УДК 519.2; 004

А.С. Крюковский[1]
Т.В. Лебедева[2]

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКСПЕРТА ПРИ ОЦЕНКЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ СИСТЕМЫ

Предложена математическая модель эксперта, проводящего оценку по достаточно длинной n-балльной шкале, учитывающая возможность равновероятных оценок. Обоснован выбор функции распределения, проанализированы параметры функции, исследованы характеристическая функция, математическое ожидание и дисперсия. Рассмотрен случай привлечения к оценке N экспертов. Исследована связь математического ожидания и оцениваемого параметра и указан метод определения (корректировки) оцениваемого параметра по математическому ожиданию.

Ключевые слова: *математическая модель, эксперт, оценка, конфиденциальная информация, вероятность, распределение, характеристическая функция, выборка, математическое ожидание, дисперсия.*

A.S. Kryukovsky
T.V. Lebedeva

EXPERT'S MATHEMATICAL MODEL BY INFORMATION ASSESSMENT OF SECURITY SYSTEM

A mathematical model of an expert, who conducts the assessment for large scale with n-points, which takes into account the possibility of equally probable ratings has been investigated. The choice of the distribution function has been substantiated, the function parameters have been analyzed, the characteristic function, mathematical expectation and the variance have been investigated. The case of the evaluation of N experts has been considered. The relation between the expectation and the estimated parameter, and the specified method for determining (correcting) the estimated parameter for the mathematical expectation is investigated.

Keywords: *mathematical model, expert, evaluation, confidential information, probability, distribution, characteristic function, sampling, expectation, variance.*

Сохранность конфиденциальной информации является основной задачей службы безопасности компании. Однако прежде чем осуществлять какие-либо мероприятия по защите конфиденциальных данных, необходимо оценить стоимость этой информации, уровень ее защищенности и ее важность (значимость) для организации. Для оценки этих параметров обычно привлекаются эксперты. В работах [1–6] нами рассматривалась методика оценки рисков утери конфиденциальной информации в компании,

[1] Доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета ИСиКТ АНО ВО «Российский новый университет».

[2] Главный специалист Департамента информационных технологий ОАО «Банк ВТБ».

была построена математическая модель процессов хранения, передачи и потери конфиденциальной информации, а также был разработан программно-аналитический комплекс для экспертных оценок стоимости конфиденциальной информации. Целью данной статьи является разработка вероятностной модели эксперта и оценка ее статистических характеристик.

В данной работе предполагается, что эксперт на основании своих знаний и опыта выбирает ту или иную оценку по n-балльной шкале (от 0 до n) [3]. Однако поскольку число n достаточно велико, для эксперта равновероятным является выбор не одной, а нескольких оценок. Например, высоко оценивая некоторый показатель по 10-балльной шкале (далее в расчетах всюду n = 10), эксперт может равновероятно указать как 10, так и 9 (или даже 8). Для учета этого обстоятельства нами предлагается использовать распределение вида:

$$P(k) = \frac{A_0}{1+(\alpha(k-m))^{\beta}}, \quad k = 0,...,n \tag{1}$$

где α, β, m – параметры, а

$$A_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+(\alpha(k-m))^{\beta}}\right)^{-1} \tag{2}$$

– нормировочный множитель. На рис. 1 приведены графики функции (1) при разных значениях параметра m: m = 5 – левая, более низкая кривая и m = 10 – правая кривая. Параметр β (всегда положительное четное число) отвечает за крутизну склонов экстремума. На рис. 2 приведены три зависимости β = 2 (кривая с минимальной модой и самыми пологими склонами), β = 10 и β = 20 (кривая с самыми крутыми склонами).

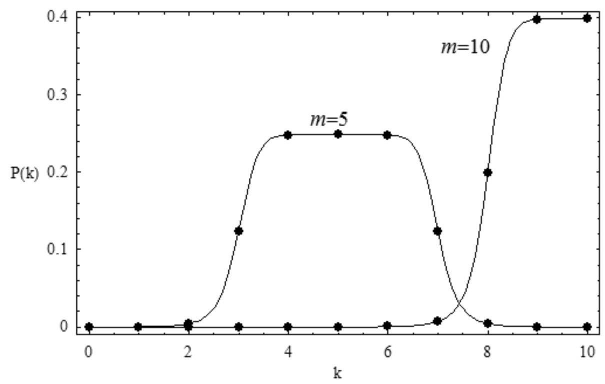

Рис. 1. Зависимости $P(k)$; α = 0,5; β = 10

Однако число равновероятных оценок регулирует в выражении (1) не параметр β, а параметр α. На рис. 3 сопоставлены кривые при различных значениях этого параметра. Самая высокая кривая соответствует α = 0,8 (одна максимальная оценка), средняя – α = 0,5 (3 равновероятные оценки) и, наконец, самая низкая – α = 0,3 (5 равновероятных оценок).

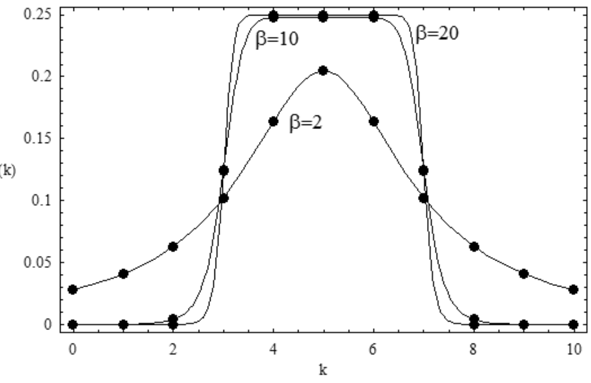

Рис. 2. Зависимости $P(k)$; α = 0,5; m = 5

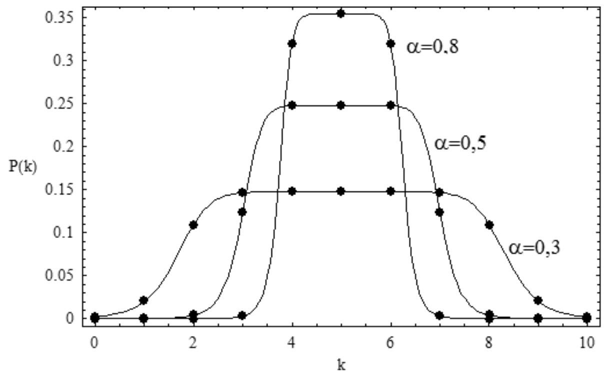

Рис. 3. Зависимости $P(k)$; β = 10; p = 5

Поскольку k = m соответствует моде распределения, естественно считать m справедливой оценкой, причем соответствующей методу максимального правдоподобия (то есть, как минимум состоятельной и эффективной). Однако, как видно из рис. 1, 2, 3, для эксперта фактически равновероятными являются и другие оценки. На рис. 4 показана зависимость от параметра m математического ожидания для распределения (1), (2). Математическое ожидание вычислялось в дискретных точках. На рисунке они соединены. Тонкой линией показана биссектриса. Видно, что внутри диапазона математическое ожидание и параметр m хорошо совпадают. Отличие возникает на концах диапазона примерно на балл. Например, если оценивается качество выполнения какой-либо работы, то для хороших работ оценка может быть занижена, а для плохих – завышена.

Нетрудно рассчитать и производящую функцию распределения (1):

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_0 z^k}{1+(\alpha(k-m))^{\beta}}. \tag{3}$$

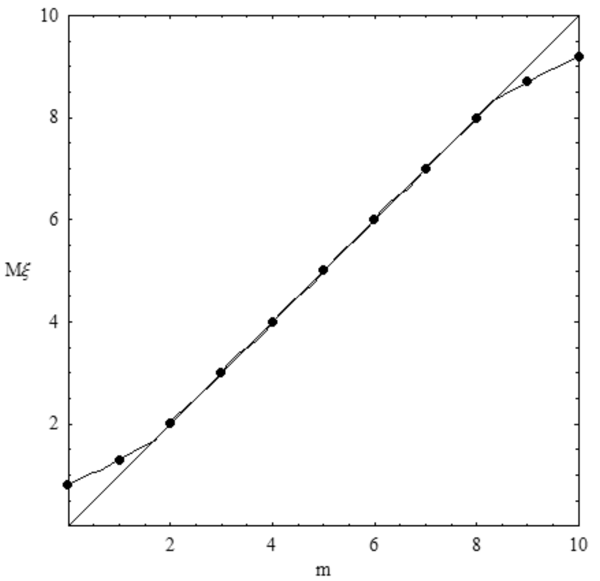

Рис. 4. Зависимость математического ожидания от параметра m; $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 10$

На рис. 5 показаны зависимости производящей функции от z при разных значениях m. Предположим, что для оценки определенного показателя привлечено N экспертов. Предполагая, что результаты экспертиз попарно независимы, можно найти итоговую производящую функцию по формуле:

$$\varphi_\Sigma(z) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A_0 z^k}{1 + (\alpha(k-m))^\beta} \right)^N, \qquad (4)$$

графики которой при $N = 15$ представлены на рис. 6.

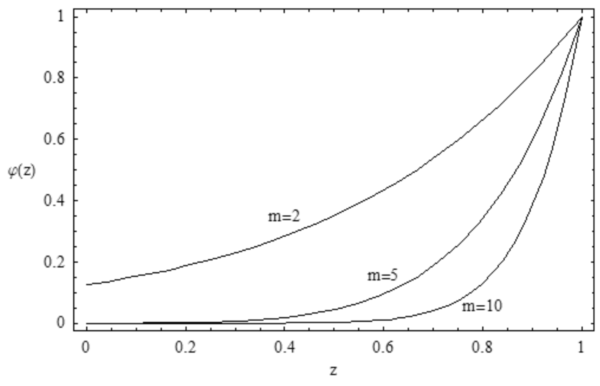

Рис. 5. Зависимости $\varphi(z)$; $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 10$

Если найти производную уравнения (4) и положить $z = 1$, можно найти математическое ожидание суммарного балла, полученного от всех экспертов, а поделив это число на N, можно найти среднее математическое ожидание (см. рис. 7):

$$M\xi_\Sigma = \varphi'_\Sigma(1) / N. \qquad (5)$$

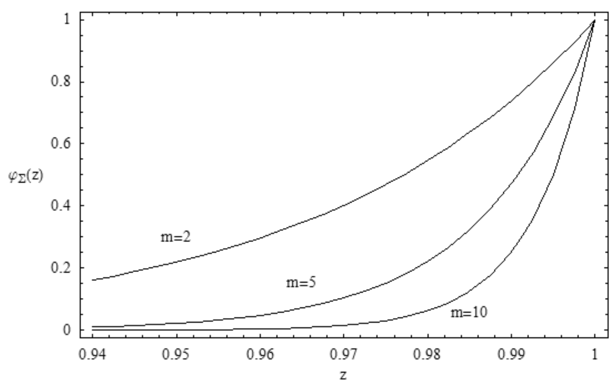

Рис. 6. Зависимости $\varphi_\Sigma(z)$; $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 10$

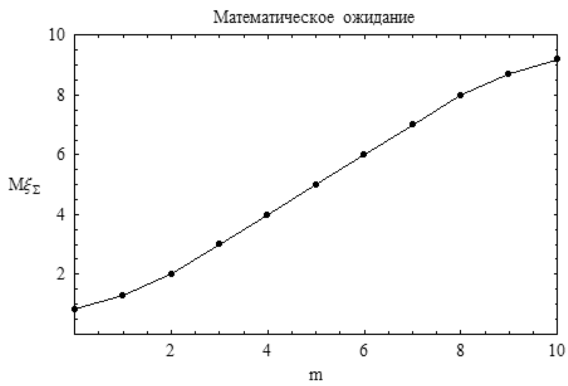

Рис. 7. Среднее математическое ожидание $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 10$, $N = 15$

Точно такую же кривую можно получить, если рассчитать итоговую производящую функцию по формуле:

$$\varphi_\Sigma(z) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A_0 (z/N)^k}{1 + (\alpha(k-m))^\beta} \right)^N, \qquad (6)$$

вычислить производную и положить в $z = 1$.

Сравнивая рис. 4 и 7, видим, что, как и следовало ожидать, увеличение числа экспертов не исправляет кривую и не приближает ее к биссектрисе, поскольку кривые идентичны, что можно показать и аналитически. Поэтому по рис. 4, зная оценку математического ожидания, можно легко находить оценку параметра m, что и является целью исследования, причем независимо от N.

Для того чтобы подчеркнуть особенности данного распределения, рассмотрим графики вероятностей при различных значениях m (рис. 8).

Во-первых, видим, что на концах интервала при $m = 0$ и при $m = 10$ моды принимают значения ≈1 и ≈9 соответственно, что согласуется с нашими выводами и рис. 7. Во-вторых, что на середине интервала между 2 и 8 величина моды не зависит от m и практически одинакова.

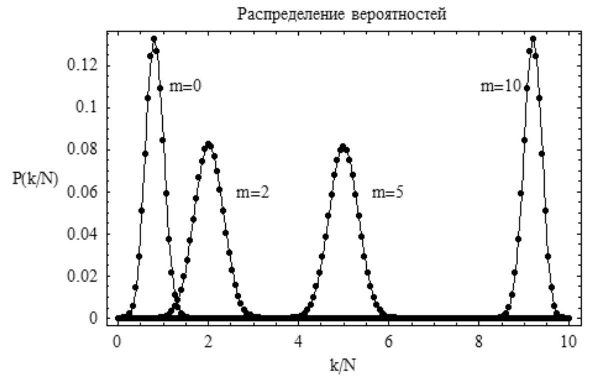

Рис. 8. Графики вероятностей $P(k/N)$, $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 10$, $N = 15$

В заключение для полноты картины рассмотрим зависимость дисперсии и среднего квадратичного отклонения от параметра m (рис. 9 и 10 соответственно).

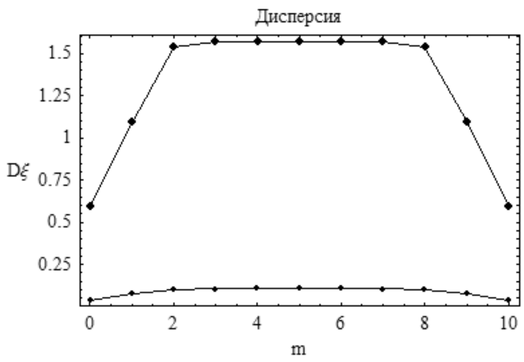

Рис. 9.

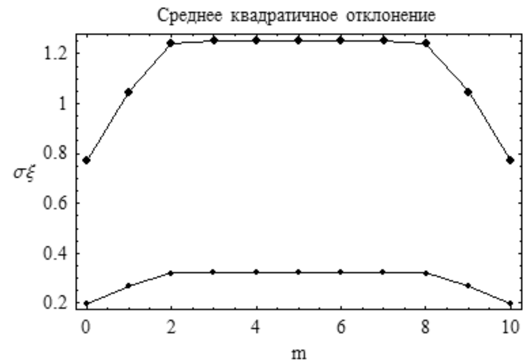

Рис. 10

Дисперсия (рис. 9) и среднее квадратичное отклонение (рис.10), $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 10$, $N = 1$ и 15.

На рис. 9 и 10 верхние кривые соответствуют $N = 1$ (дисперсии исходного распределения), нижние кривые $N = 15$. Как видно из рис. 10, значения среднеквадратичных отклонений вполне приемлемы.

Для вычислений дисперсий использовались хорошо известные формулы:

$$D\xi = \varphi'(1) + \varphi''(1) - (\varphi'(1))^2 \text{ при } N = 1$$

и

$$D\xi_\Sigma = \phi'(1) + \phi''(1) - (\phi'(1))^2 \text{ при } N = 15,$$

причем $\sigma\xi = \sqrt{D\xi}$, а $\sigma\xi_\Sigma = \sqrt{D\xi_\Sigma}$.

При больших значениях N ($N = 15$ вполне достаточно) справедлива центральная предельная теорема и, как видно из рис. 8, итоговое распределение переходит в нормальное $f_N(k)$. Как видно из рис. 11, отклонение итогового распределения от гауссового незначительно.

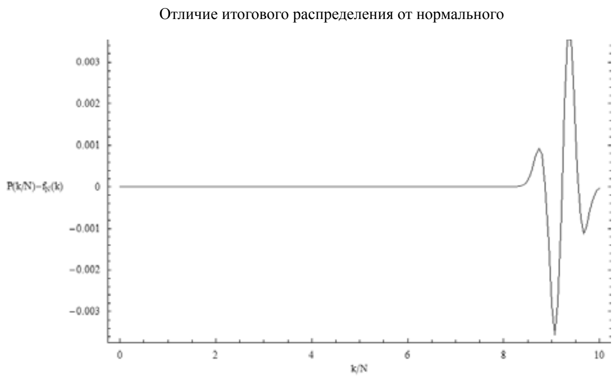

Рис. 11. График отличия вероятностей $P(k/N) - f_N(k)$, $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 10$, $N = 15$

Таким образом, в настоящей работе, являющейся продолжением работ [1; 2; 4; 5] предложена математическая модель эксперта, проводящего оценку по достаточно длинной n-балльной шкале. При этом учитывается возможность случайного выбора из равновероятных оценок. Обоснована введенная для этой цели в работе функция распределения. Проанализированы параметры функции распределения, отвечающие за число равновероятных оценок и крутизну склонов. Исследованы характеристическая функция, математическое ожидание и дисперсия. Рассмотрен случай привлечения к оценке N экспертов. Исследована связь математического ожидания и оцениваемого параметра и указан метод определения (корректировки) оцениваемого параметра по математическому ожиданию.

Литература

1. Крюковский А.С., Лебедева Т.В. Математическая модель процессов хранения, передачи и потери конфиденциальной информации. Дискретный и непрерывный случаи // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2012. – № 11. – С. 32–39.

2. Крюковский А.С., Лебедева Т.В. Математическая модель процессов хранения, пере-

дачи и потери конфиденциальной информации // Вестник Марийского государственного технического университета. Серия «Радиотехнические и инфокоммуникационные системы». – Йошкар-Ола: МарГТУ, 2012. – № 1 (14). – С. 25–36.

3. Крюковский А.С., Лебедева Т.В. Исследование группы экспертов, оценивающих процесс хранения и передачи конфиденциальной информации // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2013. – Т. 7. – № 11. – С. 130–135.

4. Крюковский А.С., Лебедева Т.В. Методика оценки рисков утери конфиденциальной информации в компании. // Вестник Российского нового университета. – 2011. – Выпуск 4. Управление, вычислительная техника и информатика. – С. 55–63.

5. Крюковский А.С., Лебедева Т.В. Математическое моделирование процесса хранения и передачи конфиденциальной информации // Вестник Российского нового университета. – 2012. – Выпуск 4. Управление, вычислительная техника и информатика. – С. 93–100.

6. Крюковский А.С., Лебедева Т.В., Скородумов Б.И. Программно-аналитический комплекс для экспертных оценок стоимости конфиденциальной информации // Материалы X Международной научно-методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии». Воронеж, 11–12 февраля 2010 г. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского ГУ, 2010. – Т. 1.– С. 384–387.