

СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ: МОДЕЛИ, АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.55; 517.988

А.С. Крюковский¹
Ю.И. Скворцова²

A.S. Kryukovsky
Yu.I. Skvortsova

КАУСТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КРАЕВОЙ КАТАСТРОФЫ $K_{4,2}$ ³

CAUSTIC STRUCTURE OF EDGE CATASTROPHE $K_{4,2}$

Изучена каустическая структура краевой катастрофы $K_{4,2}$, возникающей при совместной каспоидной пространственной и временной фокусировке электромагнитного излучения волны в плазменном слое с сильной частотной дисперсией.

Ключевые слова: краевая катастрофа, каустики, электромагнитная волна, частотная модуляция, дисперсия, плазма.

The structure of regional catastrophe $K_{4,2}$, arising at joint cuspid space and time focusing of electromagnetic radiation of a wave in a plasma layer with a strong frequency dispersion is investigated.

Keywords: edge catastrophe, caustics, electromagnetic wave, frequency modulation, dispersion, plasma.

Настоящая работа посвящена исследованию каустической структуры краевой катастрофы $K_{4,2}$, описывающей унимодальную каспоидную фокусировку первичных и вторичных лучевых семейств. Как показано в работах [1–4], волновая катастрофа $K_{4,2}$ возникает как в задачах

¹ Доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета ИСиКТ НОУ ВПО «Российский новый университет».

² Заместитель декана факультета ИСиКТ НОУ ВПО «Российский новый университет».

³ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 15-02-04206-а, № 13-07-00937-а, ОФИ_М № 13-02-12121).

стационарной дифракции, когда и первичное, и вторичное излучение имеет особенность каспоидного типа A_3 , так и в нестационарных задачах распространения электромагнитных сигналов при совместной фокусировке пространственных и временных лучевых семейств.

Как известно [1–4], универсальная деформация катастрофы $K_{4,2}$ имеет вид:

$$F_{K_{4,2}} = k_1 z^2 + ax^2 z + k_2 x^4 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 z + \lambda_4 x z, \quad (1)$$

где x и z – внутренние переменные, a – функциональный модуль, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – коэффициенты

универсальной деформации, причем $z \in [0, +\infty)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. В соответствии с необходимыми и достаточными условиями образования катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$ [4–8], на функциональный модуль a накладываются ограничения [9]:

$$a^2 \neq \pm 4. \quad (2)$$

Параметры k_1 и k_2 принимают значения +1 или -1.

Равномерная асимптотика, соответствующая рассматриваемой особенности, имеет вид [2]:

$$U(\vec{r}, t) = e^{i\theta} \left\{ (l_1)_g I^{K_{4,2}}(a; \vec{\lambda}) + \sum_{k=3}^4 (l_k)_g \frac{\partial I^{K_{4,2}}}{\partial \lambda_k} + (l_1)_E I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) + \sum_{k=1}^2 (l_k)_E \frac{\partial I^{A_3}}{\partial \lambda_k} \right\}, \quad (3)$$

где $I^{K_{4,2}}(a, \vec{\lambda}) =$

$$= \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i(k_1 z^2 + ax^2 z + k_2 x^4 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 z + \lambda_4 x z) \right\} dx \quad (4)$$

спецфункция (СВК) краевой катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$ (в показателе экспоненты стоит универсальная деформация (1)), а

$$I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i(k_2 x^4 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x) \right\} dx \quad (5)$$

функция Пирси, то есть СВК основной катастрофы \mathbf{A}_3 . Её универсальная деформация получается как сужение исходной универсальной деформации с помощью подстановки $z = 0$. В формуле (3) θ – фаза бегущей волны, а $(l_j)_g$ и $(l_j)_E$ – геометрикооптические (ГО) и краевые коэффициенты асимптотического разложения.

Рассмотрим каустические структуры катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$. Во-первых, отметим, что разложение катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$ на основную особенность и катастрофу сужения имеет вид [2; 6]: $K_{4,2} = (A_3, A_3)$, то есть обе особенности представляют собой каустическое остриё. Только ГО каустическое остриё имеет обрыв. Поэтому каустики (оггибающие семейство ГО и краевых лучей) будут иметь форму клювов, причем связывает их прямая – граница свет-тень.

Рассмотрим сначала краевые лучи. Уравнения краевых лучей получаются из дифференцирования сужения ($z = 0$) исходной универсальной деформации (1), имеющей вид:

$$F_{A_3} = k_2 x^4 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x \quad (6)$$

по параметру x и приравниванием результата нулю:

$$\lambda_1 = -4k_2 x^3 - 2\lambda_2 x. \quad (7)$$

Для того чтобы получить каустик (оггибающую семейства краевых лучей), необходимо дополнить уравнение (7) нулем второй производной функции (6) по x :

$$12k_2 x^2 + 2\lambda_2 = 0. \quad (8)$$

В результате найдем уравнение каустики в параметрической форме:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 8k_2 x^3 \\ \lambda_2 = -6k_2 x^2 \end{cases}. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь каустик ГО лучей. Лучевые уравнения получаются дифференцированием универсальной деформации (1) по внутренним переменным x и z :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -4k_2 x^3 - 2axz - 2\lambda_2 x - \lambda_4 z \\ \lambda_3 = -ax^2 - 2k_1 z - \lambda_4 x \end{cases}. \quad (10)$$

Для того чтобы получить каустик ГО лучей, необходимо дополнить уравнения (10) нулем Гессiana универсальной деформации (1) по внутренним переменным:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_{K_{4,2}}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_{K_{4,2}}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F_{K_{4,2}}}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F_{K_{4,2}}}{\partial z^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Подставляя (1) в (11), получаем:

$$2k_1(12k_2 x^2 + 2az + 2\lambda_2) - (2ax + \lambda_4)^2 = 0, \quad (12)$$

откуда находим внутренний параметр z :

$$z = \frac{(2ax + \lambda_4)^2 - 24k_1 k_2 x^2 - 4k_1 \lambda_2}{4k_1 a}. \quad (13)$$

Подставив (13) в (10) и выполнив соответствующие преобразования, найдем, как и в случае каустики краевых лучей, выражения для λ_1 и λ_2 :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\lambda_3 \lambda_4 - 4a^2 x^3 + 16k_1 k_2 x^3 - 3ax^2 \lambda_4}{2k_1} \\ \lambda_2 = \frac{\lambda_4^2 + 6a^2 x^2 - 24k_1 k_2 x^2 + 2a\lambda_3 + 6ax\lambda_4}{4k_1} \end{cases}. \quad (14)$$

Для того чтобы получить уравнение границы свет-тень, подставим $z = 0$ в систему (10) и, выполнив преобразования, найдем, что:

$$\lambda_1 = -2x_b \lambda_2 - 4k_2 x_b^3, \quad (15)$$

где

$$x_b = x_{b2} = \frac{-\lambda_4 + \sqrt{\lambda_4^2 - 4a\lambda_3}}{2a} \quad (16)$$

или

$$x_b = x_{b1} = \frac{-\lambda_4 - \sqrt{\lambda_4^2 - 4a\lambda_3}}{2a}. \quad (17)$$

На рис. 1–9 показаны каустические структуры катастрофы $K_{4,2}$ в плоскости (λ_1, λ_2) при различных значениях параметров λ_3, λ_4 и функционального модуля a . Толстой линией на рисунках показана каустика ГО лучей. Её аналитическое продолжение, отсекаемое границей свет-тень, показано штриховой линией (пунктиром). Штрихпунктирной линией показана граница свет-тень. Наконец, тонкой линией показана каустика краевых лучей.

Сначала рассмотрим случай, когда параметры λ_3, λ_4 равны нулю. Рис. 1 соответствует случаю $a = 0$.

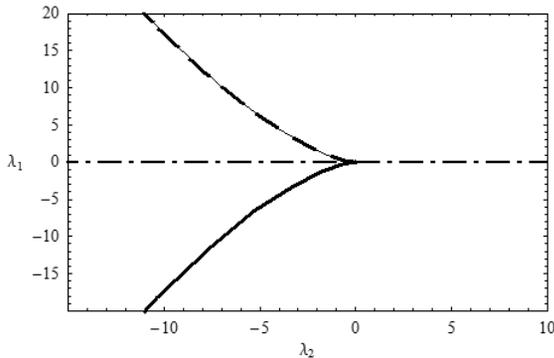


Рис. 1. $a = 0; k_1 = k_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

Каустика краевых лучей (каустическое острие) совпадает с каустикой ГО и её продолжением, граница свет-тень является биссектрисой.

При увеличении функционального модуля a каустика ГО лучей (и её продолжение) отрывается от каустики краевых лучей (рис. 2) и стремится при $a \rightarrow 2$ к вертикали, что является вырожденным случаем.

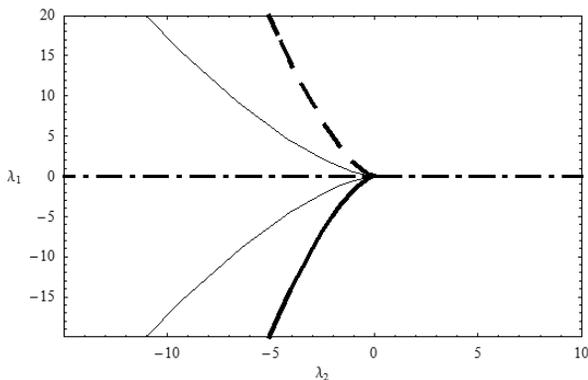


Рис. 2. $a = 1,9; k_1 = k_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

В случае когда функциональный модуль превосходит 2 (рис. 3), острие ГО лучей отображается относительно острия краевых лучей в правую часть рисунка.

Необходимо отметить, что на рис. 1–3 при всех значениях функционального модуля точка с

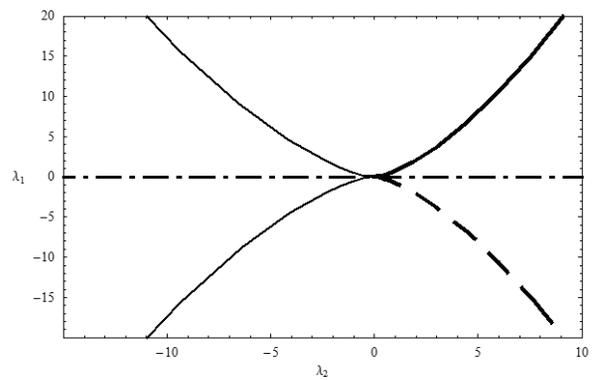


Рис. 3. $a = 2,5; k_1 = k_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

координатами $(0,0)$ является особой точкой катастрофы $K_{4,2}$, так как изменение функционального модуля не устраняет особенности.

Рассмотрим теперь случаи, когда параметры λ_3 и λ_4 не равны нулю. На рис. 4 показан случай, когда λ_3 и λ_4 не равны нулю, но разных знаков.

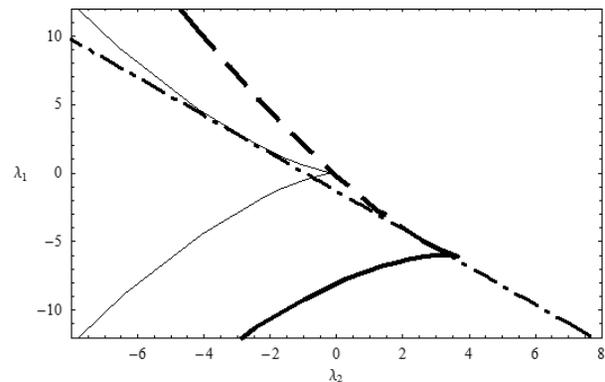


Рис. 4. $a = 0,5; k_1 = k_2 = 1, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 4$

Поскольку a меньше 2, оба каустических острия смотрят вправо, в разных точках касаются границы свет-тень и смещены относительно друг друга. Для вычисления x_b использовалась формула (16).

Аналогичная картина возникает, если поменять знак у функционального модуля (рис. 5).

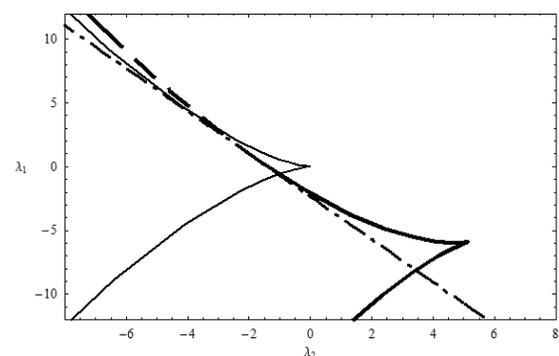


Рис. 5. $a = -0,5; k_1 = k_2 = 1, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 4$

Пусть теперь функциональный модуль превышает 2, причем k_2 принимает значение не +1, а -1 (рис. 6).

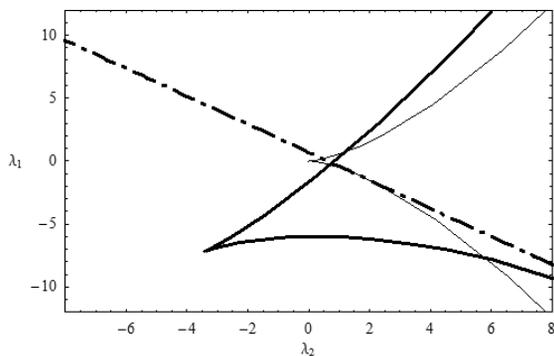


Рис. 6. $a = 2,5; k_1 = 1, k_2 = -1, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 4$

Видно, что оба каустических острия смотрят влево, причём каустическое острие краевых лучей отстаёт от каустического острия ГО лучей. Для вычисления x_b по-прежнему использовалась формула (16).

Поменяем знак функционального модуля и знаки у λ_3 и λ_4 (рис. 7).

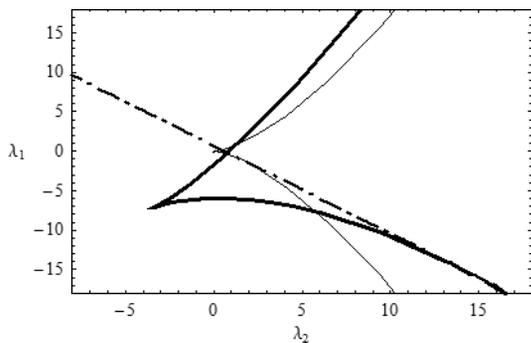


Рис. 7. $a = -2,5; k_1 = 1, k_2 = -1, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = -4$

Видно, что картина качественно не изменилась, но для вычисления x_b теперь уже используется формула (17).

Поменяем знак у k_1 с плюса на минус и сохраним неизменными остальные параметры.

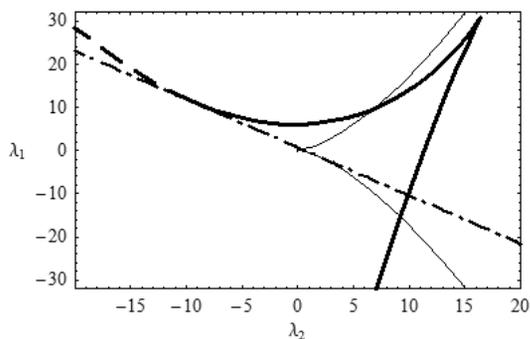


Рис. 8. $a = -2,5; k_1 = -1, k_2 = -1, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = -4$

Теперь каустическое острие краевых лучей (которое осталось на месте) и каустическое острие ГО лучей смотрят в разные стороны. Для вычисления x_b используется формула (17).

Наконец, рассмотрим случай, когда граница свет-тьнь отрезает полностью каустическое острие ГО лучей, оставляя только каустику с краем (рис. 9).

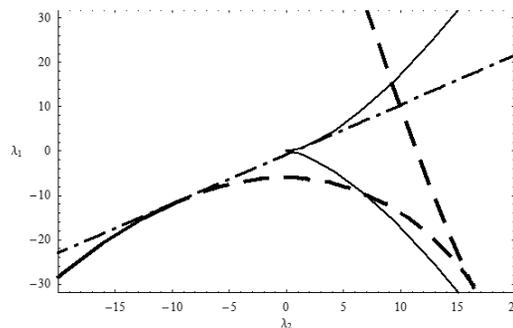


Рис. 9. $a = 2,5; k_1 = -1, k_2 = -1, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -4$
или $a = -2,5; k_1 = -1, k_2 = -1, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 4$

Это возможно в двух случаях: когда функциональный модуль положительный, а параметры λ_3, λ_4 отрицательные, либо наоборот – функциональный модуль отрицательный, а параметры λ_3, λ_4 положительные. В первом случае для вычисления x_b используется формула (17), а во втором – формула (16).

Аналогично, как показано в работах [10–12], посвященных информационной системе «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» (wavecatt.rosnou.ru), могут быть исследованы каустические структуры и более сложных краевых особенностей.

Таким образом, в настоящей работе исследована каустическая структура краевой катастрофы $K_{4,2} = (A_3, A_3)$, распадающейся две каспоидные катастрофы A_3 , соответствующие каустикам семейств краевых и ГО лучей [1; 2; 6]. Катастрофы каспоидного такого типа возникают в задачах распространения и дифракции волн и соответствуют областям фокусировок (см., например, [3; 13; 14]). Краевые катастрофы возникают при совместной пространственной и временной фокусировке электромагнитного излучения волны в плазменном слое с сильной частотной дисперсией [3; 4]. Для описания электромагнитных полей в таких областях разработана волновая теория катастроф [1; 2; 6], опирающаяся как на классические результаты теории катастроф [9], так и на лучевые методы [15–17].

Приведены каустические структуры краевой катастрофы $K_{4,2}$ при различных коэффициентах универсальной деформации и функционального модуля.

Литература

1. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции : учебное пособие. – М. : МФТИ, 1999. – 134 с.
2. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. – М. : РосНОУ, 2013. – 368 с.
3. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Теория катастроф в проблемах стационарной и нестационарной дифракции // Труды X школы-семинара по дифракции и распространению волн. 7–15.02.1993. – М. : МФТИ, 1993. – С. 36–111.
4. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2013. – Т. 18. – № 8. – С. 18–23.
5. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспидных катастроф // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах : сборник. – М. : МФТИ, 1989. – С. 56–60.
6. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. – Казань : Каз. авиационный ин-т, 1988. – 199 с.
7. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования основных волновых катастроф с корангом, равным двум // Распространение и дифракция электромагнитных волн : междувед. сб. – М. : МФТИ, 1993. – С. 4–19.
8. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования краевых катастроф // Проблемы дифракции и распространения волн : междувед. сб. – М. : МФТИ, 1994. – С. 47–54.
9. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. – М. : Наука, 1982. – Т. 1. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. – 304 с.
10. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т. 12. – № 8. – С. 71–75.
11. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Волкова Е.В., Костьо А.О., Павлова М.В. Создание информационной системы волновой теории катастроф и её применение при математическом моделировании // Вестник Российского нового университета. – 2007. – Выпуск 2. – С. 91–107.
12. Дорохина Т.В., Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Математическое компьютерное моделирование волновых полей типа катастроф // Распространение радиоволн: сборник докладов XXI Всероссийской научной конференции. – Йошкар-Ола, 25–27 мая 2005 г. – Йошкар-Ола : МарГТУ, 2005. – Т. 2. – С. 336–339.
13. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальная асимптотика быстроосциллирующих интегралов, описывающих волновое поле в областях фокусировки // Дифракция и распространение электромагнитных волн : междувед. сб. – М. : МФТИ, 1984. – С. 39–53.
14. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта // Дифракция и распространение электромагнитных волн : сборник. – М. : МФТИ, 1993. – С. 20–37.
15. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57. – № 9. – С. 1028–1034.
16. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Описание пространственно-временной структуры частотно-модулированного импульса методами волновой теории катастроф // IV Всероссийские Армандовские чтения [Электронный ресурс]: радиофизические методы в дистанционном зондировании сред : материалы VI Всероссийской научной конференции (Муром, 27–29 мая 2014 г.). – Муром : Изд.-полиграфический центр МИ ВлГУ, 2014. – 296 с. – С. 85–92.
17. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Распространение частотно-модулированных пространственно-временных радиоволн в анизотропной ионосфере : труды XXIV Всероссийской научной конференции «Распространение радиоволн» (29 июня – 5 июля 2014 г., Иркутск). – Иркутск : ИСЗФ СО РАН, 2014. – Т. 4. – С. 126–129.