пространственно-временных геометрооптических лучей находится как решение системы уравнений:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=\Phi_1=-\omega+\omega_0+\omega_0 f_1(\tau)=0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}=\Phi_2=t-\tau-\frac{r}{\mathrm{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}}+s_1(\omega)=0, \qquad (8)$$

где $f_j=\partial f/\partial\tau_j$, $s_j=\partial s/\partial\omega_j$. Функция $f(\tau)$ с точки зрения теории катастроф ответственна за пространственно-временную каустическую фокусировку геометрооптических лучей, а с физической точки зрения характеризует компрессию и декомпрессию радиосигнала. Приведем вторые производные фазовой функции Φ по τ и ω:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}=\Phi_{11}=\omega_0 f_2(\tau)=0, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau\,\partial\omega}=\Phi_{12}=-1\neq 0, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2}=\Phi_{22}=\frac{r}{\mathrm{c}}\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\left(\varepsilon(\omega)\right)^{-3/2}+s_2(\omega)=0. \qquad (11)$$

Можно показать, что

$$\Phi_{1^k2^n}=0,\ n>1,\ k\geq 1;$$

$$\Phi_{1^n}=\omega_0 f_n(\tau),\ n\geq 2. \qquad (12)$$

В формулах (12) индексами обозначены соответствующие производные по τ (1) и по ω (2).

Из равенства (10) следует, что максимальный коранг матрицы Гесса вторых производных фазовой функции Φ равен 1. Поэтому здесь возможны лишь одномерные каспоидные $\left(\sum=\mathrm{A}_N\right)$ фокусировки пространственно-временных геометрооптических лучей [3]. Если функция $f(\tau)$ зависит от τ линейно, а $s=0$, фокусировки пространственно-временных геометрооптических лучей не возникает. Когда

$$f(\tau)=\frac{1}{2}a\tau^2,\ s=0, \qquad (13)$$

положение каустики в пространстве-времени (r_c, t_c) как функции параметра τ определяются равенствами:

$$r_c=(\varepsilon_c)^{3/2}\frac{c\,\omega_c^3}{a\,\omega_0\omega_p^2};\ t_c=\tau+\frac{r_c}{\mathrm{c}\sqrt{\varepsilon_c}};$$

$$\varepsilon_c=\varepsilon(\omega_c);\ \omega_c=\omega_0(1+a\tau). \qquad (14)$$

Ранее в различных работах (см., например, в [5–9]) уже рассматривалась гладкая (без края) каустика пространственно-временных геометрооптических лучей.

На рис. 1 показаны каустика с краем (толстая линия), которая соответствует катастрофе B_3, и пространственно-временные геометрооптические лучи (тонкие линии). Пространственно-временные краевые лучи на рис. 1 не показаны.

В расчетах предполагалось, что круговая частота $\omega_0=2\pi f_0$, рабочая частота f_0 = 13,5 МГц, круговая плазменная частота $\omega_\text{р}=2\pi f_\text{р}$, рабочая плазменная частота $f_\text{р}\approx$ 12,7 МГц.

При рассмотрении пространственно-временной фокусировки помимо вклада геометрооптических лучей существенную роль играет вклад

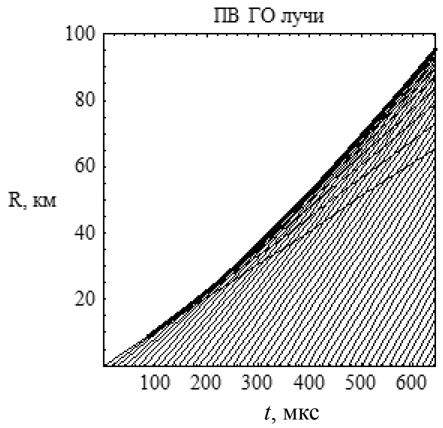

Рис. 1. Каустика с краем и пространственно-временные геометрооптические лучи $a = 1500\ c^{-1}$

пространственно-временных краевых лучей (см., например, [6; 8; 10]), порождаемых в данном случае начальной точкой полубесконечного радиоимпульса. Игнорировать вклад краевых лучей возможно, либо когда $D(\tau)$ плавная гладкая функция и краевые лучи отсутствуют, либо, с некоторой степенью точности, вдали от границы «свет-тень» пространственно-временных геометрооптических лучей, поскольку вклад краевых лучей обычно существенно меньше вклада геометрооптических лучей. Равномерный учет вклада краевых лучей был рассмотрен, например, в работах [11; 12]. Семейство краевых лучей может быть найдено из сужения функции Ф на начало радиоимпульса, то есть на границу $\tau = 0$:

$$\frac{\partial \Phi\big|_{\tau=0}}{\partial \omega} = t - \frac{r}{c\sqrt{\varepsilon}} + s_1 = 0\,. \qquad (15)$$

Нетрудно заметить, что при $s_2(\omega) = 0$ краевые лучи не фокусируются (поскольку $\sum_E = \mathrm{A}_1$). С точки зрения волновой теории катастроф, особенности, возникающие в окрестности границы «свет-тень», принадлежат серии $\mathrm{B}_{N+1} = (\mathrm{A}_N, \mathrm{A}_1)$. Поэтому равномерная асимптотика выражается по формуле (см. [4; 13]):

$$u(\vec{r},t) = \qquad (16)$$

$$= \mathrm{e}^{i\theta}\left\{ (l_1)_g\, \mathrm{I}^{\mathrm{B}_{N+1}}(\vec{\lambda}) + \sum_{k=2}^{N} (l_k)_g \left(\frac{\partial\, \mathrm{I}^{\mathrm{B}_{N+1}}}{\partial \lambda_{k-1}} \right) + (l_1)_E \right\},$$

в которой $(l_j)_g$ и $(l_j)_E$ – геометрооптические и краевые коэффициенты асимптотического разложения, θ – фаза бегущей волны, λ_j – коэффициенты универсальной деформации, а

$$\mathrm{I}^{\mathrm{B}_{N+1}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp\left\{ i\left(\zeta^{N+1} + \lambda_N \zeta^N + \ldots + \lambda_1 \zeta \right) \right\} d\zeta \qquad (17)$$

– специальная функция (СВК) краевой волновой катастрофы B_{N+1} (см. табл. 1).

На рис. 2 и 3 показаны трехмерная амплитудная структура СКВ (17) и линии равного уровня, соответственно, а на рис. 4 – фазовая структура.

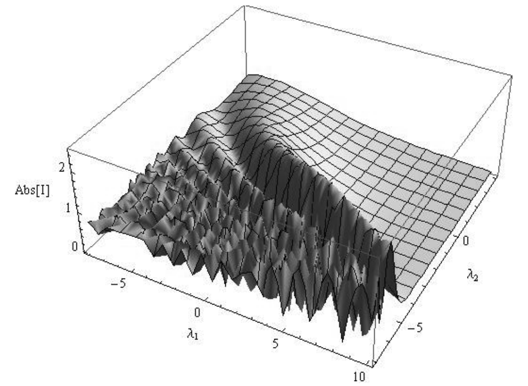

Рис. 2. Амплитуда СВК особенности B_3 в формате 3D

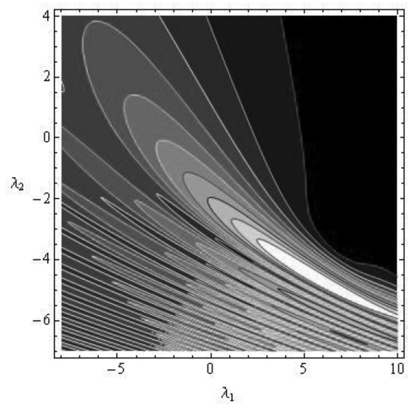

Рис. 3. Амплитуда СВК особенности B_3, линии равного уровня

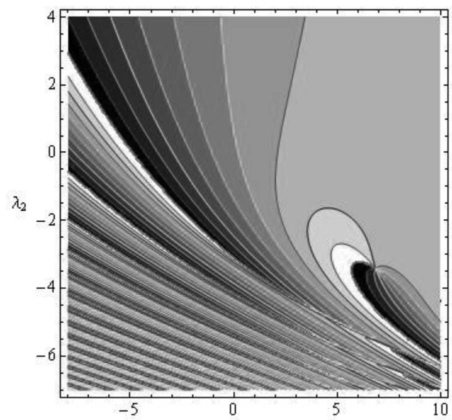

Рис. 4. Фаза СВК особенности B_3, линии равного уровня

Если, наоборот, частотная модуляция отсутствует $(f(\tau) = 0)$, а фазовая характеристика фильтра $s(\omega)$ не равна нулю, то может возникнуть фокусировка краевых лучей каспоидной серии. Так как пространственно-временные геометрооптические лучи не фокусируются, образуется краевая особенность $C_{N+1} = (A_1, A_N)$ (см. табл. 1). Если $s(\omega) = \frac{1}{2} a(\omega - \omega_0)^2$, уравнение каустики в параметрической форме (параметр ω) имеет вид [3]:

$$r = -c\,a\frac{\omega^3}{\omega_p^2}(\varepsilon)^{3/2},\ \omega_p < \omega < +\infty,$$

$$\omega_p < \omega_0;\ t = -a\left(\omega - \omega_0 + \varepsilon\frac{\omega^3}{\omega_p^2}\right),\ a < 0.$$

На рис. 5 показаны пространственно-временные краевые лучи в отсутствие влияния фильтра приемного устройства. Лучи выходят из точки, соответствующей началу радиоимпульса, и не образуют каустики. На рис. 6 показаны краевые лучи и их огибающая (каустика), когда фазовая характеристика фильтра не равна нулю. Пространственно-временные геометрооптические лучи на этих рисунках не показаны. Такой тип особенности является результатом взаимодействия сигнала с фильтром.

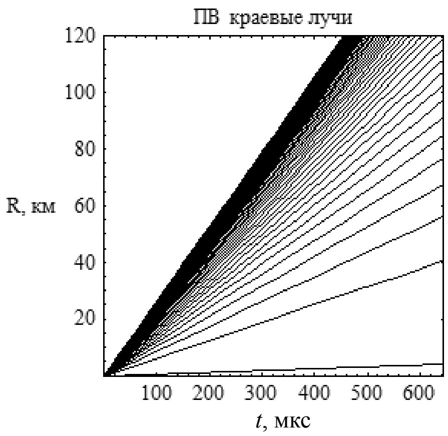

Рис. 5. Пространственно-временные краевые лучи, $a = 0$

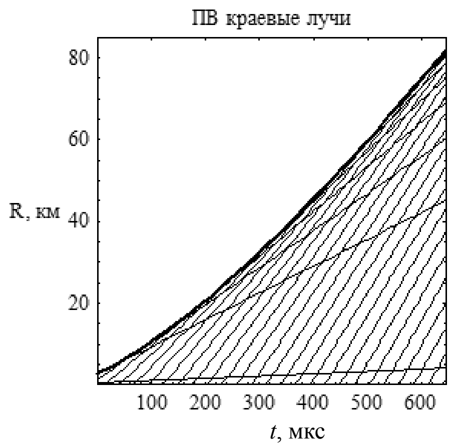

Рис. 6. Пространственно-временные краевые лучи, $a = -1{,}4\ 10^{-11}\ c^2$

Равномерная асимптотика для этого случая имеет вид: [11] (см. также [3; 13]):

$$u(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{i\theta}\left\{(l_1)_g\, \mathrm{I}^{C_{N+1}}(\lambda_1 \ldots \lambda_N) + (l_1)_E \rightarrow\right.$$

$$\left.\rightarrow \mathrm{I}^{A_N}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}) + \sum_{k=1}^{N-1}(l_k)_E \frac{\partial\, \mathrm{I}^{A_N}}{\partial \lambda_k}\right\}, \tag{18}$$

где $\mathrm{I}^{C_{N+1}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \int\limits_0^{+\infty} d\zeta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ i\left(\zeta\xi + \xi^{N+1} + \rightarrow\right.\right.$

$$\left.\left.\rightarrow + \lambda_N\zeta + \lambda_{N-1}\xi^{N-1} + \ldots + \lambda_1\xi\right)\right\} d\xi \tag{19}$$

– СВК краевой волновой катастрофы C_{N+1}, а

$$\mathrm{I}^{A_{N+1}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ i\left(\xi^{N+1} + \lambda_{N-1}\xi^{N-1} + \ldots + \lambda_1\xi\right)\right\} d\xi \tag{20}$$

– специальная функция сужения, то есть СВК основной волновой катастрофы A_{N+1}.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда одновременно и $s(\omega) \neq 0$, и $f(\tau) \neq 0$, когда могут возникнуть каустики и их особенности пространственно-временных геометрооптических лучей и краевых лучей. Положение каустики пространственно-временных геометрооптических лучей в пространстве $R^3 \times T$ определяется системой из трех уравнений с двумя параметрами τ и ω: уравнений (7) (8) и уравнения

$$\omega_o f_2(\tau)\left(s_2(\omega) + \frac{r}{\mathrm{c}}\frac{\omega_p^2}{\omega^3}(\varepsilon(\omega))^{-3/2}\right) = 1, \tag{21}$$

а каустика пространственно-временных краевых лучей – системой из двух уравнений с параметром ω:

$$s_2(\omega) + \frac{r}{\mathrm{c}}\frac{\omega_p^2}{\omega^3}(\varepsilon(\omega))^{-3/2} = 0;$$

$$t = \tau + \frac{r}{\mathrm{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}} - s_1(\omega). \tag{22}$$

Анализируя формулы (7–8), (21–22), легко установить, что каустики краевых лучей не пересекаются с каустикой геометрооптических лучей. Поэтому особые центральные сечения (то есть сечения, проходящие через центральную особую точку) краевых катастроф (кроме катастроф B_{N+1} и C_{N+1}) в данной задаче не формируются. Однако образуются сечения каустических структур катастроф типа $\sum = \left(A_{N_g}, A_{N_E}\right)$ с такими N_g и N_E, которые допустимы в соответствии с классификацией краевых катастроф (см. табл. 1 и 2, а также [13; 14]). В табл. 1 представлены особые ростки простых и некоторых унимодальных краевых катастроф, а в табл. 2 – возмущения. Кроме того, в табл. 1–2 введены обозначения: $N = N_g + N_E$ – кратность особенности, L – коразмерность особенности, M – модальность катастрофы, a – функциональный модуль.

Таблица 1

№	$\sum$	$\sum_g$	$\sum_E$	Особый росток φ_O^{Σ}	N	L	M	$\overline{\text{æ}}$
1.	B_2	A_1	A_1	$\pm\zeta^2$	2	2	0	1
2.	C_2			$\xi\zeta \pm \xi^2$				2
3.	B_{N+1}	A_N	A_1	$\pm\zeta^{N+1}$	$N+1$	N	0	1
4.	C_{N+1}	A_1	A_N	$\xi\zeta \pm \zeta^{N+1}$	$N+1$	N	0	2
5.	F_4	A_2	A_2	$\pm\zeta^2 \pm \xi^3$	4	3	0	2
6.	$K_{4,2}$	A_3	A_3	$\zeta^2 + a\xi^2\zeta \pm \xi^4$	6	4	1	2
9.	$K_{1,2N-3}^{\#}$	A_{2N}	A_3	$\left(\zeta + \xi^2\right)^2 + a\xi\zeta^N$; $N \geq 2$	$2N+3$	$2N+1$	1	2
10.	$K_{1,2N-4}^{\#}$	A_{2N-1}	A_3	$\left(\zeta + \xi^2\right)^2 + a\zeta^N$; $N \geq 3$	$2N+2$	2N	1	2
11.	$K_{N,2}$	A_3	A_{N-1}	$a\zeta^2 + \zeta\xi^2 \pm \xi^N$; $N \geq 5$	$N+2$	N	1	2
12.	K_8^{**}	A_4	A_4	$\xi^5 + \zeta^2 + a\zeta\xi^3$	8	6	1	2

Таблица 2

№	$\sum$	Возмущения: $\varphi_1^{\Sigma},...,\varphi_L^{\Sigma}$	Ограничения на функциональный модуль a
1.	B_2	ζ	–
2.	C_2	$\xi(\zeta)$	–
3.	B_{N+1}	$\zeta,...,\zeta^N$	–
4.	C_{N+1}	$\xi,...,\xi^N$ $\left(\xi,...,\xi^{N-1}, \zeta\right)$	–
5.	F_4	ξ, ζ, $\xi\zeta$	–
6.	$K_{4,2}$	ξ, ξ^2, ζ, $\xi\zeta$	$a^2 \neq \pm 4$
9.	$K_{1,2N-3}^{\#}$	$\zeta,...,\zeta^N$, $\xi\zeta^0,...,\xi\zeta^{N-1}$, ξ^2	$a \neq 0$
10.	$K_{1,2N-4}^{\#}$	$\zeta,...,\zeta^{N-1}$, $\xi\zeta^0,...,\xi\zeta^{N-1}$, ξ^2	$a \neq 0$
11.	$K_{N,2}$	$\xi\zeta$, $\xi,...,\xi^{N-2}$, ζ	$a \neq 0$
12.	K_8^{**}	ξ, ξ^2, ξ^3, ζ, $\xi\zeta$, $\zeta\xi^2$	–

Для того чтобы составить универсальную деформацию особенности, необходимо, выбрав катастрофу (строчку в таблице), записать особый росток из табл. 1 и аддитивно добавить к нему возмущения из табл. 2 с коэффициентами λ_i.

Положения центров краевых катастроф можно определить, пользуясь необходимыми и достаточными условиями, приведенными в табл. 3 [4; 13–18].

Таблица 3

Σ	$\Sigma_g,\ \Sigma_E$	$\overline{æ}$	**Необходимые и достаточные условия** Общее условие: $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_3=0$
B_{N+1}	$A_N\ \ A_1$	1	$\Phi_{1^k}=0,\ k=1,\ldots,N;\ \Phi_{1^{N+1}}\neq 0$
C_{N+1}	$A_1\ \ A_N$	2	$\Phi_{2^k}=0,\ k=1,\ldots,N;\ \Phi_{2^{N+1}}\neq 0,\ \Phi_{12}\neq 0$
F_4	$A_2\ \ A_2$	2	$\Phi_{12}=\Phi_{22}=0;\ \Phi_{11}\neq 0;\ \Phi_{222}\neq 0$
$K_{4,2}$	$A_3\ \ A_3$	2	$\Phi_{2222}\neq 0;\ \Phi_{11}\neq 0$ $\Phi_{222}=\Phi_{22}=\Phi_{12}=0;$ $\Phi_{11}\Phi_{2222}\neq 3\,\Phi^2_{122}$
$K_{N,2}$	$A_3\ \ A_{N-1}$	2	$\Phi_{2^k}=0,\ k=1,\ldots,N-1;\ \Phi_{2^N}\neq 0$ $\Phi_{11}\neq 0;\ \Phi_{12}=0;\ \Phi_{122}\neq 0;\ N\geq 5$
$K^{\#}_{1,1}$	$A_4\ \ A_3$	2	$\Phi_{22}=\Phi_{12}=\Phi_{222}=0;\ \Phi_{2222}\neq 0;\ \Phi_{11}\neq 0$ $\Phi_{11}\Phi_{2222}=3\Phi^2_{122};\ \Phi^2_{11}\Phi_{22222}\neq 10\Phi_{11}\Phi_{122}\Phi_{1222}-15\Phi_{112}\left(\Phi_{122}\right)^2$
$K^{\#}_{1,2}$	$A_5\ \ A_3$	2	$\Phi_{22}=\Phi_{12}=\Phi_{222}=0;\ \Phi_{2222}\neq 0;\ \Phi_{11}\neq 0$ $\Phi_{11}\Phi_{2222}=3\Phi^2_{122};\ \Phi^2_{11}\Phi_{22222}=10\Phi_{11}\Phi_{122}\Phi_{1222}-15\Phi_{112}\left(\Phi_{122}\right)^2;$ $\Phi^3_{11}\Phi_{222222}\neq 15\Phi^2_{11}\Phi_{12222}\Phi_{122}+15\Phi_{111}\Phi^3_{122}-$ $-45\Phi_{11}\Phi_{1122}\Phi^2_{122}+10\left[\Phi_{11}\Phi_{1222}-3\Phi_{112}\Phi_{122}\right]^2$
K^{**}_8	$A_4\ \ A_4$	2	$\Phi_{22}=\Phi_{12}=\Phi_{222}=\Phi_{122}=\Phi_{2222}=0;\ \Phi_{22222}\Phi_{11}\neq 0$

В общем случае равномерная асимптотика выражается по формуле (подробнее см. [13, 14]):

$$u\left(\vec r,t\right)=\mathrm{e}^{i\theta}\left\{\left(l_1\right)_g \mathrm{I}^{\Sigma}\left(\vec S\right)+\sum_{k=2}^{N_g}\left(l_k\right)_g\frac{\partial \mathrm{I}^{\Sigma}}{\partial S^g_{k-1}}+\right.$$

$$\left.+\left(l_1\right)_E \mathrm{I}^{\Sigma_E}\left(\vec S^E\right)+\sum_{k=2}^{N_E}\left(l_k\right)_E\frac{\partial \mathrm{I}^{\Sigma_E}}{\partial S^E_{k-1}}\right\}. \qquad (23)$$

Здесь $\mathrm{I}^{\Sigma}\left(\vec S\right)$ – СВК краевой волновой катастрофы $\Sigma=(\Sigma_g,\ \Sigma_E)$, $\vec S=(\vec S^g,\vec S^E)$ – аргументы СВК, включающие коэффициенты (λ_i) и функциональные модули (a), $\mathrm{I}^{\Sigma_E}(\vec S^E)$ – специальная функция сужения катастрофы на границу $\tau=0$, то есть СВК основной волновой катастрофы типа Σ_E, N_g – кратность (число лучей) геометрооптической катастрофы Σ_g, N_E – кратность (число лучей) краевой катастрофы Σ_E.

В частности, если

$$s(\omega)=\frac{1}{2}\,\alpha\left(\omega-\omega_0\right)^2,\ f\left(\tau\right)=\frac{1}{2}b\,\tau^2, \qquad (24)$$

то образуется сечение краевой катастрофы $F_4=(A_2, A_2)$. На рис. 7 и 8 показаны сплошными тонкими линиями пространственно-временные геометрооптические лучи, толстой линией с точкой обрыва – каустика пространственно-временных геометрооптических лучей, штриховыми линиями – пространственно-временные краевые лучи и толстой непрерывной линией – каустика краевых лучей. Предельный геометрооптический луч касается как каустики геометрооптических лучей, так и каустики краевых лучей, но в разных точках:

$$r_{cg}=\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{b\,\omega_0}-\alpha\right);\ r_{cE}=-\frac{\alpha}{\beta};\ \alpha<0,$$

$$r_{cg}>r_{cE};\ \beta=\frac{\omega_p^2}{\omega_0^3}\left(\varepsilon\left(\omega_0\right)\right)^{-3/2}.$$

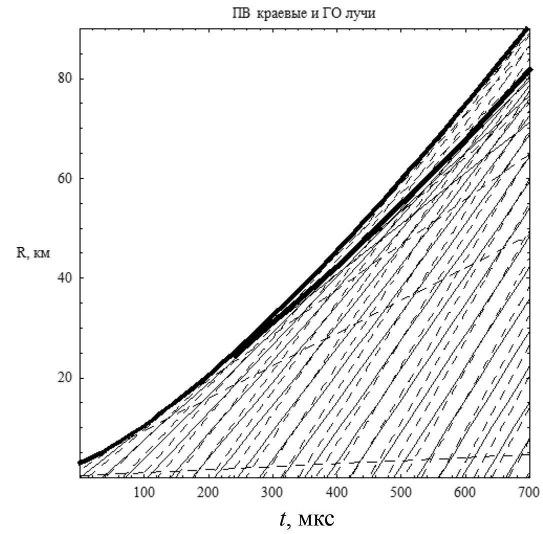

Рис. 7. Лучевая и каустическая структуры, $b = 1500\ c^{-1}$, $\alpha = -1{,}4\ 10^{-11}\ c^2$

На рис. 8, являющемся фрагментом рис. 7, видно, что каустики не пересекаются.

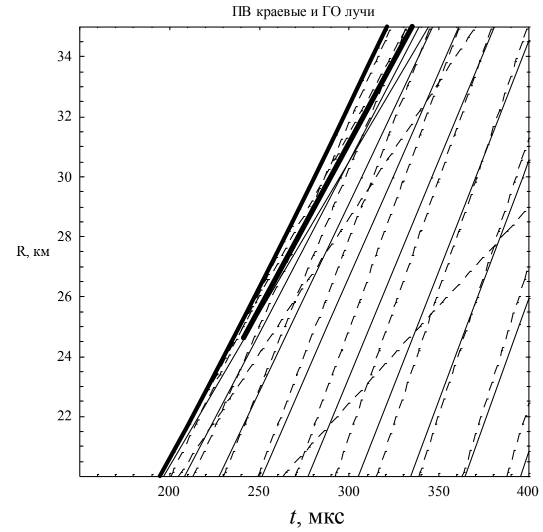

Рис. 8. Лучевая и каустическая структуры, фрагмент рис. 7, $b = 1500\ c^{-1}$, $\alpha = -1{,}4\ 10^{-11}\ c^2$

Равномерная асимптотика радиосигнала в случае особенности F_4 имеет вид:

$$u(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{i\theta} \left\{ (l_1)_g \mathrm{I}^{F_4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) + (l_2)_g \frac{\partial \mathrm{I}^{F_4}}{\partial \lambda_2} + \right.$$

$$\left. + (l_1)_E \mathrm{A}_i^+(\lambda_1) + (l_2)_E \frac{\partial \mathrm{A}_i^+(\lambda_1)}{\partial \lambda_1} \right\}, \tag{25}$$

где $\mathrm{I}^{F_4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \int\limits_0^{+\infty} d\zeta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{ i \big(\pm\zeta^2 + \to$

$$\to + \xi^3 + \lambda_1\xi + \lambda_2\zeta + \lambda_3\zeta\xi \big) \Big\} d\xi \tag{26}$$

– СВК краевой волновой катастрофы F_4,

$$\mathrm{A}_i^\pm(\lambda_1) = \mathrm{I}^{A_2}(\lambda_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ i \left(\pm\xi^3 + \lambda_1\xi \right) \right\} d\xi \tag{27}$$

– функция Эйри (СВК основной волновой катастрофы A_2).

Аналогично могут быть исследованы и более сложные краевые особенности. Например, равномерная асимптотика радиосигнала в случае унимодальной краевой катастрофы $K_{4,2}$ [19] имеет вид:

$$u(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{i\theta} \left\{ (l_1)_g \mathrm{I}^{K_{4,2}}(a;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) + \right.$$

$$+ (l_2)_g \frac{\partial \mathrm{I}^{K_{4,2}}}{\partial \lambda_3} + (l_3)_g \frac{\partial \mathrm{I}^{K_{4,2}}}{\partial \lambda_4} + (l_1)_E \mathrm{I}^{A_3}(\lambda_1,\lambda_2) +$$

$$\left. + (l_2)_E \frac{\partial \mathrm{I}^{A_3}}{\partial \lambda_1} + (l_3)_E \frac{\partial \mathrm{I}^{A_3}}{\partial \lambda_2} \right\}, \tag{28}$$

где $\mathrm{I}^{K_{4,2}}(a;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = \int\limits_0^{+\infty} d\zeta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{ i \big(\zeta^2 +$

$$+ a\xi^2\zeta \pm \xi^3 + \lambda_1\xi + \lambda_2\xi^2 + \lambda_3\zeta + \lambda_4\zeta\xi \big) \Big\} d\xi \tag{29}$$

– СВК краевой волновой катастрофы $K_{4,2}$,

$$\mathrm{I}^{A_3}(\lambda_1,\lambda_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ i \left(\pm\xi^3 + \lambda_1\xi + \lambda_2\xi^2 \right) \right\} d\xi \tag{30}$$

– функция Пирси (СВК основной волновой катастрофы A_3).

Таким образом, в настоящей работе рассмотрен подход, лежащий в основе применения теории краевых волновых катастроф [13; 20–21] к описанию распространения частотно-модулированных радиосигналов в холодной плазме – ионосфере Земли [23]. Приведены лучевые и каустические структуры для простых (нуль-модальных) катастроф B_{N+1}, C_{N+1}, F_4 и равномерные асимптотики как для простых пространственно-временных краевых особенностей, так и унимодальных.

Литература

1. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции : учебное пособие. – М. : МФТИ, 1999. – 134 с.

2. Анютин А.П., Боровиков В.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с особенностями внеэкспоненциального множителя : препринт / ИРЭ АН СССР. – М., 1984. – № 42 (414). – 54 с.

3. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Теория катастроф в проблемах стационарной и нестационарной дифракции //

Труды X школы-семинара по дифракции и распространению волн, 7–15.02.1993. – М. : МФТИ, 1993. – С. 36–111.

4. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2013. – Т. 18. – № 8. – С. 18–23.

5. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – 2-е изд. – М. : Наука, 1967. – 684 с.

6. Кравцов Ю.А., Островский Л.А., Степанов Н.С. Геометрическая оптика неоднородных и нестационарных движущихся сред // ТИИЭР. – 1974. – Т. 62. – № 11. – С. 91–112.

7. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М. : Наука, 1980. – 304 с.

8. Felsen, L.B. Transients in dispersive media, part 1: theory // IEEE Trans. on Ant. and Prop. – 1969. – AP-17. – № 2. – P. 191–200.

9. Lewis, R.M. Asymptotic theory of transients // In: Electromagnetic Wave Theory. Part 2. Ed. by J. Brown. – N.Y. : Pergamon Press, 1967. – P. 845–869.

10. Анютин А.П. Асимптотическая теория распространения радиосигналов в неоднородной плазме // Распространение радиоволн в ионосфере. – М. : ИЗМИР АН СССР, 1978. – С. 29–36.

11. Анютин А.П. Равномерная модификация метода ВГТД в случае произвольной диспергирующей среды и каустик ВГО и ВГТД лучей // Дифракция и распространение волн : междув. сборник. – М. : МФТИ, 1985. – С. 32–36.

12. Чистяков Д.Н., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Трехмерные пространственно-временные фокусировки радиоимпульсов в нестационарных диспергирующих средах // Труды XII Всероссийской школы-конференции по дифракции и распространению волн, Москва, 19–23.12.2001, РосНОУ : тезисы доклада. – М. : МФТИ (ГУ), 2001. – Т. 2. – С. 456–459.

13. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. – М. : РосНОУ, 2013. – 368 с.

14. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. – Казань : Каз. авиационный ин-т, 1988. – 199 с.

15. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования основных волновых катастроф с корангом, равным двум // Распространение и дифракция электромагнитных волн : междувед. сб. – М. : МФТИ, 1993. – С. 4–19.

16. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования краевых катастроф // Проблемы дифракции и распространения волн : межвед. сб. – М. : МФТИ, 1994. – С. 47–54.

17. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта // Дифракция и распространение электромагнитных волн : сб. – М. : МФТИ, 1993. – С. 20–37.

18. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспоидных катастроф // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах : сборник. – М. : МФТИ, 1989. – С. 56–60.

19. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Каустическая структура краевой катастрофы $K_{4,2}$ // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2015. – Выпуск 2(10). – С. 5–9.

20. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые катастрофы и асимптотики // ДАН СССР. – 1986. – Т. 291. – № 4. – С. 823–827.

21. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики и угловые катастрофы // Доклады РАН. – 1995. – Т. 341. – № 4. – С. 456–459.

22. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т. 12. – № 8. – С. 15–25.

23. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере // Вестник Российского нового университета. – 2009. – Выпуск 2. Управление, вычислительная техника и информатика. – С. 7–14.