УДК 330.34; 330.4

Л.В. Лабунец[1]
Е.Л. Лабунец[2]
Н.Л. Лебедева[3]

ЭКСПЕРТНАЯ МОДЕЛЬ СКОРИНГА БИРЖЕВЫХ АКТИВОВ

L.V. Labunets
E.L. Labunets
N.L. Lebedeva

AN EXPERT SCORING MODEL STOCKS

В статье представлена экспертная модель скоринга ценных бумаг на примере российских акций в виде системы фундаментальных показателей деятельности компаний. Рассмотрены процедуры оценки весов важности финансовых мультипликаторов на основе метода парных сравнений Саати. Для случая трех классов значимости факторов рассмотрен новый, геометрически интерпретируемый показатель согласованности элементов матрицы парных сравнений. Согласование мнений экспертов предложено выполнять на основе релаксационных алгоритмов решения системы линейных неравенств.

Ключевые слова: *фундаментальный анализ, финансовые мультипликаторы, скоринг акций, метод анализа иерархий, матрица парных сравнений, релаксация системы линейных неравенств, показатель согласованности.*

The expert scoring model securities is presented. As examples are the Russian shares in the form of the fundamental performance of companies. Procedures for the evaluation of the importance weights of the financial multiplies based on Saaty's paired comparison method are showed. In case of three classes of the factors importance, a new geometrically interpreted index of consistency is suggested for the elements of pairwise comparisons matrix. The experts opinions are invited to coordinate with the help of relaxation algorithms for solving a system of linear inequalities.

Keywords: *fundamental analysis, financial multiples, scoring stocks, hierarchy analysis method, pairwise comparisons matrix, the relaxation for system of linear inequalities, consistency index.*

Введение

Существенной проблемой является значительная доля неопределенности результатов анализа ценных бумаг (ЦБ), обусловленная необходимостью учета большого количества факторов и выбора параметров в рамках фундаментального и технического анализа ЦБ. Один из вариантов решения этой проблемы основан на применении фундаментальных методов теории принятия решений [1; 2]. Рациональное инвестирование – это, в конечном итоге, разумный компромисс между доходностью и риском вложений в биржевые активы. Надежной методической основой такого рода компромисса является цепочка предпочтений инвестора, полученная на основе базы знаний экспертов-аналитиков. Обоснованный выбор приоритетов позволяет, в свою очередь, сформировать иерархическую структуру факторов доходности и рисков инвестирования. Экспертное оценивание весов значимости подобных мультипликаторов позволяет ранжировать активы по их инвестиционной привлекательности.

Одна из проблем экспертного оценивания в теории принятия решений состоит в противоречивости мнений экспертов, выраженная в несогласованности элементов матрицы парных сравнений в методе анализа иерархий Томаса Саати [1; 2]. В статье представлена методика оптимального выбора весов значимости факторов, входящих в состав экспертной модели инвестиционного качества ЦБ. Для конкретизации дальнейшего анализа, не ограничивающего общности предложенной методики, рассмотрена цепочка предпочтений инвестора, основанная на

[1] Доктор технических наук, старший научный сотрудник, зав. кафедрой информационных систем в экономике и управлении НОУ ВПО «Российский новый университет», профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана.

[2] Специалист отдела технического обеспечения Управления банковских информационных технологий ОАО «Национальный Корпоративный Банк».

[3] Главный специалист Департамента информационных технологий ОАО «Банк ВТБ».

фундаментальном анализе актива, в частности – мультипликативным методом расчета справедливой цены ЦБ.

1. Экспертная модель скоринга российских акций

Под скорингом ЦБ понимают комплексную оценку инвестиционного качества биржевых активов, которая позволяет:

• ранжировать эмитентов по их инвестиционной привлекательности в пределах выделенной группы, сектора или отрасли экономики;

• формировать рекомендации о покупке/продаже или удержании актива.

Экспертная модель инвестиционного качества ЦБ может представлять собой систему фундаментальных финансовых показателей деятельности компаний. Введем следующие обозначения: ***P*** – капитализация; ***S*** – выручка; ***E*** – чистая прибыль; ***EBITDA*** – прибыль до уплаты налогов, процентов и амортизации; ***EV*** – стоимость компании, т.е. сумма капитализации и денежных средства за вычетом долговых обязательств. Оценку инвестиционной привлекательности эмитента выполняют с помощью множества различных коэффициентов и параметров [3]. Для конкретизации дальнейшего анализа рассмотрим следующие основные фундаментальные показатели (мультипликаторы):

1) ***P/E*** – отношение цены акции к прибыли. Этот коэффициент имеет наибольший вес в мультипликаторном методе. Он позволяет практически сразу получить оценки расчетной стоимости компании;

2) ***EV/EBITDA*** – отношение стоимости компании к прибыли до уплаты налогов, процентов и амортизации;

3) ***P/S*** – отношение цены акции к доходу компании за год. Этот показатель показывает, сколько инвестор платит за каждый доллар реализации компании;

4) **ROE** – отношение чистой прибыли компании к среднегодовой величине акционерного капитала. Показатель рентабельности собственного капитала.

Экспертная модель инвестиционного качества российских ЦБ учитывает следующие особенности российского фондового рынка [4]:

• **Низкая капитализация**. По последним данным НАУФОР, капитализация российских акционерных обществ в 2012 г. составила 817 млрд долларов. Не более десятка российских компаний обладают средней или высокой капитализацией по масштабам американского рынка. Большинство российских компаний по критерию капитализации – мелкие.

• **Диспропорция капитала**. На российском биржевом рынке количество эмитентов в 2012 г. составило 275 компаний. При этом на долю десяти наиболее ликвидных эмитентов приходилось 84,5% от суммарного объема торгов, причем до половины этого оборота приходится на акции ОАО «Сбербанк России» и ОАО «Газпром».

• **Отраслевая диспропорция**. Подавляющее большинство российских акций – это бумаги топливно-энергетического комплекса и связи. Практически не представлены все остальные отрасли: торговля, машиностроение, химия, металлургия и др. Достаточно наглядно эту особенность демонстрирует чрезвычайно высокая положительная корреляция котировок индекса РТС и цен на нефть марки Brent в период с 2007 г. по 2010 г. (рис. 1).

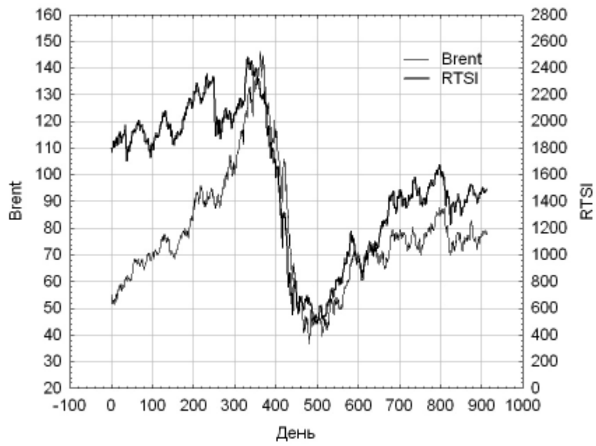


Рис. 1. Сильная положительная корреляция индекса РТС и нефтяных котировок в период с 2007 г. по 2010 г.

• **Техническая слабость**. Российский фондовый рынок существенно зависит от фондовых рынков США и Юго-Восточной Азии. Котировки индексов RTS и S&P500 демонстрируют высокую положительную корреляцию (рис. 2). Следствием технической слабости является большая волатильность и фактически непрогнозируемая доходность российских акций.

Система оценки инвестиционной привлекательности ЦБ и соответствующие торговые рекомендации должны опираться на экспертную модель предпочтений инвестора в виде набора фундаментальных показателей эмитента. Применительно к российскому фондовому рынку такую шкалу предпочтений рационально представить в виде трех групп факторов [4]:

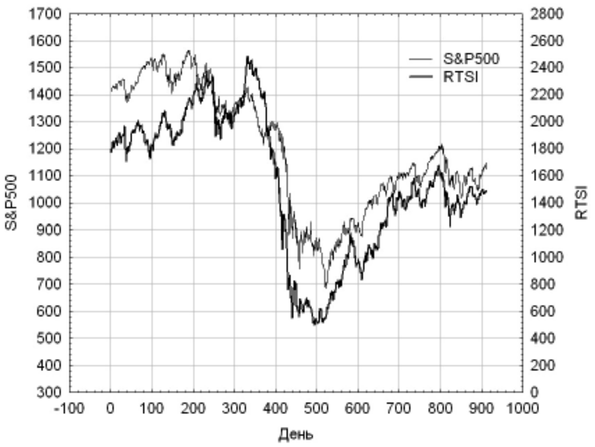


Рис. 2. Сильная положительная корреляция индекса РТС и индекса S&P500 в период с 2007 г. по 2010 г.

доходность $\succ$ **надежность** $\succ$ **эффективность** в порядке убывания их значимости (рангов). В такой системе учтено, что инвестиции в российские акции – это заведомо рискованные вложения.

Прежде всего инвестор рассчитывает на недооценку российских ЦБ и спекулятивный рост их курсовой стоимости. С этой точки зрения отношение рыночной цены акции ***P*** к доходам компании за год ***E*** в расчете на одну акцию, т.е. фактор X_1 = ***P/E*** (Price to Earnings ratio) в долях – является главным. Этому фактору целесообразно присвоить высший ранг по шкале натуральных чисел, т.е. $r_1 = 1$.

Вторым по значимости является риск дефолта эмитента. Инвестор предпочитает иметь дело с компаниями, которые находятся на подъеме и занимают ощутимую долю на рынке. Поэтому во второй группе целесообразно учесть фактор X_2 = ***EV/EBITDA*** в долях. Этому фактору целесообразно присвоить средний ранг, т.е. $r_2 = 2$.

Необходимым условием роста курсовой стоимости ЦБ является рост валового дохода и эффективное управление компанией. Поэтому в третьей группе целесообразно учесть следующие факторы:

- отношение рыночной цены акции и продаж X_3 = ***P/S*** (Price to Sales ratio) в долях, которое рассчитывается как отношение рыночной цены акции ***P*** к валовому доходу компании за год ***S*** в расчете на одну акцию;
- рентабельность собственного капитала (отдача на капитал) X_4 = ***ROE*** (Return on Equity) в процентах годовых, т.е. чистые годовые доходы в расчете на одну акцию.

Этой группе факторов целесообразно присвоить наименьший ранг, т.е. $r_3 = 3$. В итоге экспертная модель скоринга российских акций в рамках системы выбранных факторов имеет вид:

$$X_1 \succ X_2 \succ X_3 \approx X_4, \qquad (1)$$

где символы $\succ$ и $\approx$ означают отношения бóльшего предпочтения и эквивалентности показателей.

2. Экспертное оценивание значимости показателей инвестиционного качества ценных бумаг

Шкалу предпочтений (1) удобно формировать с помощью процедуры экспертного оценивания, которое представляет собой процесс сравнения факторов по их инвестиционной значимости. Одним из широко применяемых на практике методов экспертного оценивания является взвешивание факторов методом анализа иерархий (парных сравнений) Томаса Саати [1; 2].

Пусть шкала предпочтений состоит из N лингвистических групп важности исходных факторов инвестиционного качества ценных бумаг и n-я текущая группа $\left(n = \overline{1;N}\right)$ содержит $\left(K_n - K_{n-1}\right)$ мультипликаторов, причем $K_0 = 0$. Для каждой группы показателей определим нормированный вес $w_n > 0$. Условие нормировки имеет вид:

$$K_1 w_1 + \left(K_2 - K_1\right) w_2 + \cdots + \left(K_N - K_{N-1}\right) w_N = 1. \qquad (2)$$

Сформируем обратно симметричную матрицу, содержащую N блоков относительных весов

$$V = \begin{pmatrix} [1] & [v_{12}] & \cdots & [v_{1N}] \\ [v_{21}] & [1] & \cdots & [v_{2N}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [v_{N1}] & [v_{N2}] & \cdots & [1] \end{pmatrix}.$$

Текущий (n,m)-й блок $\left[v_{nm}\right]$ размером $\left(K_n - K_{n-1}\right)\times\left(K_m - K_{m-1}\right)$ содержит одинаковые элементы, равные отношению весов значимости соответствующей пары групп факторов

$$v_{nm} = w_n / w_m, \ \forall n,m = \overline{1;N}.$$

Ясно, что элементы блоков, расположенных симметрично относительно главной диагонали матрицы, являются обратными по отношению друг к другу:

$$v_{mn} = 1 / v_{nm}, \ \forall n,m = \overline{1;N}\cdot \qquad (3)$$

Блоки матрицы V обладают свойством согласованности, т.е.

$$v_{nm} v_{mk} = \frac{w_n}{w_m} \times \frac{w_m}{w_k} = \frac{w_n}{w_k} = v_{nk} \ ,$$

$$\forall n, m, k = \overline{1; N} . \qquad (4)$$

Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы число факторов K_N и блочный вектор – столбец весов

$$\left(\underbrace{w_1, \ldots, w_1}_{K_1} \vdots \underbrace{w_2, \ldots, w_2}_{(K_2 - K_1)} \vdots \cdots \vdots \underbrace{w_N, \ldots, w_N}_{(K_N - K_{N-1})} \right)^T$$

являлись, соответственно, наибольшим собственным значением и главным собственным вектором матрицы V [1; 2].

Процедура экспертного оценивания состоит в формировании коллективом экспертов элементов матрицы парных сравнений. Элементы v_{nm} (n, m)-го блока матрицы V фактически показывают, во сколько раз значимость факторов, входящих в n-й блок, превосходит значимость факторов, входящих в m-й блок.

В силу свойства (3) при формировании матрицы парных сравнений достаточно определить элементы для $N(N-1)/2$ ее блоков, находящихся по одну сторону от главной диагонали. Элементы блоков на главной диагонали равны единице.

Человек, в силу своих психофизиологических возможностей, может уверенно различать не более девяти градаций признаков. Для парного сравнения относительной важности факторов Саати предложил шкалу лингвистических оценок [1; 2], представленную в таблице 1.

Таблица 1

Лингвистические оценки относительной важности

Лингвистическая оценка	**Количественная оценка**
Равнозначны	1
Слабое превосходство	3
Сильное превосходство	5
Очень сильное превосходство	7
Абсолютное превосходство	9

Значения 2, 4, 6 и 8 – характеризуют переходные случаи.

Для предложенных экспертами лингвистических оценок v_{nm} относительной важности финансовых мультипликаторов условие (4) выполняется довольно редко. В такой ситуации мнения экспертов рационально согласовывать на основе оптимального выбора весов значимости показателей [5; 6]. В рамках такого подхода критерием оптимальности вектора весов $\vec{W} = (w_1, \ldots, w_N)^T$ является минимум среднего квадрата ошибки для аппроксимации матрицы парных сравнений

$$\vec{W}_{opt} = \arg\min_{\vec{W}} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^{N} L_{nm} \left\{ (v_{nm} w_m - w_n)^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (v_{mn} w_n - w_m)^2 \right\} \right),$$

где $L_{nm} = (K_n - K_{n-1})(K_m - K_{m-1})$ – количество элементов (n, m)-го блока матрицы парных сравнений. Решение указанной выше задачи квадратичного программирования приводит к системе линейных нормальных уравнений

$$A\vec{W} = 0 . \qquad (5)$$

Выражения для расчета элементов проецирующей матрицы $A = \{ a_{nm} \} \Big|_{n=\overline{1,N}}^{m=\overline{1,N}}$ представлены в Приложении 1.

3. Компромиссное решение

В силу несогласованности мнений экспертов проецирующая матрицу A является, как правило, сингулярной – и система уравнений (5) несовместна. Рассмотрим геометрическую интерпретацию этой проблемы. С этой целью проецирующую матрицу представим в блочной форме $A = \left(\vec{A}_1^T \vdots \cdots \vdots \vec{A}_N^T \right)^T$. Текущая вектор-строка $\vec{A}_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nN})$, $n = \overline{1; N}$ матрицы задает ориентацию гиперплоскости $\vec{p}_n \vec{W} = 0$ в пространстве весов $(w_1, \ldots, w_N)$. Здесь $\vec{p}_n = \vec{A}_n / \| \vec{A}_n \|$ – орт нормали к указанной выше гиперплоскости, а $\| \vec{A}_n \|$ – норма Евклида вектора $\vec{A}_n$. Если все вектора $\vec{p}_n$, $n = \overline{1; N}$ нормалей к гиперплоскостям лежат в одной гиперплоскости, то система уравнений (5) имеет решение. Иными словами, если матрица A имеет ранг 2, то существует прямая линия в пространстве весов, через которую проходят все гиперплоскости. Вектор $\vec{W}$, лежащий на этой линии и нормированный в соответствии с условием (2), является оптимальной экспертной оценкой весов.

В противном случае система уравнений (5) несовместна и проблему экспертного оценивания рационально сформулировать как задачу поиска компромиссного решения [7] для следующей системы линейных неравенств (СЛН):

$$\begin{cases} \vec{p}_1 \vec{W} - \varepsilon < 0; \\ -\vec{p}_1 \vec{W} - \varepsilon < 0; \\ \vdots \\ \vec{p}_N \vec{W} - \varepsilon < 0; \\ -\vec{p}_N \vec{W} - \varepsilon < 0; \\ -w_1 < 0; \\ \vdots \\ -w_N < 0; \\ -w_1 + w_2 < 0; \\ \vdots \\ -w_{N-1} + w_N < 0. \end{cases}$$

Первый блок из $2N$ неравенств учитывает ограничения $\left| \vec{p}_1 \vec{W} \right| < \varepsilon$, $n = 1; N$ на заданную исследователем, как правило, неизбежную погрешность $\varepsilon > 0$ решения системы уравнений (6). Второй блок, содержащий N неравенств, учитывает требование положительности весов. Третий блок, состоящий из $(N-1)$ неравенств, контролирует условие убывания весов из последовательных групп значимости факторов. СЛН удобно записать в матричной транскрипции:

$$Q\vec{W} + \vec{Y} < 0 . \qquad (6)$$

В состав блочной матрицы $Q = \left(P^T \vdots - P^T \vdots - I^T \vdots J^T \right)^T$ размером $(4N-1) \times N$ входят следующие объекты: $P = \left(\vec{p}_1^{\,T} \vdots \cdots \vdots \vec{p}_N^{\,T} \right)^T$ и I-блочная и единичная матрицы размером $N \times N$;

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

– двухдиагональная ленточная матрица размером $(N-1) \times N$. Блочный вектор – столбец $\vec{Y} = \left(-\vec{E}^T \vdots - \vec{E}^T \vdots \vec{Z}^T \right)^T$ – размером $(4N-1)$ формирует следующие объекты: $\vec{E} = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)^T$ – вектор – столбец длиною N; $\vec{Z} = (0, \ldots, 0)^T$ – вектор – столбец, содержащий $(2N-1)$ нулей.

Поиск компромиссного решения несовместной СЛН выполняют с помощью алгоритмов стационарной релаксации, основанной на линейных условиях дополнительности [7]:

$$\begin{cases} B\vec{R} \ge Q\vec{W} + \vec{Y}; \\ \vec{R} \ge 0; \\ \vec{R}^T B \vec{R} = \vec{R}^T \left(Q\vec{W} + \vec{Y} \right). \end{cases}$$

Здесь $\vec{R} = (r_1, \ldots, r_{4N-1})^T$ – вектор – столбец релаксационных переменных длиною $(4N-1)$; B – весовая матрица потерь размером $(4N-1) \times (4N-1)$. Релаксационные переменные выбирают из условий минимума возможных потерь $\vec{R}_{opt} = \arg\min\limits_{\vec{R}} \left\{ \vec{R}^T \left(Q\vec{W} + \vec{Y} \right) \right\}$, что дает двойственную систему уравнений $Q^T \vec{R} = 0$. Алгоритм поиска компромиссного решения, реализующий метод последовательных приближений, представлен в Приложении 2.

4. Вычислительный экперимент

В качестве примера, иллюстрирующего представленную выше методику экспертного оценивания, выполнялись следующие расчеты. В соответствии со шкалой предпочтений (1) вычислялись веса Фишберна [8] значимости финансовых мультипликаторов российских акций. Откуда, для величин $N = 3$, $K_N = 4$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ и $r_3 = 3$ были получены начальные оценки весов $w_1^f = 0,4$, $w_2^f = 0,3$, $w_3^f = 0,2$ и их значения $w_1[0] = 0,363$, $w_2[0] = 0,273$, $w_3[0] = 0,182$, учитывающие условие нормировки (2).

В соответствии с лингвистической шкалой Саати анализировалась следующая согласованная матрица парных сравнений:

$$V_C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 1/3 & 1 & 5/3 & 5/3 \\ 1/5 & 3/5 & 1 & 1 \\ 1/5 & 3/5 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Этой матрице отвечали веса значимости факторов, удовлетворяющие равенствам $w_2 = w_1/3$ и $w_3 = w_1/5$, т.е. $w_1 = 1$, $w_2 = 1/3$ и $w_3 = 1/5$. Последующая нормировка $w_1 + w_2 + 2w_3 = 1$ дала контрольные значения для компонентов вектора весов $\vec{W} = (0,577 \quad 0,192 \quad 0,115)^T$.

Отметим, что полученные величины с учетом условия нормировки (2) совпадают с геометрически интерпретируемой оценкой:

$$\vec{W}_{avr} = \frac{1}{3}\left(\vec{W}_{12} + \vec{W}_{13} + \vec{W}_{23} \right), \qquad (8)$$

где $\vec{W}_{nm} = \vec{P}_{nm} / \left\| \vec{P}_{nm} \right\|$; $\vec{P}_{nm} = \left[\vec{p}_n \times \vec{p}_m \right]$ – векторное произведение. Каждое из слагаемых в указанной выше формуле представляет собой орт, принадлежащий паре плоскостей, ориентация которых в трехмерном пространстве весов определяется нормалями $\vec{p}_n$ и $\vec{p}_m$. Оценка (8) приобретает смысл вектора весов, усредненного по всем парам плоскостей, т.е. по парам строк проецирующей матрицы *A*. В рамках такого представления согласованность матрицы парных сравнений в случае трех классов значимости факторов уместно измерять показателем

$$EGV(\alpha) = \exp\left\{ -\left(Sp_{avr}\right)^{1/\alpha} \right\}, \qquad \alpha \ge 2 .$$

Здесь след

$$Sp_{avr} = \frac{1}{3}\left(D_{12} + D_{13} + D_{23} \right),$$

$$D_{nm} = \left\| \vec{W}_{nm} - \vec{W}_{avr} \right\|^2$$

«ковариационной» матрицы ортов $\vec{W}_{nm}$ – это аналог выборочной оценки обобщенной дисперсии (Generalized Variance) [9, с. 154]. Иными словами, мера согласованности мнений экспертов $EGV \in [0,1]$ обратно пропорциональна степени рассеяния $Sp_{avr} \in [0,\infty)$ ортов $\vec{W}_{nm}$ в пространстве весов. Для согласованной матрицы парных сравнений (7) выполняется равенство $\vec{P}_{12} \equiv \vec{P}_{13} \equiv \vec{P}_{23}$, т.е. три плоскости пересекаются по одной прямой линии, проходящей через начало координат пространства весов. Соответственно критерий (10) принимает значение $EGV(\alpha) \equiv 1$, что указывает на абсолютную согласованность этой матрицы.

Предложенное Саати отношение согласованности (Ratio Consistency) матрицы (7) принимает значение:

$RC = IC/IR = 1{,}485 / 0{,}89 = 1{,}67 >> 0{,}08$, что указывает на несовершенство такого рода показателя [10, 11]. Здесь $IC = \left(\lambda_{\max} - K_N \right) / \left(K_N - 1 \right)$ – индекс согласованности (Index Consistency) экспертных оценок относительных весов значимости v_{nm}, $\forall n,m = 1;N$ факторов; $\lambda_{\max} = 8{,}454$ – наибольшее собственное значение матрицы V_C; *IR* – значение индекса *IC*, усредненное по достаточно большому количеству случайно сгенерированных относительных весов.

Альтернативный количественный показатель согласованности матрицы парных сравнений (8) рассчитывался с помощью методики анализа транзитивности предпочтений для троек факторов X_n, X_m, X_k, $\forall n,m,k = 1;K_N$, представленной в работе [11] по формуле:

$$C = 1 - \frac{1}{s_{\max} \ln^2\left(v_{\max}\right)} \sum_{n=1}^{K_N-2} \sum_{m=n+1}^{K_N-1} \sum_{k=m+1}^{K_N} \ln^2\left(v_{nm} v_{mk} v_{kn} \right), \quad (10)$$

где

$$s_{\max} = \begin{cases} \dfrac{K_N^3 - K_N^2}{2}, & K_N - \textit{нечетное}, \\ \dfrac{K_N^3 - K_N^2}{2} - K_N, & K_N - \textit{четное} \end{cases};$$

$v_{\max} = 9$ – наибольшее значение кратности предпочтений, выбранное в соответствии со шкалой лингвистических оценок Саати (таблица 1).

Подстановка соответствующих числовых значений в указанную выше формулу дала:

$$C = 1 - \frac{1}{96{,}556} \Big\{ \ln^2\left(v_{12} v_{23} v_{31}\right) + \ln^2\left(v_{12} v_{23} v_{41}\right) + \\ + \ln^2\left(v_{13} v_{34} v_{41}\right) + \ln^2\left(v_{23} v_{34} v_{42}\right) \Big\} = 0{,}985,$$

что также подтверждает практически абсолютную согласованность элементов матрицы (7).

Поиск компромиссного решения СЛН (6) выполнялся для единичной матрицы потерь *B*, что соответствует методу наименьших квадратов [7], а также абсолютной и относительной погрешностей соответственно решения системы линейных нормальных уравнений (5) $\varepsilon = 0{,}001$ и поиска компромиссного решения $\delta = 0{,}001$.

Сходимость алгоритма стационарной релаксации к компромиссному решению за пять итераций по критерию δ демонстрируют рис. 3–5. Рисунок 3 иллюстрирует сходимость левых частей $\vec{p}_n \vec{W}[i]$, $n = 1, 2, 3$ системы линейных нормальных уравнений (5) к нулю. Были получены следующие финальные невязки: $\vec{p}_1 \vec{W}[5] = -0{,}000627$, $\vec{p}_2 \vec{W}[5] = 0{,}001333$, $\vec{p}_3 \vec{W}[5] = 0{,}000078$.

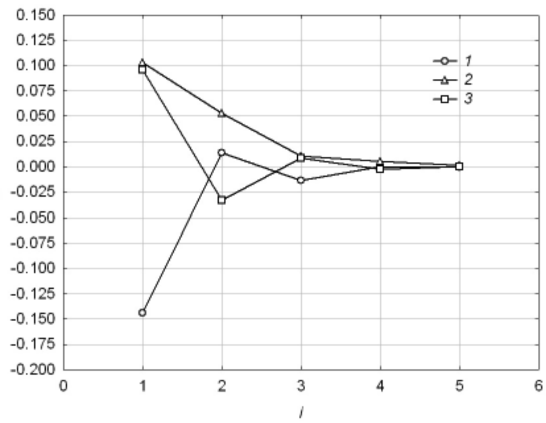


Рис. 3. Сходимость левых частей $e_n[i]$ системы линейных уравнений для согласованной матрицы парных сравнений: *1* – *n* = 1, *2* – *n* = 2, *3* – *n* = 3

На рис. 4 представлен процесс уменьшения шага коррекции $S[i]=\left\|\vec{R}\right\|^2 / \left\|\Delta\vec{W}[i]\right\|$ компромиссного решения по итерациям $i = 1, 2, \ldots, 5$.

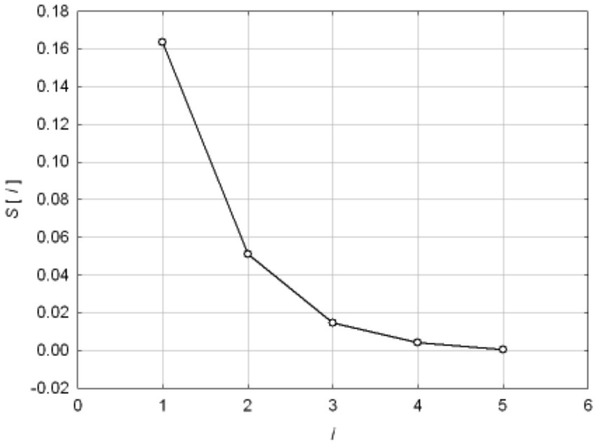


Рис. 4. Зависимость шага коррекции от итераций алгоритма стационарной релаксации для согласованной матрицы парных сравнений

Процесс сходимости весов значимости финансовых мультипликаторов демонстрирует рис. 5. Финальные оценки весов $w_1[5]=0{,}575$, $w_2[5]=0{,}194$, $w_3[5]=0{,}115$ идеально согласуются с контрольными величинами.

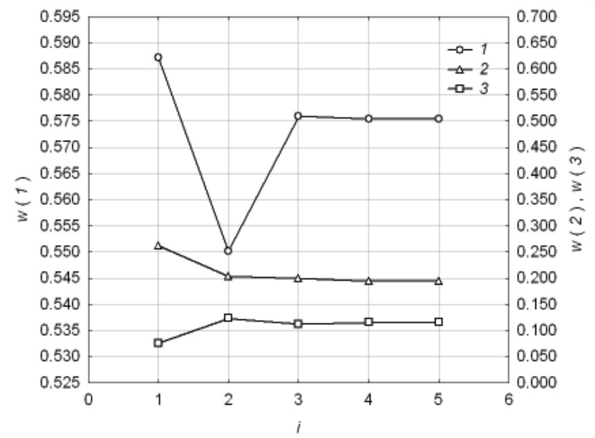


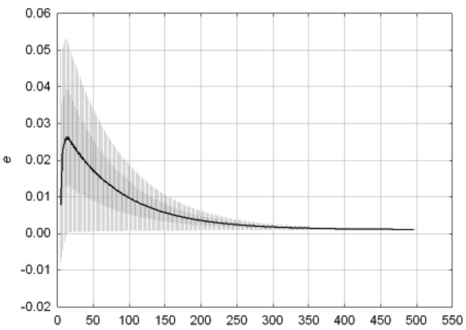
Рис. 5. Сходимость весов значимости факторов к оптимальным значениям для согласованной матрицы парных сравнений: *1* – $w_1[i]$, *2* – $w_2[i]$, *3* – $w_3[i]$

Анализировались экспертные оценки весов значимости факторов для несогласованной матрицы парных сравнений следующего вида:

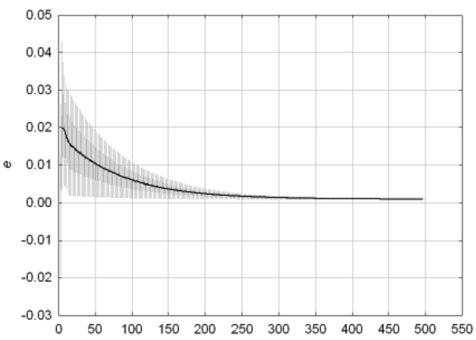
$$V_{NC}=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1 & 7 & 7 \\ 1/3 & 1/7 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/7 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Количественные показатели согласованности этой матрицы, рассчитанные по формулам (9) и (10), приняли значения $EGV(2)=0{,}893$ и $C=0{,}838$, соответственно.

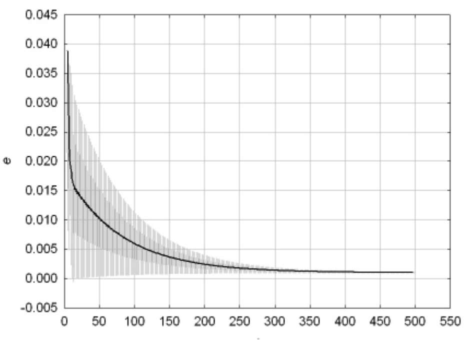
Сходимость алгоритма стационарной релаксации к компромиссному решению за пятьсот итераций по критериям $\varepsilon=0{,}001$ и $\delta=0{,}001$ для единичной матрицы потерь демонстрируют рис. 6 – 8. Рисунки 6 и 7 показывают соответственно, сходимость практически к нулю осциллирующих невязок левых частей системы уравнений (5) и процесс уменьшения шага коррекции $S[i]$. Толстые линии на рис. 6 – это результат применения простой скользящей средней с интервалом сглаживания 2 по итерациям i обучения весов.



а)



б)



в)

Рис. 6. Невязки левых частей $e_n[i]$ системы линейных уравнений для несогласованной матрицы парных сравнений: а) – $n = 1$, б) – $n = 2$, в) – $n = 3$

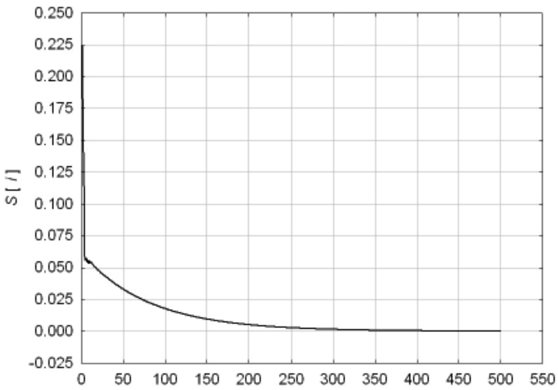
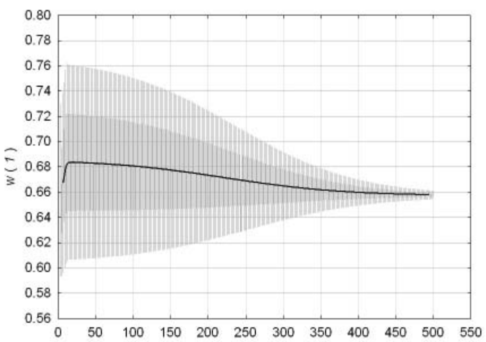
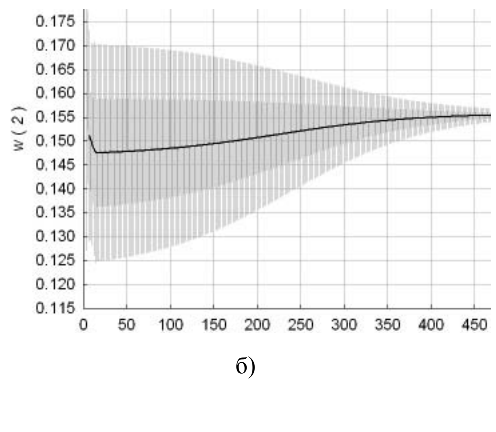


Рис. 7. Зависимость шага коррекции от итераций
алгоритма стационарной релаксации
для несогласованной матрицы парных сравнений

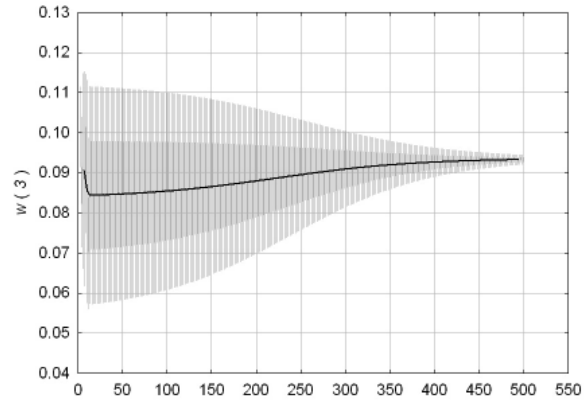
Уменьшение осцилляций в оценках по мере сходимости весов значимости факторов к оптимальным значениям наглядно иллюстрирует рис. 8. Толстые линии на рисунках – это результат применения простой скользящей средней с интервалом сглаживания 2 по итерациям *i* обучения весов. В результате были получены следующие оптимальные оценки $w_1[500]$ = 0,661, $w_2[500]$ = 0,1546, $w_3[500]$ = 0,0922. Этим значениям соответствуют следующие величины невязок $\vec{p}_1\vec{W}\left[500\right]=0{,}001$, $\vec{p}_2\vec{W}\left[500\right]=0{,}0011$, $\vec{p}_2\vec{W}\left[500\right]=0{,}0011$ левых частей системы уравнений (5).



а)



б)



в)

Рис. 8. Сходимость весов значимости факторов к
оптимальным оценкам
для несогласованной матрицы парных сравнений:
а) – $w_1\left[i\right]$, *б)* – $w_2\left[i\right]$, *в)* – $w_3\left[i\right]$

Также отметим, что полученные величины весов хорошо согласуются с геометрически интерпретируемой оценкой, рассчитанной по формуле (8), а именно: $w_1=0{,}654$, $w_2=0{,}158$, $w_3=0{,}094$.

Меру несогласованности мнений экспертов и результаты оптимизации весов значимости факторов с помощью алгоритма стационарной релаксации удобно анализировать методом Grand Tur [12] динамической визуализации многомерных данных. В качестве примера такого анализа для несогласованной матрицы парных сравнений (11) на рис. 9 представлена ортогональная проекция точек в трехмерном пространстве весов на картинную плоскость.

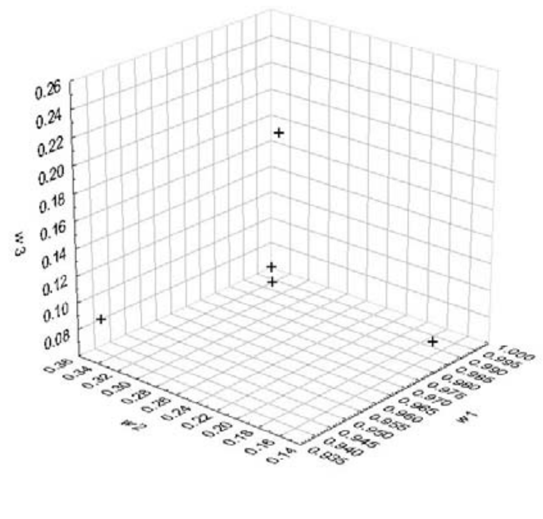


Рис. 9. Точки, отображающие орты в проекции на
картинную плоскость

Эта плоскость перпендикулярна орту $\vec{W}_{avr}$, отображенному центральной точкой. Три точки, расположенные на периферии, отображающие ориентацию ортов $\vec{W}_{12}$, $\vec{W}_{13}$ и $\vec{W}_{23}$, наглядно демонстрируют степень их рассеяния, т.е. меру несогласованности матрицы (11). Пятая точка, расположенная внутри треугольника, отображает компромиссное решение.

Заключение

В статье представлена методика экспертного оценивания весов значимости факторов методом парных сравнений Томаса Саати. На примере цепочки предпочтений инвестора в задаче скоринга российских акций показано, что проблему несогласованности мнений аналитиков рационально формулировать в терминах несовместной СЛН. Поиск компромиссного решения такой системы линейных неравенств с помощью алгоритмов стационарной релаксации позволяет получить оценки весов, оптимальные по критерию минимума для квадрата ошибки аппроксимации матрицы парных сравнений. В рамках такого подхода и трех классов значимости факторов предложен новый, геометрически интерпретируемый показатель согласованности элементов матрицы парных сравнений. В случае значительной несогласованности мнений экспертов алгоритм релаксации для СЛН обеспечивает сходимость к оптимальным значениям при наличии осцилляций текущих оценок весов.

Приложение 1. Формулы для расчета элементов проецирующей матрицы

$$a_{1m} = \begin{cases} \sum\limits_{k=2}^{N} L_{1k}\, u_{1k} & , m=1; \\ -L_{1m}\, u_{1m}\, v_{1m} & , m=\overline{2;N}, \end{cases}$$

$$a_{nm} = \begin{cases} -L_{mn}\, u_{mn}\, v_{mn} & , m=\overline{1;(n-1)}; \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} L_{kn}\, u_{kn}\, v_{kn}^2 + \sum\limits_{k=n+1}^{N} L_{nk}\, u_{nk} & , m=n;\, n=\overline{2;(N-1)}, \\ -L_{nm}\, u_{nm}\, v_{nm} & , m=\overline{(n+1);N}, \end{cases}$$

$$a_{Nm} = \begin{cases} -L_{mN}\, u_{mN}\, v_{mN}, & m=\overline{1;(N-1)}; \\ \sum\limits_{k=1}^{N-1} L_{kN}\, u_{kN}\, v_{kN}^2, & m=N, \end{cases} \qquad u_{nm} = 1+\frac{1}{v_{nm}^2}.$$

Приложение 2. Алгоритм поиска компромиссного решения

Шаг 0. Инициализация. В соответствии с экспертной моделью (1) в виде шкалы предпочтений показателей выбрать начальные значения весов значимости мультипликаторов по формуле Фишберна [8]. Нормировать веса:

$$w_n[0] = w_n^f \Big/ \sum_{m=1}^{N} \left(K_m - K_{m-1} \right) w_m^f ,$$
$$K_0 = 0, \quad n=\overline{1;N}.$$

С учетом лингвистической шкалы Саати (таблица 1) и мнений экспертов выбрать элементы матрицы V парных сравнений. Задать абсолютную $\varepsilon > 0$ и относительную $\delta > 0$ погрешности соответственно решения системы линейных нормальных уравнений (5) и поиска компромиссного решения. Выбрать веса штрафов в виде матрицы потерь B за нарушение неравенств системы (6). Задать наибольшее число итераций $I_{\max}$. Положить номер итерации $i = 0$.

Шаг 1. Цикл поиска $i = i + 1$. Вычислить степени жесткости неравенств:

$$\vec{R}[i] = B^{-1}\left(Q\vec{W}[i] + \vec{Y} \right)^{+}$$

и их евклидову норму $\left\| \vec{R}[i] \right\|$, где вектор $\left(Q\vec{W}[i] + \vec{Y} \right)^{+}$ имеет нулевые компоненты, если соответствующие компоненты вектора $\left(Q\vec{W}[i] + \vec{Y} \right)$ отрицательны, т.е. если соответствующие неравенства системы (6) выполняются.

Шаг 2. Вычислить вектор:
$\Delta\vec{W}[i] = -Q^T \vec{R}[i]$ коррекции компромиссного решения и его евклидову норму $\left\| \Delta\vec{W}[i] \right\|$.
Если $\left\| \Delta\vec{W}[i] \right\| \le \delta \left\| \vec{W}[i] \right\|$,
то решение получено за конечное число шагов. Это первый критерий завершения поиска.

Шаг 3. Вычислить шаг:
$S[i] = \left\| \vec{R} \right\|^2 \Big/ \left\| \Delta\vec{W}[i] \right\|$ коррекции и вектор $\vec{d}[i] = \Delta\vec{W}[i] \Big/ \left\| \Delta\vec{W}[i] \right\|$ направления коррекции. Обновить компромиссное решение

$$\vec{U}[i] = \left(u_1[i], \cdots, u_N[i] \right)^T = \vec{W}[i-1] + S[i]\, \vec{d}[i].$$

Шаг 4. Нормировать веса:

$$w_n[i] = u_n[i] \Big/ \sum_{m=1}^{N} \left(K_m - K_{m-1} \right) u_m[i],$$

$$K_0 = 0, \quad n=\overline{1;N}.$$

Шаг 5. Если $i \le I_{\max}$, то продолжить поиск компромиссного решения, начиная с ***Шага 1***. В противном случае закончить вычисления.

Литература

1. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати, пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1993. – 278 с.
2. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: аналитические сети / Т.Л. Саати, пер. с англ. – М. : Издательство ЛКИ, 2008. – 360 с.
3. Коттл С. «Анализ ценных бумаг» Грэма и Додда / С. Коттл, Р. Ф. Мюррей, Ф.Е. Блок, пер. с англ. – М. : ЗАО «Олимп-Бизнес», 2001. – 704 с.
4. Недосекин А.О. Фондовый менеджмент в расплывчатых условиях [Электронный ресурс] / А.О. Недосекин – СПб. : Сезам, 2003. – 200 с. – Режим доступа: http://sedok.narod.ru/index.html
5. Chu, A.T.W., Kalaba, R.E., Springarn, R.A Comparison of Two Methods for Determining the weights of Belonging to Fuzzy Sets // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1979. – Vol. 27. – N 4. – Pp. 531–538.
6. Fülöp, J., Koczkodaj, W.W., Szarek, S.J. A. Different Perspective on a Scale for Pairwise Comparisons // Transactions on computational collective intelligence. – 2010. – Vol. 1. – Pp. 71–84.
7. Булавский В.А. Методы релаксации для систем неравенств : учеб. пособие / В.А. Булавский; Новосиб. гос. ун-т им. Ленин. комсомола. – Новосибирск : НГУ, 1981. – 82 с.
8. Фишберн П. С. Теория полезности для принятия решений [Текст] / П. С. Фишберн, пер. с англ. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
9. Айвазян С.А. и др. Прикладная статистика: основы моделирования и первичная обработка данных: справочное изд. / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
10. Абаев Л.Ч. Об одном подходе к оценке непротиворечивости экспертной информации / Л.Ч. Абаев // Теория активных систем: труды Междунар. науч.-практ. конф. (17–19 ноября 2003, Москва, Россия): тез. докл. – М. : ИПУ РАН, 2003. – Т. 1. – С. 79 – 80.
11. Киселев И.С. Показатель согласованности количественных предпочтений в матрице парных сравнений / И.С. Киселев // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 5. – С. 22 – 24.

12 Buja, A., Cook, D., Asimov, D., Hurley, C. Theory and computational methods for dynamic projections in high-dimensional data visualizations // Journal of Computational and Graphical Statistics. 1999. – Vol. 8. – N 3. – Pp. 1 –24.