УДК 550.343.6

В.А. Минаев[1]
А.О. Фаддеев[2]
Т.М. Невдах[3]

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКОГО РЕЖИМА ЛИТОСФЕРЫ ЗЕМЛИ КАК ФАКТОРА ГЕОДИНАМИЧЕСКИХ УГРОЗ

Рассмотрены модели расчета температуры для континентальной и океанической литосфер Земли, направленные на оценку геодинамических угроз. Использовано уравнение теплопроводности для стационарного режима генерации тепла в геологической среде. В модели расчета температуры для океанической литосферы использовано уравнение остывающего полупространства и разложение в ряд Тейлора функции ошибок.

Ключевые слова: *моделирование, оценка, температура, континентальная литосфера, океаническая литосфера, теплопроводность, остывающее полупространство, функция ошибок, риск, угроза.*

V.A. Minaev
A.O. Faddeev
T.M. Nevdakh

MODELING OF THE EARTH LITHOSPHERE TEMPERATURE FIELD AS A SOURCE OF GEODYNAMIC THREATS

The models of temperature calculation for continental and oceanic lithospheres directed to assessment of geodynamic threats are considered. The heat conductivity equation for the stationary mode of heat generation in geological environment, and the equation of cooling-down half-space and Taylor's row decomposition of the error function are used.

Keywords: *modeling, assessment, temperature, continental lithosphere, oceanic lithosphere, heat conductivity, cooling-down half-space, error function, risk, threat.*

Температурное поле литосферы и геодинамические угрозы

Температура – важный параметр состояния вещества континентальной литосферы нашей планеты. От нее зависят многие физические свойства горных пород, теплоперенос в глубинах Земли, инициируемый разностью температур, она является главным геодинамическим механизмом эволюции планеты [1]. Поэтому пространственное распределение температурного поля континентальной литосферы является определяющим при оценке количественных характеристик геодеформационных процессов, сказываю-

[1] Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры ИУ10 «Защита информации» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, заслуженный работник высшей школы РФ.

[2] Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры математики и информационных технологий управления, Академия ФСИН РФ.

[3] Преподаватель кафедры математики и информационных технологий управления, Академия ФСИН РФ.

щихся на геодинамических рисках, вызывающих землетрясения, извержения вулканов и другие земные катастрофы. В то же время, информация о современном температурном режиме Земли является одной из важнейших нерешенных проблем геофизики [2]. Основную информацию о тепловом режиме континентальной литосферы дает геотермический метод, основанный на изучении распределения по поверхности Земли плотности теплового потока и восстановления температуры в недрах путем решения обратной задачи для уравнения теплопроводности [3].

Термический режим океанической литосферы также во многом характеризует проявления опасных природных катаклизмов, опасных для судоходства, шельфовой добычи полезных ископаемых и жизнедеятельности населения островных государств и поселений, континентальных окраин.

Сейсмичность, вулканизм, цунами, торнадо и другие высокорисковые угрозы, обусловленные термическими факторами океанической литосферы, постоянно подстерегают человека и объекты производственной деятельности, расположенные в океанических районах и переходных зонах от континента к океанам.

Масштабность проблем, связанных с возникновением и реализацией геодинамических угроз со стороны океанической литосферы, выразилась в проведении ее углубленных исследований как на национальном, так и на межнациональном уровнях.

Особый интерес при этом представляют работы по математическому моделированию температурного поля океанической литосферы. При построении моделей распределения ее глубинных температур используются результаты геологических, сейсмических, петрологических, геотермических, магнитных, электромагнитных и гравиметрических исследований. Однако в силу своей сложности проблема состояния и динамики температурного режима океанической литосферы до сих пор таит в себе множество нерешенных вопросов.

Таким образом, важным является то, для какого типа литосферы проводится расчет распределения температуры – океанической или континентальной. В зависимости от этого рассмотрим две различные математические модели.

Описание модели температурного поля континентальной литосферы

Рассмотрим математическую модель, предложенную авторами для количественных оценок значений температуры на различных глубинных уровнях земной коры и построения пространственных распределений температур на этих глубинах, при изучении термического режима континентальной литосферы Земли. Запишем уравнение теплопроводности:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+A(x,y,z,t)\,, \qquad (1)$$

где ρ – плотность, c – теплоемкость, T – температура, k –коэффициент теплопроводности, A – генерация тепла в единице объема, t – время.

Направляя ось z вертикально вниз и полагая (в первом приближении), что T и A не зависят от x и y, приходим к случаю одномерной задачи:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+A(z,t)\,. \qquad (2)$$

Поскольку в дальнейшем расчеты будут вестись для глубин не более 100 км (толщина континентальной литосферы), то кривизной Земли пренебрежём. В качестве граничных условий при решении уравнения (2) можно взять температуру T_0 и тепловой поток Q_0 на поверхности Земли. Сложности существуют при определении начальных условий. Если температуру U считать от T_0 = const до $U=T-T_0$, то решение уравнения (2) при постоянных ρ, c и k при начальном $U(z,0)=0$ и граничных условиях $U(0,t)=0$, $U(\infty,t)\neq\infty$ определяется соотношением:

$$U(z,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_0^\infty\frac{h}{\sqrt{t-\tau}}\left[\exp\left(-\frac{(\zeta-z)^2}{4h^2(t-\tau)}\right)-\rightarrow\right.$$
$$\left.\rightarrow-\exp\left(-\frac{(\zeta+z)^2}{4h^2(t-\tau)}\right)\right]A(\zeta,\tau)d\zeta, \qquad (3)$$

где $h^2={k}/{\rho c}$.

Как показали исследования, для глубин менее 100 км температурный режим можно считать стационарным, полагая A не зависящей от времени, что связано с достаточно постоянной и медленной генерацией тепла, обусловленной большим возрастом Земли. Таким образом, при оценке современной температуры на глубинах до 100 км уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-A(z)\,. \qquad (4)$$

Полагая k некоторой усредненной постоянной по всей глубине литосферы, для решения уравнения (4) необходимо знать вид функции $A(z)$. В отношении функции $A(z)$, входящей в (4), предположим, что объемная теплогенерация пород литосферы экспоненциально убывает с глубиной в соответствии с соотношением [2]:

$$A(z) = A_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right), \tag{5}$$

где A_0 – константа, равная $3\cdot 10^{-6}$ Вт/м^3, H – толщина литосферы.

В этих предположениях решением уравнения (4) является функция следующего вида:

$$T(z) = -C_1 \frac{A_0 H^2}{k} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) + C_2 z + C_3, \tag{6}$$

где C_1, C_2, C_3 – коэффициенты, определяемые через граничные условия.

В качестве граничных условий определим следующие соотношения:

$$T(z)\big|_{z=0} = T_0;\; k_0 T'(z)\big|_{z=0} = Q_0;$$

$$T(z)\big|_{z=H} = T_H, \tag{7}$$

где T_0, Q_0, k_0 – температура, тепловой поток и коэффициент теплопроводности на дневной поверхности, а T_H – температура на границе литосфера – литосферная мантия.

Подставляя функцию (6) в граничные условия (7), получим систему уравнений с тремя неизвестными C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} -C_1 \dfrac{A_0 H^2}{k_0} + C_3 = T_0, \\ C_1 A_0 H = Q_0, \\ -C_1 \dfrac{A_0 H^2}{2.7183\cdot k_H} + C_2 H + C_3 = T_H, \end{cases} \tag{8}$$

где k_H – коэффициент теплопроводности на границе литосфера – литосферная мантия.

Разрешая систему уравнений (8) относительно неизвестных коэффициентов, приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{Q_0}{A_0 H}, \\ C_2 = \dfrac{T_H - T_0}{H} - Q_0\left(\dfrac{1}{k_0} - \dfrac{1}{2.7183\cdot k_H}\right), \\ C_3 = T_0 + \dfrac{Q_0 H}{k_0}. \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, с помощью выражения (6) с учетом соотношений (9) можно рассчитать пространственное распределение температуры для континентальной части литосферы Земли применительно к задачам оценки геодинамических рисков [4; 5]. Для этого необходимо владеть информацией по пространственному распределению величин поверхностной температуры, температуры на границе литосфера – литосферная мантия, поверхностного теплового потока и поверхностного коэффициента теплопроводности.

Описание модели температурного поля океанической литосферы

Распределение температуры в океанической части литосферы рассчитывалось в зависимости от ее возраста в рамках модели остывающего полупространства [6] в соответствии с соотношением:

$$\frac{T(z) - T_0}{T_H - T_0} = erf\left(\frac{z - z_0}{2\sqrt{\chi\cdot t}}\right), \tag{10}$$

где T_H – температура на границе литосфера – литосферная мантия (принималась равной 1717.15°K), χ – коэффициент температуропроводности (принимался равным 10^{-6} м^2/с [6], *erf* – функция ошибок, t – возраст литосферы.

При реализации этой модели важным этапом является организация вычисления значений функции ошибок *erf*. Имеются таблицы значений этой функции, но они содержат только дискретные значения ее аргумента в достаточно ограниченном интервале – от 0,00 до 3,29. Поэтому авторами был разработан и численно реализован специальный алгоритм расчета значений функции ошибок для определения значений температуры океанической части литосферы.

Как известно, функция ошибок обычно представляется в виде следующего выражения:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)\,dt. \tag{11}$$

Разлагая подынтегральное выражение в ряд Тейлора, получим:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \frac{x^{11}}{1320} + \ldots\right). \tag{12}$$

Согласно признаку Д'Аламбера, ряд (12) сходится на всей комплексной плоскости.

Таким образом, используя (10) и разложение (12), можно представить пространственное распределение температурного поля океанической литосферы Земли, что в конечном итоге позволяет проводить исследования ее термического режима посредством вариации граничных условий и численных значений параметров, входящих в модель, и использовать полученные результаты для оценок и прогнозирования характеристик геодеформационных процессов и возникающих в этой среде геодинамических рисков [4; 5].

Литература

1. Butler, S.L., Peltier, W.R., Costin, S.O. Numerical Models of the Earth's Thermal History: Effects of Inner-core Solidification and Core Potassium // Physics of the Earth and Planetary Interiors. – 2005. – № 152. – Pp. 22–42.

2. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. – М. : Мир, 1985. – 2 т. – 260 с.

3. Milton, A., Stegun, I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. – N.Y. : Dover Publication, Inc., 1972. – 1046 с.

4. Минаев В.А., Фаддеев А.О., Абрамова А.В., Павлова С.А. Математическое моделирование сейсмических рисков // Спецтехника и связь. – 2013. – № 5. – С. 58–63.

5. Минаев В.А., Фаддеев А.О. Методика оценки геоэкологического риска и геоэкологической безопасности ландшафтно-территориальных комплексов : труды Семнадцатой научно-технической конференции «Системы безопасности» (СБ – 2008). – Москва, 30 октября 2008 г. – М. : Академия ГПС МЧС России, 2008. – С. 96–102.

6. Хаин В.Е., Ломизе М.Г. Геотектоника с основами геодинамики. – М. : Изд-во МГУ, 2005. –560 с.