

# СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ: МОДЕЛИ, АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.87

Ю.И. Бова<sup>1</sup>  
А.С. Крюковский<sup>2</sup>  
Д.С. Лукин<sup>3</sup>

Yu.I. Bova  
A.S. Kryukovsky  
D.S. Lukin

### ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЧАСТОТНО- МОДУЛИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ИОНОСФЕРЕ С УЧЕТОМ ОТКЛОНЯЮЩЕГО ПОГЛОЩЕНИЯ И ВЛИЯНИЯ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ<sup>4</sup>

### INVESTIGATION OF THE PROPAGATION OF FREQUENCY-MODULATED RADIATION IN THE IONOSPHERE TAKING INTO ACCOUNT THE DEFLECTING ABSORPTION AND THE INFLUENCE OF AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

Проведено численное моделирование распространения частотно-модулированных сигналов в анизотропной среде с учетом влияния частоты соударений электронов на отклоняющее поглощение. Изучены проекции лучевых траекторий на разные координатные плоскости. Исследованы влияние расходимости лучевых траекторий и поглощения радиоволн на ослабление амплитуды радиосигнала. Выполнено сравнение результатов вычислений для необыкновенной и обыкновенной волн. Расчеты проведены для дневной и ночной моделей электронной концентрации и частоты соударений высокоширотной ионосферы.

**Ключевые слова:** численное моделирование, распространение сигналов, ионосфера, бихарактеристическая система, лучи, обыкновенная волна, необыкновенная волна, поглощение, расходимость.

A numerical simulation of the propagation of frequency-modulated signals in an anisotropic medium, taking into account the influence of frequency of electron collisions on deflecting absorption is carried out. The projections of ray trajectories onto different coordinate planes are studied. The influence of the ray trajectory divergences and absorption on the attenuation of the amplitude of radio signals is investigated. The comparison of results of calculations for ordinary and extraordinary waves is fulfilled. The calculations are performed for day and night models of the electron concentration and collision frequency of high-latitude ionosphere.

**Keywords:** numerical modeling, propagation of signals, ionosphere, bicharacteristic system, rays, ordinary wave, extraordinary wave, absorption, divergence.

#### Введение

Настоящая работа посвящена моделирова-

<sup>1</sup> Старший преподаватель кафедры информационных технологий и естественно-научных дисциплин АНО ВО «Российский новый университет».

© Бова Ю.И., 2017.

<sup>2</sup> Доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета информационных систем и компьютерных технологий АНО ВО «Российский новый университет».

© Крюковский А.С., 2017.

нию распространения линейно-частотно-модулированного (ЛЧМ) сигнала в ионосферной анизотропной плазме и анализу его ослабления за счет расходимости и отклоняющего поглощения.

<sup>3</sup> Доктор физико-математических наук, профессор, профессор АНО ВО «Российский новый университет».

© Лукин Д.С., 2017.

<sup>4</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 15-02-04206-а, № 17-02-01183-а).

Актуальность данной работы определена широким использованием электромагнитных волн декаметрового диапазона для обеспечения дальней радиосвязи, радионавигации, радиолокации, загоризонтного радиозондирования, для изучения структуры ионосферы – верхней атмосферы Земли. Несмотря на значительный объем исследований в данной области (см., например, [1–7]), распространение частотно-модулированных (ЧМ) сигналов в ионосферной плазме с учетом магнитного поля Земли изучено еще недостаточно.

В работах [8–13] нами рассмотрено распространение частотно-модулированного излучения в ионосферной плазме, когда источник излучения расположен на поверхности Земли. Распространение ЧМ сигналов в случае изотропной ионосферной плазмы в зависимости от высоты источника излучения рассмотрено в работе [12]. В данной работе особое внимание уделено исследованию ослабления радиосигнала за счет отклоняющего поглощения и расходимости на примере моделей электронной концентрации и частоты соударений электронов для высокоширотной ночной и дневной ионосферы.

### 1. Математическая постановка задачи

Хорошо известно [14], что эффективная диэлектрическая проницаемость среды для неоднородной анизотропной ионосферы имеет вид (формула Эпплтона):

$$\varepsilon = 1 - \nu \left( 1 - iZ - \frac{u \sin^2 \alpha}{2(1 - \nu - iZ)} \pm \sqrt{\frac{u^2 \sin^4 \alpha}{4(1 - \nu - iZ)^2} + u \cos^2 \alpha} \right)^{-1} \quad (1)$$

В выражении (1) параметры  $\nu$  и  $u$  являются отношениями квадрата плазменной частоты и квадрата гирочастоты к квадрату рабочей частоты, соответственно, то есть:

$$\nu = \left( \frac{\omega_{\text{пл}}}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2},$$

$$u = \left( \frac{\omega_H}{\omega} \right)^2 = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2}. \quad (2)$$

В формулах (2)  $e = 4,8029 \cdot 10^{-10}$  СГСЭ – заряд электрона,  $m_e = 9,108 \cdot 10^{-28}$  г – масса электрона,  $c = 2,997925 \cdot 10^8$  м/с – скорость света,  $N$  – величина электронной концентрации в фиксированной точке пространства. Величина  $Z$  – это отношение частоты соударений электронов к круговой рабочей частоте

$$Z = \frac{v_e}{\omega}, \quad (3)$$

а величина  $\alpha$  – это угол между волновым вектором и напряженностью магнитного поля Земли

$\vec{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z})$ . Выражение для квадрата косинуса угла  $\alpha$ , необходимое для применения формулы (1), имеет вид:

$$\cos^2 \alpha = \frac{(H_{0x} k_x + H_{0y} k_y + H_{0z} k_z)^2}{H_0^2 |\vec{k}|^2}. \quad (4)$$

В формуле (1) знак плюс соответствует обыкновенной волне, а знак минус – необыкновенной волне.

В приведенных ниже расчетах амплитуда магнитного поля предполагается постоянной, а ориентация напряженности магнитного поля относительно локальной системы координат задается двумя углами  $\gamma$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} H_{0x} &= H_0 \cos \gamma \cos \varphi, \\ H_{0y} &= H_0 \cos \gamma \sin \varphi, \\ H_{0z} &= H_0 \sin \gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Если частотой соударения электронов можно пренебречь и положить  $Z = 0$ , то формула для эффективной диэлектрической проницаемости имеет стандартный вид (см., например, [4; 7; 14; 15]):

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1 - \nu)}{2(1 - \nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1 - \nu)^2 \cos^2 \alpha}}. \quad (6)$$

В основе примененного в данной работе подхода лежат лучевые методы, являющиеся традиционными при описании процессов распространения декаметровых радиоволн в различных средах (см. например [4; 15]). При моделировании лучевых траекторий в анизотропной, неоднородной, среде бихарактеристическая система уравнений с гамильтонианом:

$$\Gamma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(\vec{r}, \vec{k}, \omega) \quad (7)$$

имеет вид [4; 13; 15]:

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad (8)$$

где  $\vec{r} = (x, y, z)$  – координаты точки наблюдения,

$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  – волновой вектор,

$\omega$  – круговая частота излучения,

$t$  – групповое время,

$\tau$  – параметр вдоль лучевой траектории,

$\varepsilon_r(\vec{r}, \vec{k}, \omega)$  – действительная часть эффективной диэлектрической проницаемости среды распространения.

Для применения при численном моделировании системы (7)–(8), необходимо представить диэлектрическую проницаемость (1) в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$\varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i. \quad (9)$$

Анализируя выражение (1), находим, что:

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{v(z_\varepsilon + r_\varepsilon \cos \varphi_\varepsilon)}{(z_\varepsilon + r_\varepsilon \cos \varphi_\varepsilon)^2 + (u_\varepsilon + r_\varepsilon \sin \varphi_\varepsilon)^2}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_i = \frac{v(u_\varepsilon + r_\varepsilon \sin \varphi_\varepsilon)}{(z_\varepsilon + r_\varepsilon \cos \varphi_\varepsilon)^2 + (u_\varepsilon + r_\varepsilon \sin \varphi_\varepsilon)^2}. \quad (11)$$

В формулах (10) и (11) введены обозначения:

$$z_\varepsilon = 1 - \frac{(1-v)u \sin^2 \alpha}{2((1-v)^2 + Z^2)},$$

$$u_\varepsilon = -Z - \frac{Z u \sin^2 \alpha}{2((1-v)^2 + Z^2)}, \quad (12)$$

$$r_\varepsilon = \pm (x_\varepsilon^2 + y_\varepsilon^2)^{1/4}, \quad \varphi_\varepsilon = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{x_\varepsilon}{y_\varepsilon} \right), \quad (13)$$

$$x_\varepsilon = \frac{(1-v)Z u^2 \sin^4 \alpha}{2((1-v)^2 + Z^2)^2},$$

$$y_\varepsilon = u \cos^2 \alpha + \frac{((1-v)^2 - Z^2) u^2 \sin^4 \alpha}{4((1-v)^2 + Z^2)^2}. \quad (14)$$

Если внешнее магнитное поле отсутствует ( $H_0 = 0$ ), то формула для диэлектрической проницаемости имеет вид [14]:

$$\varepsilon = 1 - \frac{v}{1+Z^2} - i \frac{vZ}{1+Z^2}. \quad (15)$$

Предположим, что начальный волновой вектор  $\vec{k}(0)$  параметрически зависит от угла выхода луча  $\alpha_0$  ( $\beta_0 = 0$ ):

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0 \cos \beta_0,$$

$$k_y(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0 \sin \beta_0, \quad (16)$$

$$k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \alpha_0,$$

источник излучения точечный, находится вне магнитоактивной плазмы и расположен в точке с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$\vec{r}|_{r=0} = (0, 0, 0). \quad (17)$$

Величина  $\varepsilon_0$  в выражениях (16) – это значение эффективной диэлектрической проницаемости среды в источнике излучения.

Предположим, что сигнал линейно-частотно-модулированный (ЛЧМ), то есть формула для мгновенной частоты заполнения имеет вид [8; 10]:

$$\omega(0) = \omega_0(1 + \delta \eta), \quad t(0) = \eta, \quad (18)$$

$$f(t) = f_0(1 + \delta t), \quad \delta = \frac{2f_\delta}{f_0 T_u},$$

где  $\eta$  – начальное время выхода луча,

$f_0 = \omega_0/(2\pi)$  – начальная частота (Гц),

$f_\delta$  – девиация частоты (Гц),

$T_u$  – длительность импульса (с).

В данной работе были приняты следующие значения параметров  $f_0 = 2,5$  МГц,  $f_\delta = 3,75$  МГц,  $T_u = 3$  с,  $\delta = 1$  с<sup>-1</sup>. При этом максимальная частота равна приблизительно 10 МГц. Распространение электромагнитной волны изначально осуществляется в плоскости  $(x, z)$ .

Рассмотрим две модели высокоширотной ионосферной плазмы: ночную и дневную. Предполагается, что профили электронной концентрации имеют вид, представленный на рис. 1а, 1б:

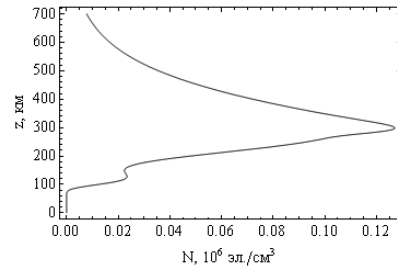


Рис. 1а

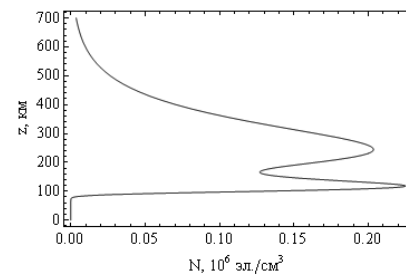


Рис. 1б

Зависимость электронной концентрации от высоты.

Рис. 1а – ночная ионосфера,  
рис. 1б – дневная ионосфера

Профиль электронной концентрации ночной ионосферы достаточно типичен, слой E слабо просматривается, максимум слоя F значительно меньше, чем в случае дневной ионосферы. Напротив, профиль дневной ионосферы нетипичен, поскольку в максимуме слоя E электронная концентрация больше, чем в слое F.

На рис. 2 приведены зависимости электронной частоты соударений от высоты для ночной и дневной ионосферы.

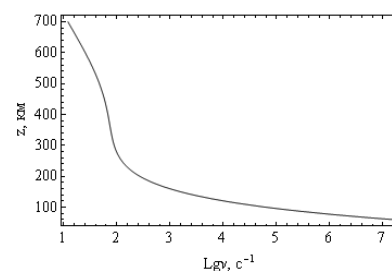


Рис. 2а

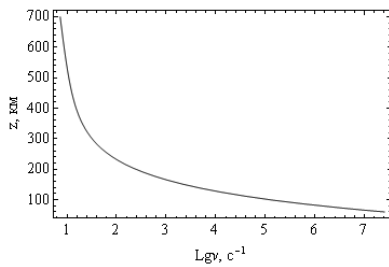


Рис. 2б

Зависимость электронной частоты соударений от высоты.  
Рис. 2а – ночная ионосфера,  
рис. 2б – дневная ионосфера

На небольших высотах эти профили практически совпадают. Существенные отличия начинаются выше 110 км, где роль электронной частоты соударений в поглощении (а тем более в отклонении траектории) невелика.

Представленные на рис. 1 и 2 профили коррелируют с данными, приведенными в [16] (80° с.ш., 30° в.д., март).

**2. Численное моделирование**

При вычислении применялись следующие значения параметров:  $H_0 = 0,551 \text{ Э}$ ,  $\zeta = 0$ ,  $\gamma = -83^\circ$ ,  $\varphi = 45^\circ$ . Рассмотрим последовательно результаты численного моделирования в случае ночной и дневной ионосферы.

**2.1. Ночная ионосфера**

На рисунках 3а и 3б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(x, z)$ , когда источник излучения находится на Земле. Угол выхода лучей  $45^\circ$ . На рисунках в виде фона показана электронная концентрация ионосферы. В районе 115 км по высоте просматривается слой E. На высоте порядка 290 км хорошо виден слой F2. Сначала все лучи идут по общей траектории. В диспергирующей среде (ионосфере) они расходятся. Низкочастотные лучи отражаются от слоев E и F2 и возвращаются на Землю, а высокочастотные просачиваются сквозь слои, причем с увеличением частоты траектории выпрямляются.

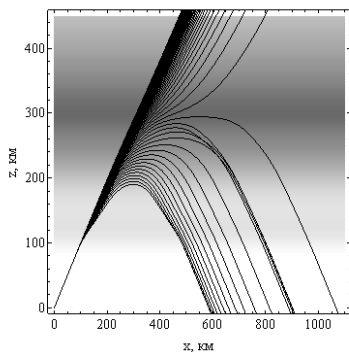


Рис. 3а

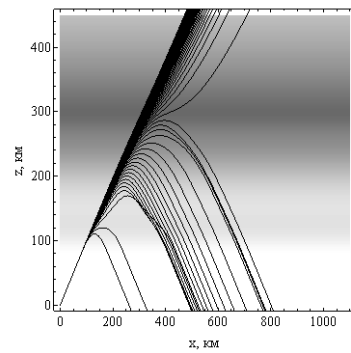


Рис. 3б

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(x, z)$ .  
Рис. 3а – обыкновенная волна,  
рис. 3б – необыкновенная волна.  
Угол выхода  $45^\circ$ . Ночная ионосфера

Лучевые структуры обыкновенной и необыкновенной волн отличаются незначительно, однако для необыкновенной волны просачивание сквозь ионосферу наступает при более высоких частотах, чем для обыкновенной.

На рисунках 4а и 4б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(y, z)$ .

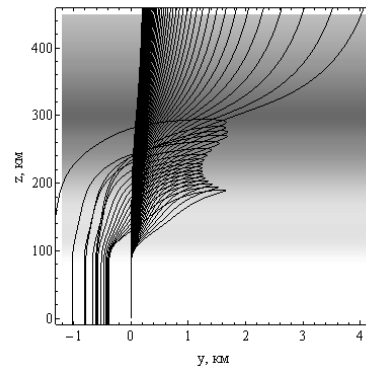


Рис. 4а

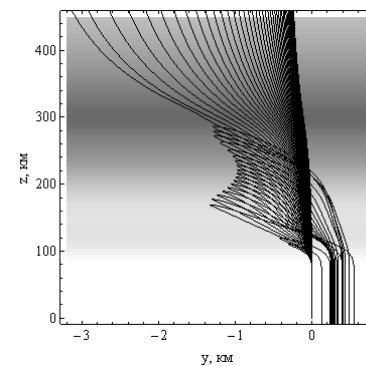


Рис. 4б

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(y, z)$ .  
Рис. 4а – обыкновенная волна,  
рис. 4б – необыкновенная волна.  
Угол выхода  $45^\circ$ . Ночная ионосфера

Лучи, проходящие ионосферный слой F2 выше 400 км, разворачиваются параллельно оси  $z$  и уходят вверх (высокие частоты). Отраженные лучи (низкие частоты) возвращаются на Землю по близким траекториям, так как горизонтальные градиенты (в рамках модели) отсутствуют. Следует отметить, что лучевая структура необыкновенной волны в этой плоскости выглядит компактнее, чем структура обыкновенной волны, и является как бы ее зеркальным отражением относительно вертикальной оси.

На рисунках 5а и 5б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(x, y)$ . Это вид на лучевую структуру сверху.

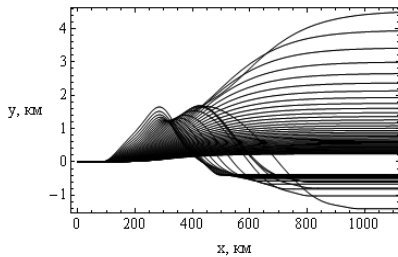


Рис. 5а

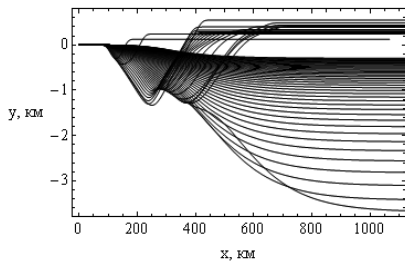


Рис. 5б

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(x, y)$ .

Рис. 5а — обыкновенная волна,  
рис. 5б — необыкновенная волна.  
Угол выхода  $45^\circ$ . Ночная ионосфера

Структура необыкновенной волны в этой плоскости похожа на «зеркальное отражение» от горизонтальной оси структуры обыкновенной волны. В случае необыкновенной волны распространение сигнала вдоль оси  $y$  существенно «компактнее». В этой проекции хорошо видна каустическая структура и ее особенность — катастрофа  $A_3$ . Структура волнового поля в окрестности каустического острия (катастрофы  $A_3$ ) подробно исследовалась в работах [17–20].

Рассмотрим теперь поглощение вдоль траекторий. Для вычисления поглощения, связанного с частотой соударения электронов, справедлива формула:

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = -2\varepsilon_i \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (19)$$

Следует отметить, что при малых значениях отношения эффективной частоты соударения электронов к круговой рабочей частоте ( $Z \ll 1$ ) мнимая часть эффективной диэлектрической проницаемости пропорциональна произведению частоты соударений на квадрат электронной концентрации:  $\varepsilon_i \sim \nu Z \sim N^2 \nu_e$ . С уменьшением высоты ниже слоя E электронная концентрация падает, а частота соударений растет (см. рис. 1, 2), поэтому наибольшее поглощение происходит вблизи нижней границы ионосферы, что и видно на рис. 6 и 7. На рис. 6а и 6б приведены зависимости от высоты поглощения  $\Psi$  (в Неперах) вдоль траекторий.

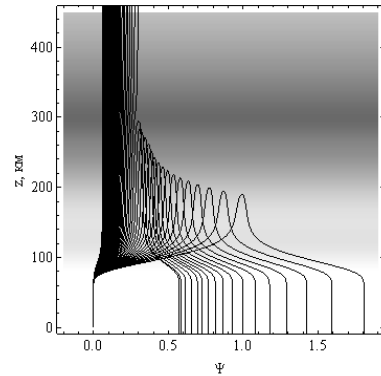


Рис. 6а

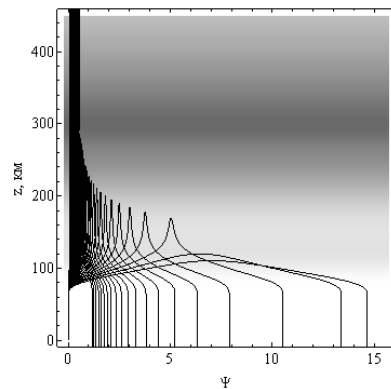


Рис. 6б

Зависимости поглощения  $\Psi$  (в Неперах) вдоль траекторий от высоты.

Рис. 6а — обыкновенная волна,  
рис. 6б — необыкновенная волна.  
Угол выхода  $45^\circ$ . Ночная ионосфера

На рис. 6 можно выделить две группы кривых. Для более высоких частот, проходящих ионосферу, поглощение малое. Более низкие частоты отражаются от слоя. Характерный максимум на кривых — это точка отражения. Эти лучи много времени проводят в нижней ионосфере и испытывают активное поглощение. Естественно с уменьшением частоты поглощение растет,

причем, сопоставляя рис. 6а и 6б, видим, что необыкновенная волна поглощается сильнее обыкновенной.

На рисунках 7а и 7б показано локальное поглощение вдоль лучевых траекторий.

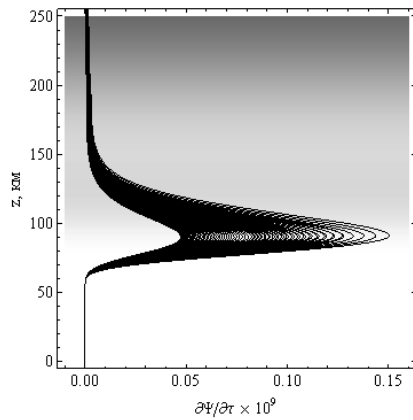


Рис. 7а

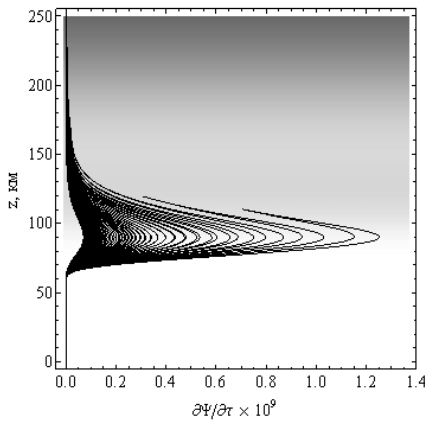


Рис. 7б

Зависимости локального поглощения вдоль лучевых траекторий от высоты.

Рис. 7а – обыкновенная волна, рис. 7б – необыкновенная волна. Угол выхода 45°. Ночная ионосфера

Графики на рис. 7 строились в соответствии с формулой (19). На рисунках хорошо видно, как растет поглощение с уменьшением частоты и что на поглощение влияет небольшая область вдоль нижней границы ионосферы. Если иметь в виду, что ниже 65 км обычно в общепринятых моделях данные о частоте соударений и электронной концентрации не приводятся, то понятно, что эта область изучена недостаточно. Графики для мнимой части эффективной диэлектрической проницаемости мы не приводим, поскольку в силу (19) они аналогичны рис. 7.

На рисунках 8а и 8б показаны зависимости от высоты действительной части эффективной

диэлектрической проницаемости среды вдоль лучевых траекторий.

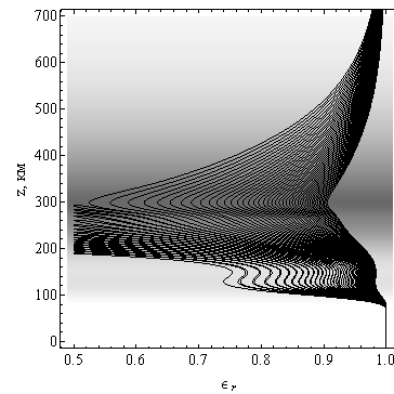


Рис. 8а

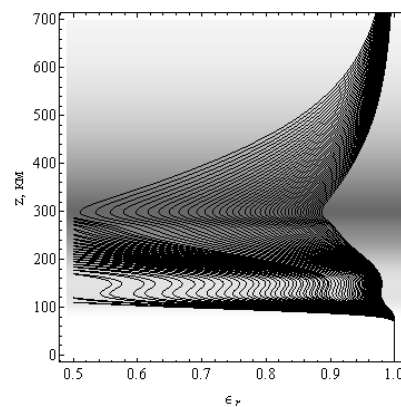


Рис. 8б

Зависимости действительной части эффективной диэлектрической проницаемости среды вдоль лучевых траекторий от высоты.

Рис. 8а – обыкновенная волна, рис. 8б – необыкновенная волна. Угол выхода 45°. Ночная ионосфера

Правая часть рисунков ограничена значением 1 (диэлектрическая проницаемость в пустоте), а левая – значением 0,5, что определяется углом выхода лучей  $\alpha_0$ . Поскольку эффективная диэлектрическая проницаемость зависит от координат, а также волнового вектора и частоты сигнала, для каждого луча получается своя зависимость от высоты. Минимумы соответствуют слоям E и F. Рисунки для обыкновенной и необыкновенной волн очень похожи. Следует отметить, что, как следует из расчетов, учет эффективной частоты соударений существенно не влияет на траекторию луча. Это понятно, если учесть, что поправка к  $\epsilon_r$  пропорциональна  $\nu Z^2 \sim N^2 \nu_e^2$ .

На рисунках 9а и 9б показаны зависимости расходимости вдоль лучевых траекторий от высоты в дБ.

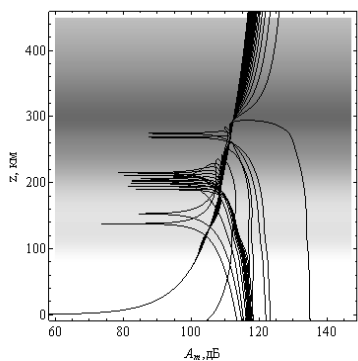


Рис. 9а

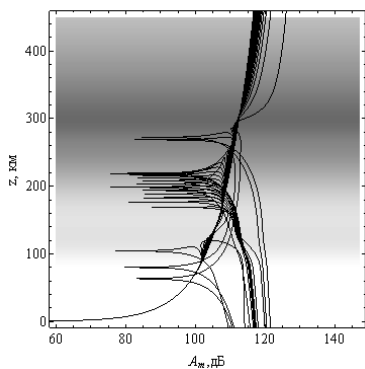


Рис. 9б

Зависимости расходимости вдоль лучевых траекторий от высоты в дБ.

Рис. 9а – обыкновенная волна,

рис. 9б – необыкновенная волна.

Угол выхода 45°. Ночная ионосфера.

Для определения расходимости необходимо преобразовать бихарактеристическую систему (8) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{k}}{dt} &= \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \bar{r}} \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega}, \\ \frac{d\bar{r}}{dt} &= \left( 2c^2 \bar{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \bar{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega}, \end{aligned} \quad (20)$$

известному как бихарактеристическая система Лукина [21; 22], и дополнить ее системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{k}_{\alpha_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \left( \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \bar{r}} \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\bar{r}_{\alpha_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \left( \left( 2c^2 \bar{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \bar{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\bar{k}_{\beta_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left( \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \bar{r}} \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\bar{r}_{\beta_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left( \left( 2c^2 \bar{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \bar{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

с начальными данными

$$k'_{x\alpha_0}(\eta) = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \alpha_0 \cos \beta_0,$$

$$k'_{x\beta_0}(\eta) = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0 \sin \beta_0,$$

$$k'_{y\alpha_0}(\eta) = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \alpha_0 \sin \beta_0,$$

$$k'_{y\beta_0}(\eta) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0 \cos \beta_0,$$

$$k'_{z\alpha_0}(\eta) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0, \quad k'_{z\beta_0}(\eta) = 0,$$

$$\vec{r}'_{\alpha_0}(\eta) = 0, \quad \vec{r}'_{\beta_0}(\eta) = 0, \quad (22)$$

то есть решить расширенную бихарактеристическую систему [4; 21; 22].

Получив решение бихарактеристической системы (21), можно вычислить якобиан  $J$  расходимости лучевой трубки:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial x}{\partial \beta_0} & T_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial y}{\partial \beta_0} & T_2 \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial z}{\partial \beta_0} & T_3 \end{vmatrix},$$

$$\vec{T} = \left( 2c^2 \bar{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \bar{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \quad (23)$$

и найти расходимость поля в каждой точке пространства:

$$A_m = 10 \cdot \lg \left| \frac{J_0}{J(\vec{r})} \right|. \quad (24)$$

В формуле (24)  $J_0$  – якобиан расходимости на условном расстоянии от источника (в расчетах был условно выбран 1 м). Величина  $\varepsilon = \varepsilon_r$ .

На рис. 9 в первую очередь следует отметить тёмную траекторию, соответствующую высокочастотному сигналу. Она имеет небольшой излом в окрестности максимума слоя F, что связано с дефокусировкой сигнала. Горизонтальные линии соответствуют каустикам. Это области усиления поля (фокусировки). Из рис. 9 следует, что лучи, соответствующие дальнему распространению (см. рис. 3), иногда называемые лучами Педерсена, испытывают очень большую расходимость.

С помощью рис. 3, 6 и 9 можно оценить амплитуду сигнала в точке приема. Как известно, действующая напряженность электрического поля изотропного излучателя в пустоте определяется формулой:

$$E_{\sigma 0} = \frac{\sqrt{30W}}{r} \text{ В/м}, \quad (25)$$

где  $W$  – мощность в ваттах, а  $r$  – расстояние до источника излучения в метрах. Тогда действующую напряженность электрического поля в некоторой точке пространства можно оценить по формуле:

$$E_{\phi} = E_{\phi 0} e^{-\psi} 10^{-A_m/20} \text{ В/м.} \quad (26)$$

Например, для ночной ионосферы с частотой  $\sim 4$  МГц на Земле (расстояние 800 км от источника) поглощение будет порядка одного Непера, а расходимость – около 120 дБ. Если предположить, что мощность источника 1 кВт, то напряженность поля в этой точке составит 64 мкВ/м.

### 2.2. Дневная ионосфера

Рассмотрим теперь аналогичные графики для дневной ионосферы. На рисунках 10а и 10б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(x, z)$ .

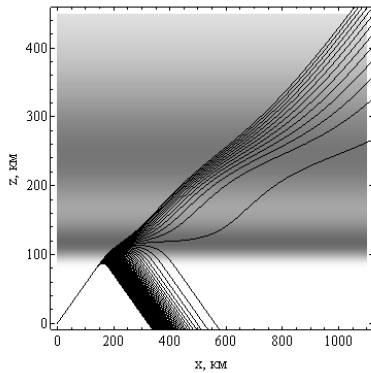


Рис. 10а

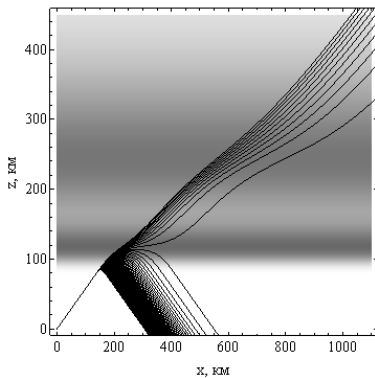


Рис. 10б

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(x, z)$ .

Рис. 10а – обыкновенная волна, рис. 10б – необыкновенная волна. Угол выхода  $30^\circ$ . Дневная ионосфера

Поскольку в данном случае максимум слоя E больше максимума слоя F, что является аномалией, лучи отражаются только от слоя E (сравните с рис. 3). Если сравнивать с лучевой структурой ночной ионосферы, то дальность связи на одной

и той же частоте при фиксированном угле выхода луча заметно уменьшилась (более чем вдвое) и структура стала более упорядоченной.

На рисунках 11а и 11б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в боковой плоскости  $(y, z)$ .

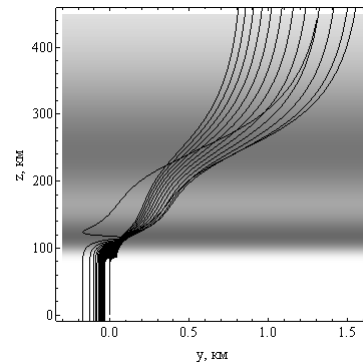


Рис. 11а

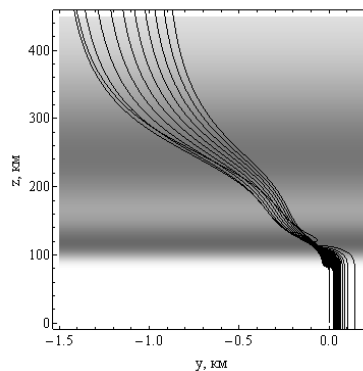


Рис. 11б

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(y, z)$ .

Рис. 11а – обыкновенная волна, рис. 11б – необыкновенная волна. Угол выхода  $30^\circ$ . Дневная ионосфера

Главным отличием дневной ионосферы от ночной ионосферы (см. рис. 4) является то, что лучи слабее отклоняются от первоначальной плоскости распространения.

На рисунках 12а и 12б показан вид «сверху» на лучевую структуру, то есть лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(x, y)$ .

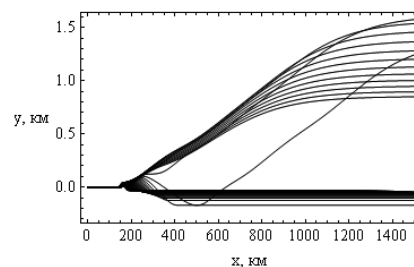


Рис. 12а



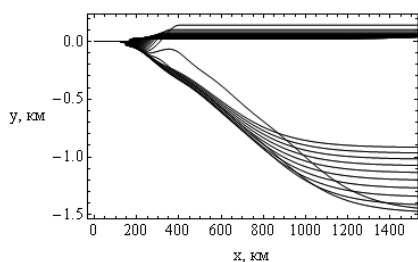


Рис. 126

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(x, y)$ .

Рис. 12а – обыкновенная волна,

рис. 12б – необыкновенная волна.

Угол выхода  $30^\circ$ . Дневная ионосфера

Если сравнивать траектории в этой плоскости для дневной и ночной ионосферы (см. рис. 5), то опять-таки видим, что отраженные лучи слабее отклоняются от первоначальной плоскости распространения, что согласуется с рис. 11.

На рисунках 13а и 13б приведены зависимости от высоты поглощения  $\Psi$  вдоль траекторий.

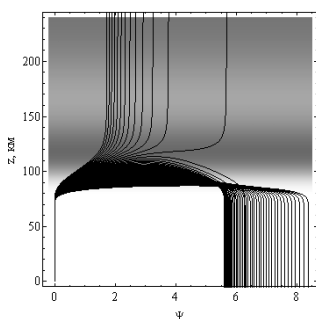


Рис. 13а

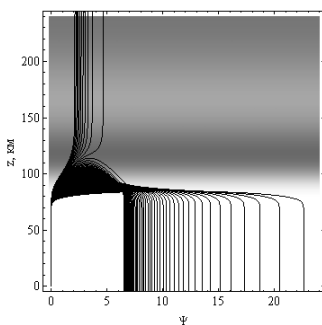


Рис. 13б

Зависимости поглощения  $\Psi$  (в Неперах) от высоты вдоль траекторий.

Рис. 13а – обыкновенная волна,

рис. 13б – необыкновенная волна.

Угол выхода  $30^\circ$ . Дневная ионосфера

Сравнивая поглощение в дневной и ночной ионосфере (рис. 6), видим, что оно существенно возросло. Максимальное поглощение для обыкновенной волны – приблизительно 8,5 Нп, а для

необыкновенной волны  $\sim 22,5$  Нп. Для частоты  $\sim 4$  МГц поглощение  $\sim 7$  Нп для обыкновенной волны и  $\sim 10$  Нп – для необыкновенной волны.

На рисунках 14а и 14б представлено локальное поглощение вдоль лучевых траекторий.

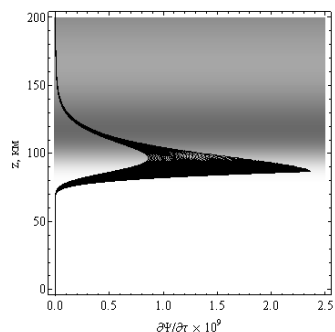


Рис. 14а

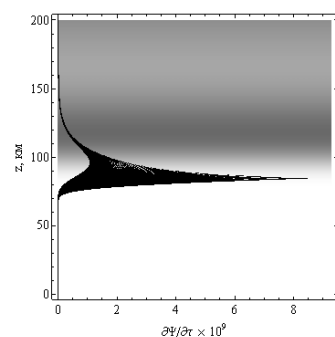


Рис. 14б

Зависимости локального поглощения вдоль лучевых траекторий от высоты.

Рис. 14а – обыкновенная волна,

рис. 14б – необыкновенная волна.

Угол выхода  $30^\circ$ . Дневная ионосфера

Если сравнивать ночную (рис. 7) и дневную ионосферу, то видно, что пики стали уже и значительно длиннее. Они по-прежнему располагаются вблизи нижней границы ионосферы.

На рисунках 15а и 15б показаны зависимости от высоты действительной части эффективной диэлектрической проницаемости среды вдоль лучевых траекторий.

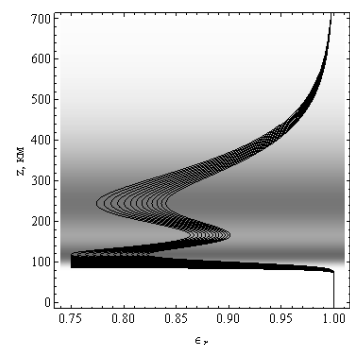


Рис. 15а

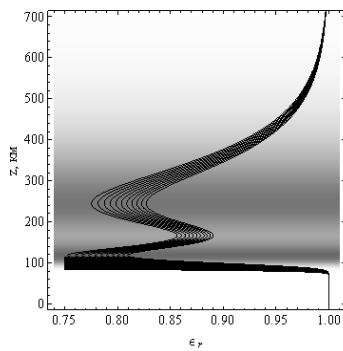


Рис. 15б

Зависимости действительной части эффективной диэлектрической проницаемости среды вдоль лучевых траекторий от высоты.

Рис. 15а – обыкновенная волна, рис. 15б – необыкновенная волна. Угол выхода 30°. Дневная ионосфера

По сравнению с рис. 8, характер кривых существенно изменился. Кривые стали компактнее. Это не удивительно, так как поведение кривых отслеживает поведение электронной концентрации (ср. рис. 1а и 1б).

На рисунках 16а и 16б показаны зависимости расходимости вдоль лучевых траекторий от высоты в дБ.

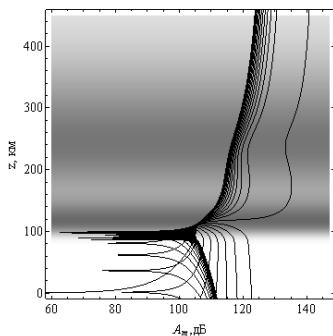


Рис. 16а

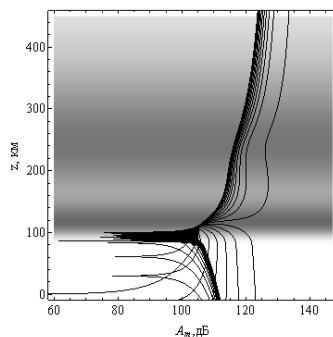


Рис. 16б

Зависимости расходимости вдоль лучевых траекторий от высоты в дБ.

Рис. 16а – обыкновенная волна, рис. 16б – необыкновенная волна. Угол выхода 30°. Дневная ионосфера

Как и в случае ночной ионосферы, с помощью рис. 10, 13 и 16 можно оценить амплитуду сигнала в точке приема. Для лучей с частотой ~4 МГц на Земле (расстояние ~350 км от источника) поглощение будет порядка одного 7 Нп для обыкновенной волны и 10 Нп – для необыкновенной волны, а расходимость – около 115 или 110 дБ соответственно. Если предположить, что мощность источника 1 кВт, то напряженность поля в этой точке составит 0,28 мкВ/м для обыкновенной волны и 0,025 мкВ/м – для необыкновенной волны.

### Заключение

Таким образом, в настоящей работе выполнено математическое моделирование распространения радиоволн в ионосфере с учетом магнитного поля Земли, частотной модуляции и влияния частоты соударений электронов на отклоняющее поглощение. Сопоставлены особенности распространения ЛЧМ сигналов в двухслойной анизотропной ионосфере в случае обыкновенной и необыкновенной волн. Исследованы поглощение радиоволны и расходимость вдоль лучей и влияние этих факторов на ослабление амплитуды радиосигнала. Расчеты выполнены для дневной и ночной моделей электронной концентрации высокоширотной ионосферной плазмы. Рассмотрены проекции лучей на разные координатные плоскости: на плоскость распространения, боковую плоскость и «вид сверху». Для расчетов лучевых характеристик применялась бихарактеристическая система дифференциальных уравнений, неизвестными в которой являются координаты луча, компоненты волнового вектора, а также частота и время. Для определения ослабления напряженности электрического поля вдоль траектории рассчитывалась расходимость лучевого потока на основе расширенной бихарактеристической системы уравнений.

Из результатов моделирования следует, что при изучении распространения ЛЧМ сигналов в анизотропных средах необходимо рассчитывать электромагнитные поля со сложной каустической структурой, используя волновую теорию катастроф [15; 23–25], поскольку для описания волновых полей в соответствии с приведенными выше рисунками необходимо рассчитывать поля на каустиках (огibaющих лучевых семейств), включая каустические особенности (катастрофы).

### Литература

1. Иванов Д.В. Методы и математические модели исследования распространения в ионосфере

ре сложных декаметровых сигналов и коррекции их дисперсионных искажений : монография. – Йошкар-Ола : Марийский гос. технический ун-т, 2006. – 266 с.

2. Иванов В.А., Иванов Д.В., Лашевский А.Р., Рябова М.И. Исследование дисперсионных искажений широкополосных элементов непрерывного ЛЧМ-сигнала при изменении их длительности сверх критической // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. – 2014. – № 1 (20). – С. 43–53.

3. Захаров В.Е., Котова Д.С. Моделирование дисперсионных искажений ЛЧМ-импульсов радиоволн в ионосфере // Труды XXIV Всероссийской научной конференции «Распространение радиоволн» (29 июня – 5 июля 2014, Иркутск). – Иркутск : ИСЗФ СО РАН, 2014. – Т. 4. – С. 97–100.

4. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57. – № 9. – С. 1028–1034.

5. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т. 12. – № 8. – С. 15–25.

6. Крюковский А.С., Зайчиков И.В. Особенности распространения радиоимпульсов в средах с дисперсией // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2008. – Т. 13. – № 8. – С. 36–41.

7. Кирьянова К.С., Крюковский А.С. Особенности лучевого распространения радиоволн в ионосфере Земли // Т-Сотт: Телекоммуникации и транспорт. – 2012. – № 11. – С. 25–28.

8. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Исследование распространения частотно-модулированных пространственно-временных сигналов в неоднородной анизотропной ионосфере // Вестник Российского нового университета. – 2013. – Выпуск 4. Управление, вычислительная техника и информатика. – С. 47–52.

9. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Математическое моделирование распространения частотно-модулированных радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – 2015. – Т. 60. – № 10. – С. 1001–1009.

10. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Численное моделирование рас-

пространения пространственно-временных частотно-модулированных радиоволн в анизотропной среде // Т-Сотт: Телекоммуникации и транспорт. – 2015. – Т. 9. – № 9. – С. 40–47.

11. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Математическое моделирование распространения радиоволн в нестационарной плазме с учетом кривизны поверхности Земли и ионосферных слоев // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели анализ и управление». – 2016. – Выпуски 1-2. – С. 34–40.

12. Бова Ю.И. Математическое моделирование распространения радиоволн в ионосфере Земли в зависимости от высоты источника излучения // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели анализ и управление». – 2016. – Выпуск 3. – С. 10–15.

13. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Влияние пространственно-временных возмущений ионосферной плазмы на распространение радиоволн // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59. – № 12-3. – С. 131–135.

14. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. – М. : Мир, 1973. – 502 с.

15. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. – М. : МФТИ, 1982. – 159 с.

16. ГОСТ 25645.146-89 Ионосфера Земли. Модель глобального распределения концентрации, температуры и эффективной частоты соударений электронов. Часть 1. Таблицы параметров. – М. : Издательство стандартов, 1990. – 30 с.

17. Крюковский А.С., Лукин Д.С. К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое // Радиотехника и электроника. – 1981. – Т. 26. – № 6. – С. 1121–1126.

18. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численное сравнение двух асимптотических методов решения задач дифракции волн в плавнонеоднородных средах // Изв. МВ и ССО СССР (Радиофизика). – 1986. – Т. 29. – № 1. – С. 79–88.

19. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспидных катастроф // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах : сборник. – М. : МФТИ, 1989. – С. 56–60.

20. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта // Дифракция и распространение электромагнитных волн : сборник. – М. : МФТИ, 1993. – С. 20–37.

21. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере // Космические исследования. – 1967. – Т. 5. – Вып. 4. – С. 593–600.

22. Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде // Радиотехника и электроника. – 1969. – Т. 14. – № 9. – С. 1673–1677.

23. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых

катастроф : монография. – М. : РосНОУ, 2013. – 368 с.

24. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2013. – Т. 18. – № 8. – С. 18–23.

25. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т. 12. – № 8. – С. 71–75.