СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ: МОДЕЛИ, АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI: 10.25586/RNU.V9187.18.04.P.05 УДК 537.87; 621.371; 517.958

А.С. Крюковский, Д.С. Лукин

ЛОКАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ФОКАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ ТИПА КАТАСТРОФ КОРАНГА ОДИН И ДВА[1]

Предложен метод построения локальных асимптотик, описывающих фокусировки электромагнитных полей в виде конечной суммы специальных функций волновых катастроф, аргументы которых, а также амплитудные и фазовые множители представлены в виде отрезков степенных рядов. Рассмотрены случаи вырожденных седловых (стационарных) точек фазовой функции интегранты, соответствующие топологическим особенностям теории катастроф. В случае наиболее распространенных топологических особенностей каспоидного и омбилического типа получено первое приближение для асимптотик быстро осциллирующих интегралов, равномерно описывающих волновые поля в фокальных областях. Результаты работы позволяют анализировать коротковолновые решения дифракционных и квантовомеханических задач, построенные, в частности, методом канонического оператора В.П. Маслова.

Ключевые слова: *локальные асимптотики, катастрофы, фокусировки, волновые поля, быстро осциллирующий интеграл, коранг, каустика, каустическое острие, омбилика.*

A.S. Kryukovsky, D.S. Lukin

LOCAL ASYMPTOTICS OF WAVE FIELDS IN FOCAL REGIONS OF CATASTROPHE TYPES WITH CORANK ONE AND TWO

A method for constructing local asymptotics describing the focusing of electromagnetic fields in the form of a finite sum of special functions of wave catastrophes, the arguments of which, as well as the amplitude and phase factors are represented as segments of power series is proposed. The cases of degenerate saddle (stationary) points of the phase function of the integrand corresponding to the topological singularities of catastrophe theory are considered. In the case of the most common topological singularities of the cuspoid and umbilic types, the first approximation for the asymptotics of rapidly oscillating integrals that uniformly describe the wave fields in the focal regions is obtained. The results of the work allow analyzing short-wave solutions of diffraction and quantum-mechanical problems, constructed, in particular, by the method of the Maslov's canonical operator.

Keywords: *local asymptotics, catastrophes, focusings, wave fields, a rapidly oscillating integral, corank, caustic, cusp, umbilicus.*

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-02-00544-а).

Введение. Постановка задачи

Настоящая работа посвящена исследованию полей в областях фокусировок, возникающих при дифракции и распространении волн. Наиболее общим методом решения широкого класса задач дифракции и распространения коротких волн в неоднородных анизотропных средах является метод канонического оператора В.П. Маслова [1–3], который позволяет представить асимптотическое решение системы псевдодифференциальных уравнений (уравнения Гельмгольца, системы уравнений Максвелла и т.д.) в виде быстро осциллирующих интегралов

$$\Psi(\vec{\alpha}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{\eta},\vec{\alpha}) \exp\left[i\Lambda\Phi(\vec{\eta},\vec{\alpha})\right] d\vec{\eta},\ g \sim \Lambda^{\kappa/2}, \tag{1}$$

где η_i – внутренние параметры задачи (например, канонические импульсы или координаты начального лагранжева многообразия), $\vec{\alpha}$ – вектор внешних параметров задачи, в который как компоненты входят координаты точки наблюдения, а $\Lambda >> 1$ – большой параметр задачи. Метод канонического оператора В.П. Маслова достаточно подробно изложен в литературе, и поэтому в данной работе мы будем считать решение в форме (1) известным.

Для анализа и численного решения задачи выражение (1) нуждается в дальнейшей конкретизации. В регулярной области можно перейти к геометрооптическим выражениям, а в областях фокусировки – к специальным функциям волновых катастроф (СВК) $\tilde{I}(\vec{\lambda})$ [3–4].

Для того чтобы проанализировать быстро осциллирующие интегралы (1) воспользуемся теорией особенностей дифференцируемых отображений (теорией катастроф) [5–7] и некоторыми результатами, касающимися асимптотик быстро осциллирующих интегралов, показательная функция которых представлена в виде полинома [8–10]. Сначала преобразуем фазу Φ подынтегрального выражения (1).

Пусть в точке $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^o$ существует седловая точка аналитической функции $\Phi(\vec{\eta},\vec{\alpha})$, то есть существует $\vec{\eta}^o$, такое, что

$$\frac{\partial \Phi(\vec{\eta}^o,\vec{\alpha}^o)}{\partial \vec{\eta}} = 0. \tag{2}$$

Тогда существует окрестность точки $\vec{\alpha}^o$, в которой существует невырожденное преобразование:

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}(\vec{x},\vec{\alpha})\ ,\ \det\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \vec{x}} \equiv \Delta \neq 0\ ,\ \dim \vec{x} = j \leq \kappa\ , \tag{3}$$

такое, что

$$\mu = \Lambda\Phi(\vec{\eta},\vec{\alpha}) = \theta(\vec{\alpha}) + \tilde{F}_\Sigma(\vec{x},\vec{\lambda})\ , \tag{4}$$

где $\tilde{F}_\Sigma(\vec{x},\vec{\lambda}) = \sum\limits_{i=1+j}^{\kappa} \delta_i x_i^2 + \nu F_\Sigma(\vec{x}^{(j)},\vec{\lambda}),\ \ \delta_i = \pm 1\ ,\ \nu = \pm 1,\ \vec{x}^{(j)} = (x_1, x_2, \ldots x_j)\ .$ (5)

Функции $F_\Sigma(\vec{x},\vec{\lambda})$ и $\tilde{F}_\Sigma(\vec{x},\vec{\lambda})$ являются полиномами стандартного типа, и их вид зависит от типа седловой точки. Функция $\tilde{F}_\Sigma(\vec{x},\vec{\lambda})$ называется универсальной деформацией. Индекс Σ обозначает тип топологической особенности в рассматриваемой седловой точке. Согласно классификации [5], [6].

$$\Sigma = A_N,\ D_N,\ E_N,\ \ldots \tag{6}$$

где N – кратность вырождения седловой точки, то есть число седловых точек, сливающихся при $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^o$, $\vec{\eta} = \vec{\eta}^o$. Схема подчинения особенностей представлена на рис. 1. Коразмерность особенности (то есть размерность вектора $\vec{\lambda}$) равна:

$$\dim \vec{\lambda} = N - 1,\ N = 1, 2, \ldots, +\infty.$$

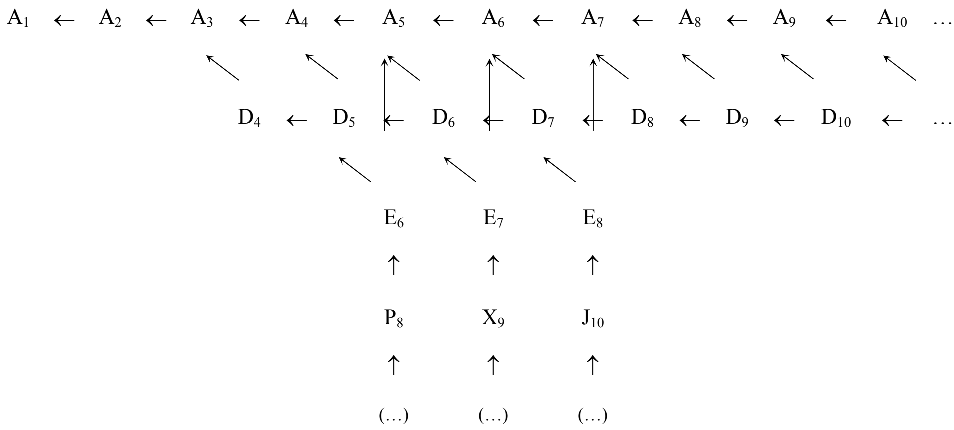

Рис. 1. Схема подчинения

После того как нами выполнена замена переменных (3) и преобразована фаза быстро осциллирующего интеграла, представим сам быстро осциллирующий интеграл в виде конечной суммы СВК.

Пусть справедливы вышеизложенные предложения, и пусть седловая точка $\vec{\eta}^{o}$ единственная, хотя, возможно, и кратная, а функция $g(\vec{\eta},\vec{\alpha})$ аналитическая. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g\exp\left[i\Lambda\Phi\right]d\vec{\eta}=\exp\left[i\theta(\vec{\alpha})\right]\left\{l_1(\vec{\alpha})\tilde{\mathrm{I}}^{\Sigma}(\vec{\lambda}(\vec{\alpha}))+\sum_{k=2}^{N}l_k(\vec{\alpha})\frac{\partial\tilde{\mathrm{I}}^{\Sigma}(\vec{\lambda}(\vec{\alpha}))}{\partial\lambda_{k-1}}\right\},$$

где

$$\tilde{\mathrm{I}}^{\Sigma}(\vec{\lambda})=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\tilde{F}_{\Sigma}(\vec{x},\vec{\lambda})\right]d\vec{x}=\pi^{\frac{\kappa-1-j}{2}}\exp\left[i\frac{\pi}{2}\sum_{n=1+j}^{\kappa}\delta_n\right]\overline{\mathrm{I}^{\Sigma}(\vec{\lambda})}^{\nu}, \qquad (8)$$

$$\mathrm{I}^{\Sigma}(\vec{\lambda})=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[iF_{\Sigma}(\vec{x}^{(j)},\vec{\lambda})\right]d\vec{x}^{(j)}.$$

Обозначение —ν означает комплексное сопряжение при $\nu=-1$.

Для определения амплитудных коэффициентов l_k справедлива цепочка рекуррентных соотношений, n-е из которых имеет вид:

$$i\sum_{k=1}^{\kappa}\frac{\partial H_n^{(k)}}{\partial x_k}=l_1^{(n)}+i\sum_{k=2}^{N}l_k^{(n)}\frac{\partial\tilde{F}_{\Sigma}}{\partial\lambda_{k-1}}+i\sum_{k=1}^{\kappa}\frac{\partial\tilde{F}_{\Sigma}}{\partial x_k}H_{n+1}^{(k)},\ n=0,\ 1,\ \ldots,\ +\infty \qquad (9)$$

$$i\sum_{k=1}^{\kappa}\frac{\partial H_0^{(k)}}{\partial x_k}=g\left|\Delta\right|,\ l_k=\sum_{n=0}^{+\infty}l_k^{(n)}. \qquad (10)$$

Если седловая точка $\vec{\eta}^{o}$ при $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^{o}$ не единственная (существует $\vec{\eta}^{o}*\neq\vec{\eta}^{o}$), то к правой части равенства (7) следует добавить вклады от других седловых точек, вид которых аналогичен.

Таким образом, построение асимптотики быстро осциллирующего интеграла сводится к определению типа топологической особенности Σ в седловых точках и функции Φ – к определению величин $\vec{\lambda}$, $\vec{l}$ и θ –к вычислению СВК $\mathrm{I}^{\Sigma}(\vec{\lambda})$ и её первых производных. Здесь мы проанализируем локальный метод определения $\vec{\lambda}$, $\vec{l}$ и θ. Эффективные алгоритмы вычисления СВК рассмотрены в работах [3; 10–13].

Так как $l_k^{(n)} / l_k^{(n+1)} \sim \Lambda$ [9], а нас интересует асимптотическое решение задачи, то при $g(\vec{\eta}^o, \vec{\alpha}^o)$ будем считать $l_k \approx l_k^{(0)}$. Кроме того, в неоднородной трехмерной среде кратность быстро осциллирующих интегралов k в случае стационарной задачи не превышает 2 [2; 14].

Случай $k = 1$ рассмотрен нами в [14–10]. Поэтому ограничимся случаем $k = 2$.

1. Невырожденная седловая точка ($\Sigma = A_1$)

Так как канонический оператор В.П. Маслова, с помощью которого мы получаем быстро осциллирующий интеграл (1), строится таким образом, что через каждую точку наблюдения проходит хотя бы один луч (комплексный или действительный), то обязательно существует седловая точка. Там, где лучи отсутствуют, $\Psi \cong 0$.

Пусть седловая точка невырождена. То есть,

$$\det\Gamma = \det\begin{Vmatrix}\mu_{11} & \mu_{12}\\ \mu_{21} & \mu_{22}\end{Vmatrix} \neq 0,\ \ \mu_i = \left.\frac{\partial\mu}{\partial\eta_i}\right|_o,\ \ \mu_{ik} = \left.\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta_i\partial\eta_k}\right|_o, \tag{11}$$

$j = \operatorname{corang}\Gamma = 0$, $F_{A_1} = 0$.

Тогда интеграл (1) может быть вычислен методом стационарной фазы (или методом перевала) [2]. Если седловая точка вещественная, имеем:

$$\Psi \cong \frac{2\pi}{\sqrt{|\det\Gamma|}}\exp\left[i\left(\theta + \frac{\pi}{4}(\delta_1 + \delta_2)\right)\right]. \tag{12}$$

Если $|\det\Gamma| < 0$, то $\delta_1 = +1$, а $\delta_2 = -1$.

Если $|\det\Gamma| > 0$, а $\mu_{11} > 0$, то $\delta_1 = \delta_2 = +1$.

Если $|\det\Gamma| > 0$, а $\mu_{11} < 0$, то $\delta_1 = \delta_2 = -1$,

так как $\operatorname{sign}(\det\Gamma) = \operatorname{sign}(\delta_1\delta_2)$, а $\operatorname{sign}(\mu_{11}) = \operatorname{sign}(\mu_{22})$ при $\det\Gamma > 0$.

Пусть теперь

$$\det\Gamma = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2 = 0, \tag{13}$$

то есть рассматриваемая седловая точка вырождена и $j \neq 0$. В общем случае уравнения (2) и (13) определяют гиперповерхность в пространстве $\vec{\alpha} \in R^m$ размерности $m - 1$. Поэтому лучевая асимптотика (12) справедлива всюду, за исключением небольшой окрестности каустической поверхности, где асимптотику необходимо искать в виде конечной суммы СВК. В этой окрестности с необходимой степенью точности аргументы λ_k, амплитудные коэффициенты l_k и фазовый множитель θ можно представить локально, то есть в виде отрезков ряда Тейлора относительно точки $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^o$. Основными преимуществами метода локальной асимптотики по сравнению с методом глобальной асимптотики, в котором выражения для $\vec{\lambda}$, $\vec{l}$ и θ представлены через лучевые характеристики, являются: явный характер окончательных выражений и отсутствие необходимости строить аналитическое продолжение в те области, где седловые точки становятся комплексными.

В настоящей работе мы ограничимся первым приближением:

$$\vec{\lambda} \approx \vec{\lambda}^{(1)} = \left\|\gamma_{ik}(\vec{\alpha}^o)\right\|\Delta\vec{\alpha},\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ k = 1, 2, \ldots, m,\ \vec{l} \approx \vec{l}^{(0)} \approx \vec{l}^{(0)}(\vec{\alpha}^o) \equiv \vec{l}^o,$$

$$\theta = \theta(\vec{\alpha}^o) + \sum_{k=1}^{m}\mu_{\alpha_k}\Delta\alpha_k + \ldots,\ \Delta\alpha_k = \alpha_k - \alpha_k^o,\ \mu_{\alpha_k} = \left.\frac{\partial\mu}{\partial\alpha_k}\right|_o. \tag{14}$$

Численные расчеты показывают, что первое приближение описывает несколько первых относительно главного дифракционного максимума осцилляций амплитуды поля, в то время как лучевое приближение хорошо описывает асимптотику поля вне каустик уже на склонах главного максимума амплитуды [14].

Ниже мы изложим методику построения локальной асимптотики и приведем ряд конкретных примеров [14], [21].

2. Простая каустика ($\Sigma = A_2$)

Пусть коранг j матрицы Гесса Г функции μ равен 1, и при $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^o$ сливаются две седловые точки ($N = 2$). Тогда, согласно теории катастроф [5], [6],

$$F_{A_2} = x_1^3 + \lambda x_1. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (5) и (4), получим

$$\mu = \theta + \delta x_2^2 + \nu\left(x_1^3 + \lambda x_1\right). \tag{16}$$

Для определения γ_{1k} продифференцируем (16) по x_1 и α_k и положим $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^o$, $\vec{\eta} = \vec{\eta}^o$. С учетом (2) находим

$$\gamma_{1k} = \nu\left(\mu_{1\alpha_k} p_1^1 + \mu_{2\alpha_k} p_1^2\right), \tag{17}$$

где

$$p_i^k = \left.\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\right|_o. \tag{18}$$

Таким образом, задача определения γ_{ik}, так же как и l_k, θ, сводится к вычислению p_i^k и их производных по x_i и α_k, то есть к представлению преобразования (3) в виде отрезка ряда Тейлора. Вся информация о преобразовании (3) содержится в тождестве (4) (или в нашем примере – в его аналоге тождества (16)). Продифференцируем (16) дважды по x_i и положим $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^o$, $\vec{\eta} = \vec{\eta}^o \sim \vec{x} = 0,\ \lambda = 0$. Тогда с учетом (2) получим:

$$\begin{cases} B_2\left(\mu, p_1^1, p_1^2\right) = \dfrac{\partial^2 F_\Sigma}{\partial x_1^2} = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} p_2^k B_1\left(\mu_k, p_1^1, p_1^2\right) = \dfrac{\partial^2 F_\Sigma}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ B_2\left(\mu, p_2^1, p_2^2\right) = \dfrac{\partial^2 F_\Sigma}{\partial x_2^2} = 2\delta \end{cases} \tag{19}$$

где введено обозначение

$$B_n\left(f, a, b\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{\partial^n f}{\partial^{n-i} x_1 \partial^i x_2} a^{n-i} b^i. \tag{20}$$

Так как в рассматриваемой седловой точке выполняется соотношение (13), а $j = 1$, то μ_{11} и μ_{22} не могут одновременно равняться нулю. Пусть для определенности $\mu_{22} \neq 0$. Из системы (19) находим

$$p_1^2 = -\varphi p_1^1,\ \varphi = \frac{\mu_{12}}{\mu_{22}},\ \left[B_1\left(\mu_2, p_2^1, p_2^2\right)\right]^2 = 2\delta\mu_{22}, \tag{21}$$

откуда следует, что

$$\operatorname{sign}\mu_{11} = \operatorname{sign}\mu_{22} = \operatorname{sign}\delta. \tag{22}$$

Продифференцируем (16) трижды по x_1. С учетом (2), (13), (19) в седловой точке $\vec{\eta}^o$ получим

$$B_3\left(\mu, p_1^1, p_1^2\right) = 6\nu,\ p_1^1 = \sqrt[N+1]{\frac{(N+1)!}{\nu\beta}},\ \beta = B_3\left(\mu, 1, -\varphi\right). \tag{23}$$

Выберем подкоренное выражение положительным. Тогда

$$\operatorname{sign}\nu = \operatorname{sign}\beta. \tag{24}$$

Сформулируем теперь необходимое и достаточное условие того, чтобы седловая точка $\vec{\eta}^o$ отвечала простой каустике. Функция μ при $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^o$ имеет в седловой точке $\vec{\eta} = \vec{\eta}^o$ топологическую особенность типа A_2 тогда и только тогда, когда выполняется (13), причем

$$\beta \neq 0. \tag{25}$$

и μ_{11}, μ_{12}, μ_{22} не обращаются в нуль одновременно.

Теперь определим коэффициенты асимптотического разложения l_1^o и l_2^o. Воспользуемся первым рекуррентным соотношением (9):

$$g\left|\Delta\right| = l_1^{(0)} + \nu i x_1 l_2^{(0)} + \nu\left(3x_1^2 + \lambda\right)H_1^{(1)} + 2\delta x_2 H_1^{(2)}. \tag{26}$$

Положим в (27) $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^o$ и $\vec{\eta} = \vec{\eta}^o$. Тогда $\vec{x} = 0$, $\lambda = 0$ и

$$l_1^o = g\left|\Delta\right|\Big\|_o. \tag{27}$$

Продифференцировав (27) по x_1 и опять положив $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^o$ и $\vec{\eta} = \vec{\eta}^o$, находим

$$l_2^o = -i\left[B_1\left(g, p_1^1, p_1^2\right)\left|\Delta\right| + g\Delta_1\right], \tag{28}$$

где

$$\Delta = p_1^1 p_2^2 - p_1^2 p_2^1 = p_1^1\left(p_2^2 + \varphi\, p_2^1\right) = p_1^1\sqrt{\frac{2}{\left|\mu_{22}\right|}} > 0, \tag{29}$$

$$\operatorname{sign} B_1\left(g, p_1^1, p_1^2\right) = \operatorname{sign}\delta,\ l_1^o \sim \Lambda^{1/6},\ l_2^o \sim \Lambda^{-1/6}.$$

Для Δ_1 имеем:

$$\Delta_1 = \frac{\partial\Delta}{\partial x_1} = \frac{p_1^1\Delta}{2\beta}\left(\frac{\psi}{\mu_{22}} - \frac{1}{3}B_4\left(\mu,\ 1, -\varphi\right)\right),$$

$$\psi = \left(\mu_{112}^2 - \mu_{111}\mu_{122}\right) - \varphi\left(\mu_{112}\mu_{122} - \mu_{111}\mu_{222}\right) + \varphi^2\left(\mu_{122}^2 - \mu_{112}\mu_{222}\right). \tag{30}$$

Фазовый множитель $\theta(\vec{\alpha})$ равен

$$\theta(\vec{\alpha}) = \mu\left(\vec{\eta}(\vec{0}, \vec{\alpha}), \vec{\alpha}\right). \tag{31}$$

Для предоставления $\theta(\vec{\alpha})$ в виде отрезка ряда Тейлора продифференцируем тождество (16) по α_k необходимое число раз, откуда получим

$$\theta(\vec{\alpha}) = \mu\left(\vec{\eta}(\vec{0}, \vec{\alpha}^o), \vec{\alpha}^o\right) + \sum_{k=1}^{m}\mu_{\alpha_k}\Delta\alpha_k + \frac{1}{2}\Delta\vec{\alpha}^*\left\|\frac{\partial^2\mu}{\partial\alpha_k\partial\alpha_i}\right\|_o\Delta\vec{\alpha} +$$
$$+\frac{1}{2}\Delta\vec{\eta}^*\left\|\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta_k\partial\eta_i}\right\|_o\Delta\vec{\eta} + \sum_{k=1}^{m}B_1\left(\mu_{\alpha_k}, \Delta\eta_1, \Delta\eta_2\right)\Delta\alpha_k + O\left(\left|\Delta\vec{\alpha}\right|^3\right), \tag{32}$$

где

$$\Delta\vec{\eta} = (\Delta\eta_1, \Delta\eta_2),\ \Delta\eta_i = \eta_i - \eta_i(\vec{0}, \vec{\alpha}^o) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\eta_i}{\partial\alpha_k}\bigg|_o\Delta\alpha_k + O\left(\left|\Delta\vec{\alpha}\right|^2\right). \tag{33}$$

3. Каустическое острие ($\Sigma = A_3$)

Как и простая каустика, каустическое острие принадлежит к серии каспоидных топологических особенностей A_N, коранг которых j равен 1 [5], [6], а универсальная деформация имеет вид

$$\tilde{F}_{A_N} = \delta x_2^2 + \nu\left(x_1^{N+1} + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k x_1^k \right). \quad (34)$$

Такие топологические особенности соответствуют одномерным фокусировкам волнового поля. Выполняя вычисления, аналогичные выкладкам предыдущего параграфа, находим, что равенства (17), (27), (28), (32),(33) для γ_{1k}, l_1^o, l_2^o и θ остаются в силе для любого N. Кроме того, для γ_{2k} и l_3^o получим

$$\gamma_{2k} = \frac{\nu}{2}\Big(B_1\left(\mu_{\alpha_k}, p_{11}^1, p_{11}^2\right) + B_2\left(\mu_{\alpha_k}, p_1^1, p_1^2\right)\Big), \quad (35)$$

$$l_3^o = -\frac{i}{2}\nu\left\{ \left[B_2\left(g, p_1^1, p_1^2\right) + B_1\left(g, p_{11}^1, p_{11}^2\right) \right]\Delta + 2B_1\left(g, p_1^1, p_1^2\right)\Delta_1 + g\,\Delta_{11} \right\}, \quad (36)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{\beta}\left(\frac{R_2 a_2 - R_1 a_1}{2\left|\mu_{22}\right|\left(p_1^1\right)^2} - \frac{p_1^1}{10} B_5\left(\mu,\ 1, -\varphi\right) \right), \quad (37)$$

$$R_i = B_3\left(\mu_i, p_1^1, p_1^2\right), \quad (38)$$

$$p_{11}^n = \frac{(-1)^n}{10 p_1^1 \mu_{22}\beta}\left\{ \left(p_1^1\right)^3 B_5\left(\mu,\ 1, -\varphi\right)\mu_{3-n,2} - 10 B_2\left(\mu_2,\ 1, -\varphi\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[R_{3-n} - \frac{3}{2}\frac{\left(p_1^1\right)^3}{\mu_{22}} B_2\left(\mu_2,\ 1, -\varphi\right) a_n \right] \right\}, \quad (39)$$

$$a_2 = 2\mu_{112} - 3\varphi\mu_{122} + \varphi^2\mu_{222},\ a_1 = \mu_{122} - \varphi\mu_{222},$$

$$l_1^o \sim \Lambda^{1/4},\ l_2^o \sim \Lambda^0,\ l_3^o \sim \Lambda^{-1/4}. \quad (40)$$

Соотношения (21), (22), (24), (25), (29), полученные в предыдущем параграфе, справедливы для любого A_N.

Однако теперь

$$B_3\left(\mu,\ 1, -\varphi\right) = 0, \quad (41)$$

а величина β равна

$$\beta = B_4\left(\mu,\ 1, -\varphi\right) - \frac{3}{\mu_{22}} B_2^2\left(\mu_2,\ 1, -\varphi\right) \neq 0. \quad (42)$$

Условия (41), (25) совместно с (13) являются условиями образования в седловой точке топологической особенности типа A_3 [14], [22].

4. Эллиптическая и гиперболическая фокусировки ($\Sigma = \mathbf{D}_4^{\pm}$)

Рассмотрим теперь двумерные фокусировки волнового поля омбилического типа. Им соответствуют топологические особенности с корангом $j = 2$. Тогда вместо (13) имеем

$$\mu_{11} = \mu_{12} = \mu_{22} = 0. \quad (43)$$

Универсальная деформация $F_{D_4^{\pm}}$ имеет вид

$$F_{D_4^{\pm}} = \frac{x_1^3}{3} + \sigma x_1 x_2^2 + \lambda_3 x_2^2 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 x_1,\ \sigma = \pm 1. \quad (44)$$

Дифференцируя тождество (4) по x_i с учетом (44), получаем соотношение для γ_{ik}:

$$\gamma_{ik} = \nu B_1\left(\mu_{\alpha_k}, p_i^1, p_i^2\right),\ i = 1,2, \quad (45)$$

$$\gamma_{3k}=\frac{\nu}{2}\Big[B_1\big(\mu_{\alpha_k},d_1,d_2\big)+B_2\big(\mu_{\alpha_k},p_2^1,p_2^2\big)-\sigma B_2\big(\mu_{\alpha_k},p_1^1,p_1^2\big)\Big], \tag{46}$$

где

$$d_i=p_{22}^i-\sigma p_{11}^i. \tag{47}$$

Для определения p_i^k продифференцируем μ трижды по x_i, откуда получим

$$\begin{cases} B_3\big(\mu,p_1^1,p_1^2\big)=\dfrac{\partial^3\tilde F_\Sigma}{\partial x_1^3}=2\nu \\ \sum\limits_{k=1}^{2}p_2^kB_2\big(\mu_k,p_1^1,p_1^2\big)=\dfrac{\partial^3\tilde F_\Sigma}{\partial x_1^2\partial x_2}=0 \\ \sum\limits_{k=1}^{2}p_1^kB_2\big(\mu_k,p_2^1,p_2^2\big)=\dfrac{\partial^3\tilde F_\Sigma}{\partial x_1\partial x_2^2}=2\sigma \\ B_3\big(\mu,p_2^1,p_2^2\big)=\dfrac{\partial^3\tilde F_\Sigma}{\partial x_2^3}=0 \end{cases}. \tag{48}$$

Анализ системы (48) сводится к анализу корней характеристического уравнения:

$$B_3\big(\mu,\tau,1\big)=0. \tag{49}$$

В зависимости от типа корней (см. также [23]) получаем:

$Q<0$	3 действительных корня τ_1, τ_2, τ_3	D_4^-
$Q>0$	1 действительный и 2 комплексно сопряженных корня τ_3, $\tau_1=\overline{\tau}_2$	D_4^+
$Q=0$	3 действительных корня, 2 совпадают $\tau_3\neq\tau_1=\tau_2$	$N\geq 5$

,

где

$$Q=\big(\mu_{122}\mu_{111}-\mu_{112}^2\big)^3+\left[\mu_{122}\big(\mu_{112}^2-\mu_{111}\mu_{122}\big)+\frac{\mu_{111}}{2}\big(\mu_{222}\mu_{111}-\mu_{112}\mu_{122}\big)\right]^2. \tag{50}$$

Из (49) и (50) следует, что в случае особенности $D_4^\pm$ либо μ_{111}, либо μ_{222} не равно нулю. Пусть для определенности $\mu_{111}\neq 0$, и пусть τ_1, τ_2, τ_3 – корни характеристического уравнения (49). Тогда можно показать, что

$$p_1^1=\sqrt[3]{\frac{2}{\big|B_3\big(\mu,1,\tilde\psi\big)\big|}},\ \operatorname{sign}\nu=\operatorname{sign}B_3\big(\mu,1,\tilde\psi\big),\ \ p_1^2=\tilde\psi\,p_1^1,\ \ p_2^1=\tau_3\,p_2^2,$$

$$p_2^2=\frac{(\tau_2-\tau_1)\sqrt{-3\sigma}}{2\tau_1\tau_2-\tau_3(\tau_1+\tau_2)}p_1^1,\ \Delta=2\sqrt{3}\Big(\mu_{111}^2\big|(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)(\tau_3-\tau_1)\big|\Big)^{-1/3}>0,$$

$$\operatorname{sign}(+1)=\operatorname{sign}\Big[\sqrt{-\sigma}\big|(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)(\tau_3-\tau_1)\big|\Big], \tag{51}$$

где

$$\tilde\psi=\frac{\tau_1+\tau_2-2\tau_3}{2\tau_1\tau_2-\tau_3(\tau_1+\tau_2)}. \tag{52}$$

Для определения d_i в (46) имеем невырожденную систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{2} d_k B_2\left(\mu_k, p_2^1, p_2^2\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{2}(3-2k)B_4\left(\mu, p_k^1, p_k^2\right)$$

$$\sum_{k=1}^{2} d_k \left[\sum_{i=1}^{2} B_1\left(\mu_{ik}, p_1^1, p_2^2\right) p_1^i\right] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{2}\left(\sigma(2-k)+(1-k)\right)\left[\sum_{i=1}^{2} p_{3-k}^i B_3\left(\mu_i, p_k^1, p_k^2\right)\right]. \quad (53)$$

Аналогично разделу 2, из (9) находим выражение для коэффициентов l_k^o:

$$l_1^o = g\left|\Delta\right\|_o,\ l_k^o = -i\nu\left[B_1\left(g, p_k^1, p_k^2\right)\left|\Delta\right| + g\Delta_1\right], k = 2,3,$$

$$l_4^o = -\frac{i}{2}\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \sigma\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\left(g\cdot\Delta\right), \quad (54)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{8}\left[\frac{1}{6}B_4\left(\mu, p_2^1, p_2^2\right) - \frac{1}{2}B_4\left(\mu, p_1^1, p_1^2\right) - \sigma\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} p_1^i p_1^k B_2\left(\mu_{ik}, p_2^1, p_2^2\right)\right],$$

$$\Delta_2 = -\frac{1}{6}\sigma\Delta\sum_{k=1}^{2} p_1^k B_3\left(\mu_k, p_2^1, p_2^2\right), \quad (55)$$

причем

$$l_1^o \sim \Lambda^{1/3},\ l_2^o \sim l_3^o \sim \Lambda^0,\ l_4^o \sim \Lambda^{-1/4}. \quad (56)$$

Коэффициент l_4^o зависит уже от пятых производных функций μ по x_i, в то время как l_2^o и l_3^o – лишь от третьих и четвертых. Коэффициент l_4^o, в силу (56), дает обычно незначительную поправку в (7) по сравнению с первыми тремя членами.

5. Параболическая фокусировка ($\Sigma = D_5$)

Если рассматриваемая седловая точка соответствует топологической особенности омбилического типа D_5, то универсальная деформация имеет вид

$$F_{D_5} = x_1^4 + x_1 x_2^2 + \lambda_4 x_1^2 + \lambda_3 x_2^2 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 x_1. \quad (57)$$

Поскольку два корня характеристического уровня (49) совпадают и система, аналогичная (48), вырождена, p_i^k уже не определяются лишь третьими производными μ. Предлагая, как и ранее $\mu_{111} \neq 0$, находим

$$\operatorname{sign}\nu = \operatorname{sign} B_4\left(\mu, \tau_1, 1\right),\ \tau_1 = \tau_2 = \frac{p_1^1}{p_1^2},\ \tau_1 \neq \tau_3,\ p_1^2 = \tau_3\, p_2^2,$$

$$p_1^2 = \pm\left[\frac{1}{24}\left|B_4\left(\mu, \tau_1, 1\right)\right|\right]^{-1/4},\ p_2^2 = \pm\left\{\frac{1}{6}\left[\nu\, p_1^2\, \mu_{111}(\tau_1 - \tau_3)^3\right]\right\}^{1/2},$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{6\left|p_1^2\right|}{\left|\mu_{111}(\tau_1 - \tau_3)\right|}},\ \operatorname{sign} p_1^2 = \nu\operatorname{sign}\left[\mu_{111}(\tau_1 - \tau_3)\right]. \quad (58)$$

Выражения для γ_{1k} и γ_{2k} совпадают с формулами для $D_4^{\pm}$.

Для γ_{3k} и γ_{4k} находим:

$$\gamma_{3k} = \frac{\nu}{2}\left[B_2\left(\mu_{\alpha_k}, p_2^1, p_2^2\right) + B_1\left(\mu_{\alpha_k}, h_1, h_2\right) - \frac{1}{4}L_6\right], \quad (59)$$

$$\gamma_{4k}=\frac{\nu}{2}\left[B_1\left(\mu_{\alpha_k},p_1^1,p_1^2\right)+B_2\left(\mu_{\alpha_k},p_{11}^1,p_{11}^2\right)\right], \tag{60}$$

где

$$L_6=\sum_{n=1}^{2}p_{11}^n\,B_1\left(\mu_{n\alpha_k},p_1^1,p_1^2\right),\ h_i=\frac{1}{12}\left[p_2^i(12L_4-L_3)+p_1^i(12L_5-\frac{1}{12}L_2)\right],$$

$$L_2=-\frac{1}{20}\left[B_6\left(\mu,p_1^1,p_1^2\right)+15\sum_{k=1}^{2}p_{11}^kB_4\left(\mu_k,p_1^1,p_1^2\right)+\right.$$

$$\left.+15B_3\left(\mu,p_{11}^1,p_{11}^2\right)+45\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}p_{11}^kp_{11}^iB_2\left(\mu_{ik},p_1^1,p_1^2\right)\right],$$

$$L_5=-\frac{1}{6}B_4\left(\mu,p_2^1,p_2^2\right),\ L_4=-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{2}p_1^n\,B_3\left(\mu_k,p_2^1,p_2^2\right),$$

$$L_3=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\left[p_2^kB_4\left(\mu_k,p_1^1,p_1^2\right)+6\,p_{11}^k\sum_{i=1}^{2}p_2^iB_2\left(\mu_{ik},p_1^1,p_1^2\right)+3p_2^kB_2\left(\mu_k,p_{11}^1,p_{11}^2\right)\right]. \tag{61}$$

Величины p_{11}^1 и p_{11}^2, входящие в (59)–(61), определяются как решение невырожденной системы уравнений:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{2}p_{11}^iB_1\left(\mu_{i2},p_1^1,p_1^2\right)=-\frac{1}{3\chi}B_1\left(\mu_{22},p_1^1,p_1^2\right)\sum_{i=1}^{2}p_2^i\,R_i\\ \sum_{i=1}^{2}p_{11}^i\,R_i=-\frac{1}{10}\left[B_5\left(\mu,p_1^1,p_1^2\right)+\frac{5}{3\chi^2}B_1\left(\mu_{22},p_1^1,p_1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2}p_2^i\,R_i\right)^2\right]\end{cases}, \tag{62}$$

где $\chi=\sum_{i=1}^{2}p_2^i\,B_1\left(\mu_{1i},p_1^1,p_1^2\right)$.

Для амплитудных коэффициентов l_k^o = 1, 2, 3 справедливы выражения (54), а для l_4^o и l_5^o имеем:

$$l_4^o=-\frac{i}{2}\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{1}{12}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\right)(g\cdot\Delta),\ l_5^o=-\frac{i}{2}\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)(g\cdot\Delta), \tag{63}$$

причем

$$l_1^o\sim\Lambda^{3/8},\ l_2^o\sim\Lambda^{1/8},\ l_3^o\sim\Lambda^0,\ l_4^o\sim\Lambda^{-1/8},\ l_5^o\sim\Lambda^{-3/8}. \tag{64}$$

Ясно, что условие $B_4\left(\mu,\tau_1,1\right)\neq 0$ является необходимым, чтобы образовалась топологическая особенность типа D_5 – параболическая омбилика.

Если теперь $\mu_{111}=\mu_{222}=0$, то $\mu_{1i2}=0$ (i = 1 либо 2), и тогда

$$p_1^{3-i}=p_2^i=0,\ \Delta=\left|p_1^i\,p_2^{3-i}\right|,\ p_1^i=\pm\sqrt[4]{\frac{24}{\left|\mu_{iiii}\right|}},\ p_2^{3-i}=\pm\sqrt{\frac{2}{\left|p_1^i\,\mu_{1,3-i,2}\right|}},$$

$$\operatorname{sign}\nu=\operatorname{sign}\mu_{iiii},\ \operatorname{sign}p_1^i=\nu\operatorname{sign}\mu_{1,3-i,2},\ \operatorname{sign}p_2^{3-i}=(-1)^{i+1}\operatorname{sign}p_1^i. \tag{65}$$

Заключение

В настоящей работе изложен метод построения локальной асимптотики быстро осциллирующих интегралов, равномерно описывающих волновые поля в фокальных областях. Разобраны некоторые конкретные особенности. Известны работы, в которых делались попытки построить локальные выражения для сложных топологических особенностей (см. [23], а также ссылки в [14]). При этом фазовая функция μ представлялась в виде отрезка ряда Тейлора относительно степеней $\Delta\eta_i$, причем учитывались лишь те производные μ по η_i, порядок которых не превышал максимальной степени универсальной деформации, что верно лишь в случае простой каустики. Однако в общем случае для определения вектора $\vec{\lambda}$ в первом приближении необходимо учесть все производные μ по η_i вплоть до производных, порядок которых равен $2(N+1)-j$ включительно.

Отметим, что требование аналитичности функций μ и g можно ослабить, предположив лишь существование тех производных, которые входят в окончательные выражения.

Значение результатов, полученных в настоящей работе, не ограничивается волновыми задачами, так как они применены всюду, где возникает необходимость строить асимптотику быстро осциллирующих интегралов.

Авторы выражают благодарность Михалёвой Е.В. за помощь в оформлении работы.

Литература

1. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. – М. : МГУ, 1965. – 553 с.

2. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М. : Наука, 1976. – 296 с.

3. *Лукин Д.С., Палкин Е.А*. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах : учебное пособие. – М. : МФТИ, 1982. – 159 с.

4. *Лукин Д.С., Палкин Е.А.* Примечание канонического оператора Маслова для численного решения задач дифракции и распространения волн в неоднородных средах // Теоретическое и экспериментальное исследование распространения декаметровых радиоволн. – М. : ИЗМИР АН СССР, 1976. – С. 149–167.

5. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. – М. : Наука, 1982. – 304 с.

6. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. – М. : Мир, 1980. – 608 с.

7. *Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В.* Катастрофы в задачах дифракции и распространения волн // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2017. – Выпуск 1. – С. 5–10.

8. *Ursell, F.* Integrals with a large parameter. Several nearly coincident saddle-points // Proc. Camb. Phil. Soc., 1972. – V. 72. – P. 49–65.

9. *Duistermaat, J.J.* Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities // Communic. on Pure and Appl. Math, 1974. – V. 27. – № 2. – P. 207–281.

10. *Ursell, F.* Integral with a lagre parameter: a double complex integral with four nearly coincident saddle-points // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1980. – V. 87. – № 3. – P. 249–273.

11. *Лукин Д.С., Ипатов Е.Б., Палкин Е.А.* Алгоритм численного расчета специальных функций типа быстроосциллирующих интегралов // Вопросы дифракции электромагнитных волн. – М. : МФТИ, 1982. – С. 21–35.

12. *Крюковский А.С.* Метод обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета специальных функций волновых катастроф (СВК) // Дифракция и распространение электромагнитных и акустических волн. – М. : МФТИ, 1992. – С. 29–48.

13. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Теория расчета эталонных фокальных и дифракционных электромагнитных полей на основе специальных функций волновых катастроф // Радиотехника и электроника. – 2003. – Т. 48. – № 8. – С. 912–921.

14. *Крюковский А.С.* Локальное определение структуры электромагнитного поля в областях одновременной и двумерной фокусировки : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.04.03. – М. : МФТИ, 1982. – 219 с.

15. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Определение структуры коротковолнового поля в областях одновременной и двумерной фокусировки в плоскослоистой среде // Труды 6-й конференции молодых ученых. Московский физ.-тех. институт. – М., 1981. – С. 218–227 (рукопись деп. В ВИНИТИ, 2 июля 1981, № 3278-81).

16. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое // Радиотехника и электроника. – 1981. – Т. 26. – № 6. – С. 1121–1126.

17. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического острия в плоскослоистой среде // Вопросы дифракции электромагнитных волн. – М. : МФТИ, 1982. – С. 40–45.

18. *Крюковский А.С.* Локальные равномерные асимптотики волновых полей в окрестности основных и краевых каспоидных каустик // Радиотехника и электроника. – 1996. – Т. 41. – № 1. – С. 59–65.

19. *Карепов С.Л., Крюковский А.С.* Расчет волнового поля методом интерполяционной локальной асимптотики // Радиотехника и электроника. – 2001. – Т. 46. – № 1. – С. 40–46.

20. *Крюковский А.С., Маслянкин В.И., Хусамов Р.К.* Исследование каспоидной фокусировки A_3 методом локальной асимптотики // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2016. – Выпуск 4. – С. 20–25.

21. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Локальная асимптотика быстро осциллирующих интегралов, описывающих волновое поле в областях фокусировки // Дифракция и распространение электромагнитных волн. – М. : МФТИ, 1984. – С. 39–53.

22. *Крюковский А.С., Растягаев Д.В.* О необходимых и достаточных условиях образования каспоидных катастроф // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах : сборник. – М. : МФТИ, 1989. – С. 56–60.

23. *Berry, M.V., Hannay, J.H.* Umbilic points on Gaussian random surfaces // J. Phys. A : Math. Gen., 1977. – V. 10. – № 11. – P. 1809–1821.

References

1. *Maslov, V.P.* Teoriya vozmushcheniy i asimptoticheskie metody. – M. : MGU, 1965. – 553 s.

2. *Maslov, V.P., Fedoryuk, M.V.* Kvaziklassicheskoe priblizhenie dlya uravneniy kvantovoy mekhaniki. – M. : Nauka, 1976. – 296 s.

3. *Lukin, D.S., Palkin, E.A.* CHislennyy kanonicheskiy metod v zadachakh difraktsii i rasprostraneniya elektromagnitnykh voln v neodnorodnykh sredakh : uchebnoe posobie. – M. : MFTI, 1982. – 159 s.

4. *Lukin, D.S., Palkin, E.A.* Primechanie kanonicheskogo operatora Maslova dlya chislennogo resheniya zadach difraktsii i rasprostraneniya voln v neodnorodnykh sredakh // Teoreticheskoe i eksperimental’noe issledovanie rasprostraneniya dekametrovykh radiovoln. – M. : IZMIR AN SSSR, 1976. – S. 149–167.

5. *Arnol'd, V.I., Varchenko, A.N., Guseyn-Zade, S.M.* Osobennosti differentsiruemykh otobrazheniy. Klassifikatsiya kriticheskikh tochek kaustik i volnovykh frontov. – M. : Nauka, 1982. – 304 s.

6. *Poston, T., Styuart, I.* Teoriya katastrof i ee prilozheniya. – M. : Mir, 1980. – 608 s.

7. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S., Rastyagaev, D.V.* Katastrofy v zadachakh difraktsii i rasprostraneniya voln // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". – 2017. – Vypusk 1. – S. 5–10.

8. *Ursell, F.* Integrals with a large parameter. Several nearly coincident saddle-points // Proc. Camb. Phil. Soc., 1972. – V. 72. – P. 49–65.

9. *Duistermaat, J.J.* Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities // Communic. on Pure and Appl. Math, 1974. – V. 27. – № 2. – P. 207–281.

10. *Ursell, F.* Integral with a lagre parameter: a double complex integral with four nearly coincident saddle-points // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1980. – V. 87. – № 3. – P. 249–273.

11. *Lukin, D.S., Ipatov, E.B., Palkin, E.A.* Algoritm chislennogo rascheta spetsial'nykh funktsiy tipa bystroostsilliruyushchikh integralov // Voprosy difraktsii elektromagnitnykh voln. – M. : MFTI, 1982. – S. 21–35.

12. *Kryukovskiy, A.S.* Metod obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy dlya rascheta spetsial'nykh funktsiy volnovykh katastrof (SVK) // Difraktsiya i rasprostranenie elektromagnitnykh i akusticheskikh voln. – M. : MFTI, 1992. – S. 29–48.

13. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* Teoriya rascheta etalonnykh fokal'nykh i difraktsionnykh elektromagnitnykh poley na osnove spetsial'nykh funktsiy volnovykh katastrof // Radiotekhnika i elektronika. – 2003. – T. 48. – № 8. – S. 912–921.

14. *Kryukovskiy, A.S.* Lokal'noe opredelenie struktury elektromagnitnogo polya v oblastyakh odnovremennoy i dvumernoy fokusirovki : dis. ... kand. fiz.-mat. nauk : 01.04.03. – M. : MFTI, 1982. – 219 s.

15. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* Opredelenie struktury korotkovolnovogo polya v oblastyakh odnovremennoy i dvumernoy fokusirovki v ploskosloistoy srede // Trudy 6-y konferentsii molodykh uchenykh. Moskovskiy fiz.-tekh. institut. – M., 1981. – S. 218–227 (rukopis' dep. V VINITI, 2 iyulya 1981, № 3278-81).

16. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* K voprosu o pole v okrestnosti kausticheskogo ostriya v ionosfernom plazmennom sloe // Radiotekhnika i elektronika. – 1981. – T. 26. – № 6. – S. 1121–1126.

17. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* Lokal'noe asimptoticheskoe opisanie elektromagnitnogo polya v okrestnosti kausticheskogo ostriya v ploskosloistoy srede // Voprosy difraktsii elektromagnitnykh voln. – M. : MFTI, 1982. – S. 40–45.

18. *Kryukovskiy, A.S.* Lokal'nye ravnomernye asimptotiki volnovykh poley v okrestnosti osnovnykh i kraevykh kaspoidnykh kaustik // Radiotekhnika i elektronika. – 1996. – T. 41. – № 1. – S. 59–65.

19. *Karepov, S.L., Kryukovskiy, A.S.* Raschet volnovogo polya metodom interpolyatsionnoy lokal'noy asimptotiki // Radiotekhnika i elektronika. – 2001. – T. 46. – № 1. – S. 40–46.

20. *Kryukovskiy, A.S., Maslyankin, V.I., Khusamov, R.K.* Issledovanie kaspoidnoy fokusirovki A_3 metodom lokal'noy asimptotiki // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie". – 2016. – Vypusk 4. – S. 20–25.

21. *Kryukovskiy, A.S., Lukin, D.S.* Lokal'naya asimptotika bystro ostsilliruyushchikh integralov, opisyvayushchikh volnovoe pole v oblastyakh fokusirovki // Difraktsiya i rasprostranenie elektromagnitnykh voln. – M. : MFTI, 1984. – S. 39–53.

22. *Kryukovskiy, A.S., Rastyagaev, D.V.* O neobkhodimykh i dostatochnykh usloviyakh obrazovaniya kaspoidnykh katastrof // Rasprostranenie i difraktsiya voln v neodnorodnykh sredakh : sbornik. – M. : MFTI, 1989. – S. 56–60.

23. *Berry, M.V., Hannay, J.H.* Umbilic points on Gaussian random surfaces // J. Phys. A : Math. Gen., 1977. – V. 10. – № 11. – P. 1809–1821.