

А.И. Загайнов

СЛУЧАЙНОСТЬ ИЛИ ХАОТИЧНОСТЬ: ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИРОДЫ РЯДОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Рассматриваемая статья посвящена применению численного фрактального анализа к задаче обработки нестационарных временных рядов.

Принципиальным вопросом анализа временных последовательностей, отражающих динамику многих реальных процессов, является их нестационарность и наличие признаков хаотической динамики. Интерпретация указанных наблюдений как реализаций процессов динамического хаоса позволяет объяснить низкую эффективность диагностических схем, основанных на статистической обработке информации. Данный подход дает потенциальную возможность для построения нового класса прогностических индикаторов, базирующихся на концепции фрактальной математики.

Предложена методика идентификации природы стохастических и хаотических нелинейных процессов, порожденных нестационарными временными рядами наблюдений. Изучены фрактальные характеристики процессов. В частности, приведены кривые расходимости корреляционной размерности в зависимости от размерности фазового пространства. Проведен анализ сходимости фрактальной размерности на основе оценки аппроксимированной энтропии.

Представлен пример детерминированной динамики, для которого корреляционная размерность равна постоянной величине, а аппроксимированная энтропия – нулю. Показан вид соответствующего ему регулярного аттрактора и определены значения его параметров. Математическое описание последовательностей наблюдений на основе моделей динамического хаоса позволяет сформулировать задачу нелинейной классификации изучаемых временных рядов. Подобная классификация основана на новых мерах неопределенности и представляет основу для дальнейших фундаментальных исследований.

Ключевые слова: *детерминированный хаос, фазовое пространство, корреляционный интеграл, сходимость фрактальной размерности.*

A.I. Zagaynov

RANDOMNESS OR CHAOS: FRACTAL ANALYSIS OF THE NATURE OF SERIES OF OBSERVATIONS

The considered article is devoted to the disclosing numerical capabilities of fractal analysis in the processing of non-stationary time series.

The fundamental point of the analysis of time series is their unsteadiness and signs of chaotic dynamics. The interpretation of these observations, a realization of the process of dynamic chaos, lets explain the low efficiency of diagnostic procedures based on the statistical processing of information. This approach provides the potential to build a new class of prognostic indicators, based on the fractal mathematics concepts.

The method of identifying the nature of stochastic and chaotic non-linear processes generated by non-stationary time series observations is proposed. In the article the fractal characteristics of the processes is studied. In particular, the correlation dimension curves divergence depending on the dimension of the phase space are given, and a convergence analysis of fractal dimension based on an assessment of approximate entropy is performed.

We present an example of the deterministic dynamics for which the correlation dimension is equal to a constant value, and approximated entropy is zero. In the article we show a corresponding regular attractor and the values of its parameters. The mathematical description of sequences of observations on the basis of dynamic chaos models allows us to formulate the problem of non-linear classification of the studied time series. This classification is based on the new measures of uncertainty and provides the basis for further fundamental research.

Keywords: *deterministic chaos, phase space, correlation integral, convergence of fractal dimension.*

1. Введение

Большинство реальных процессов не являются детерминированными, т.е. содержат неопределенную составляющую, не допускающую точного прогноза. Основным средством математического описания таких процессов являлся подход, базирующийся на вероятностно-статистической парадигме.

Можно ли на основе наблюдений отличить случайный процесс от хаотического? При решении ряда прикладных задач этот вопрос имеет принципиальное значение. В частности, при анализе процессов, протекающих на электронных торговых площадках, вопрос о случайности временных рядов котировок торговых активов может привести к существенным изменениям в стратегии управления активами.

Вопросу о случайности динамики котировок были посвящены работы [1–5]. В то же время, авторы целого ряда работ, включающих в себя результаты численных исследований этого вопроса, указывают на наличие хаотичности в динамике рыночных котировок [6–11].

Под стохастическим, или случайным, процессом понимается последовательность случайных величин $\{X_t\}_{t \in T}$, индексированных параметрами времени или положения. Используя колмогоровскую аксиоматику, основанную на концепте вероятностного пространства $\langle \Omega, \Sigma, P \rangle$, где Ω – пространство элементарных событий, Σ – сигма-алгебра событий, P – вероятностная сигма-аддитивная мера, такая, что $P(\Omega) = 1$, определим случайный процесс как параметризованное семейство случайных отображений $X_t : \Omega \rightarrow R$, $t \in T$. При этом каждая реализация случайного процесса $X_t : T \rightarrow R$ априори не допускает точного прогноза. Тем не менее, при наличии определенных допущений можно сделать важные практические выводы об усредненной динамике изучаемого процесса и характеристиках рассеяния его значений. Наиболее распространенным, хотя и мало обоснованным предположением является гипотеза о постоянстве во времени вероятностной меры $P(t) = \text{const}$, т.е. о стационарности случайного процесса.

На практике в чистом виде стационарность найти крайне сложно. Однако простейшая аддитивная модель наблюдений вида $Y(t) = X(t) + v(t)$, где $X(t)$ – некоторая системная составляющая, отражающая закономерное изменение изучаемого процесса, а $v(t)$ – чисто случайная компонента, образованная стационарным случайным процессом, нашла широкое практическое применение. Иными словами, стационарности нет в реальных процессах, но ее можно выделить в виртуальных представлениях, используемых для решения задач наблюдения и управления.

Существенные изменения в анализе генезиса неопределенности произошли в середине XX столетия. Начались интенсивные исследования в области нелинейных динамических систем, позволившие выделить новую категорию неопределенности, описываемую моделью детерминированного (или динамического) хаоса [12–22].

Заметим, что переход от случайности к хаосу можно объяснить неизвестностью отображений (в том числе систем нелинейных дифференциальных уравнений), задающих состояние системы в определенный момент времени. Таким образом, наиболее

важный вопрос в характеристике хаоса состоит в установлении факта существования такого отображения в принципе. Если оно существует, то, как показывают все известные численные эксперименты, система своим поведением порождает детерминированный хаос; если нет, то вопрос о хаотическом поведении системы остается открытым.

В настоящей работе представлена алгоритмическая схема, позволяющая идентифицировать хаотический процесс на основе фрактального анализа данных.

Рассматриваемая статья осуществляет анализ природы временных рядов наблюдений средствами теории детерминированного хаоса с применением апостериорного оценивания размерности пространства вложения с помощью известной теоремы Такенса [21]. При этом в качестве примера исходных данных с неопределенной структурой модели используются результаты наблюдений за валютными котировками на электронном рынке Форекс.

Следует отметить, что определение случайного процесса в терминах фрактальной математики недостаточно дать на уровне фрактальной размерности, поскольку его выявление невозможно выполнить в одном из конечномерных фазовых пространств. Поэтому в работе обсуждается построение фрактальной размерности для нескольких фазовых пространств в совокупности. Это возможно сделать, рассмотрев последовательные пространства и вычислив фрактальную размерность в каждом из них, оценивая показатели расходимости размерности в зависимости от ее удаления от главной диагонали первого координатного угла.

2. Фрактальные размерности аттрактора динамической системы

Следуя [17; 18], под динамической системой (ДС) будем понимать эволюционный оператор для переменных состояния. Изменения вектора пространства состояния ДС (фазового пространства) в зависимости от времени отображается ее фазовой траекторией, или фазовым портретом. Пусть вне зависимости от начальных условий ДС перешла в какую-то определенную область фазового пространства. При этом соответствующий эволюционирующий фазовый портрет называется *аттрактором ДС*. Самые простые примеры аттракторов [5; 17; 18] – неподвижная точка, предельный цикл, тор. Такие аттракторы являются полностью предсказуемыми, их поведение прогнозируется с любой точностью. Однако еще в начале 60-х годов прошлого столетия были открыты более сложные непредсказуемые траектории с размытой геометрической формой. В этих случаях ДС демонстрируют хаотическое поведение, отвечающие им структуры получили название *странных аттракторов* и для их характеристики был введен ряд количественных мер.

Наиболее распространенными характеристиками хаотических аттракторов ДС являются фрактальные меры, определяемые через вероятность нахождения точки в определенной области фазового пространства. Наиболее общим их выражением является так называемая размерность Реньи [19–20; 23–24]:

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q \right)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)},$$

где $M(\varepsilon)$ – минимальное количество кубиков со стороной ε , полностью покрывающих аттрактор, p_i – вероятность пересечения i -го кубика фазовой траекторией ДС.

Частными случаями размерности Реньи являются размерность Колмогорова, информационная размерность и корреляционная размерность, получаемые при параметрах $q = 0, 1, 2$. Соответственно, размерность Колмогорова – Хаусдорфа и корреляционная размерность имеют вид:

$$D_0 = \frac{1}{1-0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(M(\varepsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right],$$

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q\right)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right] \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-q} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q\right)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right].$$

Преобразуем последнее выражение, используя правило Лопиталья и дифференцирование по параметру q :

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 1} \left[\frac{\frac{d\left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q\right)}{dq}}{\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 1} \left[\frac{-\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q \ln p_i}{\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right].$$

Далее, устремляя $q \rightarrow 1$, и с учетом того, что $\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i = 1$, получим:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = D_I.$$

Здесь D_I – информационная размерность, а D_C :

$$D_2 = \frac{1}{1-2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2\right)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2\right)}{\ln(\varepsilon)} \right] = D_C -$$

корреляционная размерность.

Для пространственно однородных аттракторов (т.е. для аттракторов, поведение которых полностью определяется их геометрией) все эти размерности одинаковы.

Заметим, что размерность Реньи, исходя из ее определения, является монотонно убывающей функцией q :

$$q_1 < q_2 \Rightarrow D_{q_1} \geq D_{q_2}.$$

Также отметим, что при вычислении корреляционной размерности используют следующее определение:

$$P^n \left\{ \rho(\bar{x}(i), \bar{x}(j)) < r; i = \overline{1, M}; j = \overline{1, M} \right\} = C^n(r) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=i+1}^{M-1} \frac{\theta(r - \rho(\bar{x}(i), \bar{x}(j)))}{M(M-1)/2}.$$

3. Методология фрактального анализа

Построение фрактала из исходного одномерного конечного сигнала связано с восстановлением его аттрактора. Это положение происходит из теории динамических си-

стем, с которым на начальном этапе своего развития была неразрывно связана теория детерминированного хаоса. Данный факт отчетливо прослеживается в теореме Такенса, в которой предложен способ построения восстановленного аттрактора, принадлежащего гладкому многообразию, положив в качестве координат вектора состояния тот же самый ряд, смещенный относительно себя на некоторое постоянное значение:

$$\bar{x}(i) = (x(i), x(i + \tau), \dots, x(i + \tau(n-1))) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Здесь $x(i)$ – исходный временной ряд, n – размерность пространства вложения, τ – временная задержка. Соответственно, вектор (x_1, x_2, \dots, x_n) определяет координату одной точки на восстановленном аттракторе. При этом n удовлетворяет условиям теоремы Такенса:

$$n \geq 2[d_A] + 1,$$

где d_A – размерность восстановленного аттрактора.

В соответствии с той же теоремой Такенса, что при числе отсчетов $N \rightarrow \infty$, построенное методом задержки отображение является гладким и обратимым почти при любой конечной задержке τ . Свойства построенного таким образом аттрактора метрически (и вероятностно) эквивалентны исходному аттрактору динамической системы.

Однако для реальных временных рядов эта теорема неприменима, в силу их конечности. К настоящему моменту для конечных временных рядов подобные теоретические результаты не получены. Существуют лишь оценки длины временного ряда, необходимые для характеристики степени подобия аттрактора с конечным числом значений. В качестве примера оценки необходимой длины приведем критерий А. Цониса [22]:

$$N > 10^{n+0.4D} \gg 100.$$

Другим параметром, требующим уточнения при проведении численных фрактальных исследований хаотических процессов, является параметр задержки τ . Самый приемлемый способ, рекомендуемый в [24], состоит в нахождении первого нуля автокорреляционной функции

$$B(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x}),$$

где исходный временной ряд $x_i = x(i\Delta t)$. При этом

$$\tau_{opt} = \min_{\tau_j} \{B(\tau_j) = 0\}.$$

Применение предложенного подхода связано с гипотезой о некоррелированности координат точек аттрактора, обусловленной ортогональностью векторов базиса пространства вложения. Однако эти утверждения неэквивалентны, и выбор параметра задержки таким способом не всегда является оптимальным.

Альтернативой представленному методу является построение функции средней взаимной информации по методу А.М. Fraiser et al. [23]. С этой целью интервал $[\min_i x_i, \max_i x_i]$ делят на L равных частей. Обычно L выбирают по формуле Старка:

$$L = [\log_2 N] + 1.$$

Событие « $x(t)$ принадлежит i -му интервалу» обозначают A_i , событие « $x(t + \tau)$ принадлежит j -му интервалу» – B_j . P – вероятность соответствующего события. Функция средней взаимной информации определяется в виде

$$I(\tau) = - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L P(A_i B_j) \log_2 \left(\frac{P(A_i B_j)}{P(A_i) P(B_j)} \right).$$

В качестве оптимального параметра задержки выбирается первый локальный минимум построенной функции:

$$\tau_{opt} = \min_{\tau_j} \{ I'(\tau_j) = 0, I'(\tau_j^-) < 0, I'(\tau_j^+) > 0 \}.$$

Как показано в [23], для некоторых тестовых данных (аттрактор системы уравнений Лоренца) значение оптимального параметра задержки, полученное на основе использования функции средней взаимной информации, является предпочтительной.

Там же показано, что для некоторых тестовых данных (аттрактор системы уравнений Лоренца) значение оптимального параметра задержки, полученное этим способом, является предпочтительней, чем первое.

Наиболее известными характеристиками аттрактора динамической системы являются вероятностные (или фрактальные) размерности. При этом оценивается вероятность нахождения точки в определенной области самого аттрактора в фазовом пространстве. Их общим выражением, как уже было отмечено, является размерность Реньи [23–24]. Из свойства убывания размерности в зависимости от параметра q следует, что для рассматриваемых объектов параметр q должен быть положительным. В настоящее время этот параметр принят равным двум (корреляционная размерность является оценкой информационной размерности, для ее вычисления разработан универсальный численный алгоритм, из полученного алгоритма автоматически следует оценка соответствующей аппроксимированной энтропии). Из общего выражения для размерности Реньи мы получили, что корреляционная размерность есть:

$$D_c = \frac{1}{1-2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2 \right)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2 \right)}{\ln(\varepsilon)}.$$

Последнее выражение удобно представить в форме:

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(C(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)},$$

где $C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^m \theta(r - \rho(x_i, x_j))$ – корреляционный интеграл, $\theta(\alpha) = \begin{cases} 1, \alpha \geq 0 \\ 0, \alpha < 0 \end{cases}$ –

функция Хевисайда, $\rho(x_i, x_j)$ – функция расстояния в n -мерном пространстве. Для аттракторов, состоящих из конечного числа точек, корреляционный интеграл заменяется соответствующей оценкой:

$$C(r) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=i+1}^M \frac{\theta(r - \rho(x_i, x_j))}{M(M-1)/2},$$

где M – количество точек на восстановленном аттракторе.

Фрактальность исследуемого объекта предполагает:

$$C(r) \sim r^{D_c},$$

откуда следует, что $\ln C(r) \sim D_c \ln r$. Тогда корреляционную размерность можно оценить через значение наклона прямой, отвечающей логарифму корреляционного интеграла. Самым простым способом получения линейной зависимости по последовательности экспериментальных данных, как известно, является метод наименьших квадратов:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^T \ln C(r_i) \ln r_i = D_c \sum_{i=1}^T \ln^2 r_i + b \sum_{i=1}^T \ln r_i \\ \sum_{i=1}^T \ln C(r_i) = D_c \sum_{i=1}^T \ln r_i + bT \end{cases},$$

где T – количество измерений корреляционного интеграла для различных расстояний r_i (вычисленных на равномерной сетке).

Справедливость приведенного закона ограничена значениями r_i , достаточно малыми по сравнению с размером аттрактора. Очевидно, при увеличении r до размеров аттрактора корреляционный интеграл $C(r) \rightarrow 1$, а при уменьшении, в силу конечности точек на аттракторе, $C(r) \rightarrow 0$. При этом указанный степенной закон справедлив только в ограниченном диапазоне r (так называемый диапазон скейлинга), который может быть использован для определения размерности аттрактора. Этот диапазон необходимо либо принять постоянным, либо установить на практике для рассматриваемых нами временных рядов и менять в зависимости от типа сигнала (типа соответствующего аттрактора сигнала).

Аппроксимированная энтропия отражает вероятность возникновения новых режимов при возрастании размерности пространства вложения. Чем она больше, тем больше неопределенностей в исходном сигнале. Для ее вычисления генерируются два аттрактора в последовательных пространствах вложения. Обычно $(n + 1)$ -мерное пространство является следующим по отношению к условиям теоремы Такенса. Для оценки их схожести вычисляют корреляционный интеграл в каждом пространстве. При этом аппроксимированная энтропия $ApEn$ находится из условия:

$$ApEn(n, r) = -\ln \left(\frac{C^{n+1}(r)}{C^n(r)} \right).$$

Однозначные рекомендации по нахождению конкретного расстояния r для оценки значения аппроксимированной энтропии в литературе отсутствуют. Приемлемым значением расстояния r обычно принимают расстояние, на котором корреляционный интеграл пересекается с аппроксимирующей его прямой в двойном логарифмическом масштабе в $(n + 1)$ -мерном фазовом пространстве. Тангенс угла наклона этой прямой и является оценкой корреляционной размерности. В случае если r выходит за границы диапазона скейлинга в n -мерном пространстве, то оно вычисляется в n -мерном фазовом пространстве тем же самым алгоритмом. На практике проверка этих двух условий является достаточной для нахождения r . Теоретически, если оба условия не выполнены, в качестве значения r можно взять одну из границ диапазона скейлинга (в зависимости от нахождения пересечения корреляционного интеграла с аппроксимирующей его прямой) в $(n+1)$ -мерном фазовом пространстве.

4. Сходимость фрактальной размерности

Оценка величины фрактальной размерности на практике выполняется апостериорно. Для проверки правильности ее вычисления предлагается оценить фрактальную размерность FD в $(n + 1)$ -мерном фазовом пространстве. В случае равенства полученных результатов $FD(n + 1) = FD(n)$, процесс является детерминированным хаосом. Этот случай определяет математические абстракции, установленные Лоренцом, Ресслером, Хеноном и др.

Расходимость фрактальной размерности до предельного случая, отвечающего прямой линии $FD(n) = n$, означает, что исследуемый ряд наблюдений представляет собой случайный процесс (рис. 1). Любой другой ряд наблюдений, находящийся между этой прямой и сходящейся кривой, следует отнести к категории недетерминированного хаоса (или просто хаоса).

Проведенные в работе численные эксперименты показали примеры детерминированности временных рядов, генерируемых всеми реализованными в модуле Fractan 4.4 конечномерными нелинейными отображениями (отображения Хенона, Икеда, системы уравнений Лоренца, Ресслера и др.) [20].

Для проведения указанных экспериментов был использован специализированно разработанный программный модуль, позволяющий генерировать временные ряды различной природы, находить временную задержку, реконструировать аттрактор, формировать изменения корреляционной размерности в зависимости от размерности

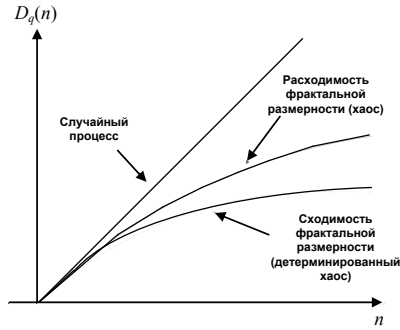


Рис. 1. Виды изучаемых процессов

фазового пространства (и таким образом, в случае сходимости, находить исходную корреляционную размерность). На рис. 2 приведен пример сходимости корреляционной размерности для отображения Хенона. Подобные результаты получены для всех упомянутых отображений.

Отметим, что из факта сходимости корреляционной размерности можно сделать вывод о детерминированном хаосе для аттрактора, реконструированного по временному ряду. Используя теорему Такенса [21], данное заключение можно распространить и на саму систему, генерирующую ряд наблюдений. При этом можно не знать структуры исходных данных, т.е. исследовать произвольный временной ряд, генерируемый источником нестационарных или хаотических данных.

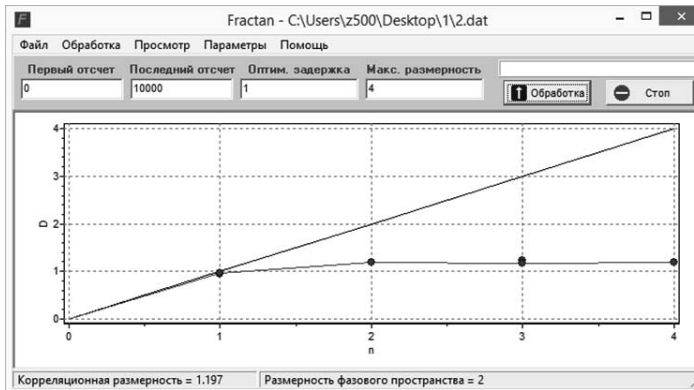


Рис. 2. Сходимость корреляционной размерности для отображения Хенона в программном модуле Fractan 4.4

5. Аппроксимированная энтропия как идентификатор хаоса

Как было уже отмечено, другим известным фрактальным показателем, непосредственно связанным с корреляционной размерностью, является аппроксимированная (корреляционная) энтропия. Учитывая характер сходимости корреляционной размерности, зададим ее выражение в виде:

$$C^n(r) \sim r^D \exp(-n \cdot ApEn),$$

где D – фрактальная размерность восстановленного аттрактора, $ApEn$ – искомое значение аппроксимированной энтропии. Соответственно, для $(n + 1)$ -мерного фазового пространства будем иметь:

$$C^{n+1}(r) \sim r^D \exp(-(n + 1) \cdot ApEn).$$

Поделив второе выражение на первое, получим:

$$\frac{C^{n+1}(r)}{C^n(r)} = \frac{\exp(-(n+1) \cdot ApEn)}{\exp(-n \cdot ApEn)} = \exp(-ApEn).$$

Таким образом,

$$ApEn = -\ln\left(\frac{C^{n+1}(r)}{C^n(r)}\right) = \ln\left(\frac{C^n(r)}{C^{n+1}(r)}\right),$$

или, если ввести логарифмическую функцию вида

$$\Lambda^n(r) = \ln(C^n(r)),$$

то аппроксимированная энтропия будет определяться выражением:

$$ApEn(n, r) = \Lambda^n(r) - \Lambda^{n+1}(r).$$

6. Результаты исследований

В работе были использованы 16 временных рядов, генерируемых нестационарными потоками котировок валют (см. табл. 1).

Таблица 1

Таблица фрактальных показателей для 16 исследуемых временных рядов

№ п/п	Валютные инструменты	Задержка	Мах размерность пространства вложения	Корреляционная размерность	Аппроксимированная энтропия
1.	EUR/USD	256	5	1.644	0.054
2.	EUR/JPY	81	11	3.171	0.302
3.	EUR/GBR	127	12	3.553	0.189
4.	EUR/CHF	115	15	3.649	0.824
5.	EUR/CAD	128	14	3.008	0.126
6.	USD/CAD	129	8	2.662	0.400
7.	USD/CHF	94	11	3.188	0.299
8.	USD/JPY	112	15	2.845	0.103
9.	GBR/CHF	109	13	2.940	0.123
10.	GBR/JPY	98	10	3.432	0.321
11.	GBR/USD	146	7	3.175	0.514
12.	AUD/JPY	92	4	1.524	1.326
13.	AUD/USD	148	10	2.648	0.205
14.	CHF/JPY	162	6	2.670	0.503
15.	NZD/USD	140	8	3.648	0.279
16.	NZD/JPY	90	15	3.361	0.126

Количество наблюдений для каждого временного ряда составляет 14400 отсчетов (10 дней). Для численного исследования были использованы алгоритмы уже указанного программного модуля Fractan 4.4 и вычислительной среды MatLab. В процессе анализа были реконструированы аттракторы (рис. 3; 4), найдены оптимальная задержка, корреляционная размерность, аппроксимированная энтропия. Отметим, что максимальную размерность пространства вложения рассматриваемое приложение находит автоматически, позволяя пользователю продолжить вычисления до размерности пространства 37.

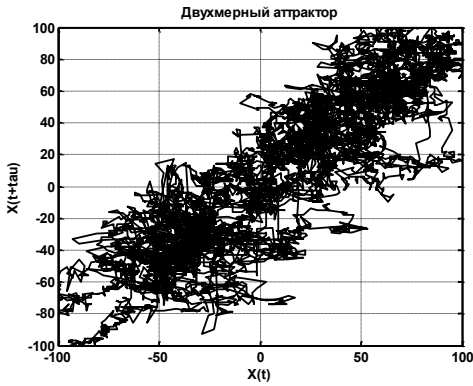


Рис. 3. Фрактал (двухмерный аттрактор) временного ряда отношения котировок валют с количеством игры на бирже 10 дней (14400 отсчетов)

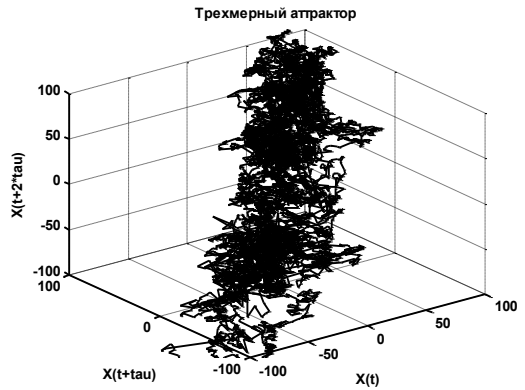


Рис. 4. Фрактал (трехмерный аттрактор) временного ряда отношения котировок валют с количеством игры на бирже 10 дней (14400 отсчетов)

Для каждого исследуемого временного ряда были построены кривые сходимости корреляционной размерности (пример для временного ряда USD/CHF приведен на рис. 5) и кривые убывания аппроксимированной энтропии (пример для временного ряда USD/CHF представлен на рис. 6).

Сходимость корреляционной размерности была выявлена для всех исследуемых временных рядов. При этом для 10 временных рядов (62.5%) эта размерность была больше либо равна 10.

Отметим, что при увеличении максимальной размерности пространства вложения увеличивается относительная ошибка вычислений, достигающая до 30% от полученного результата. Количество временных рядов с энтропией меньше 0,3 равно 8. При этом соответствующая корреляционная размерность была более 2.

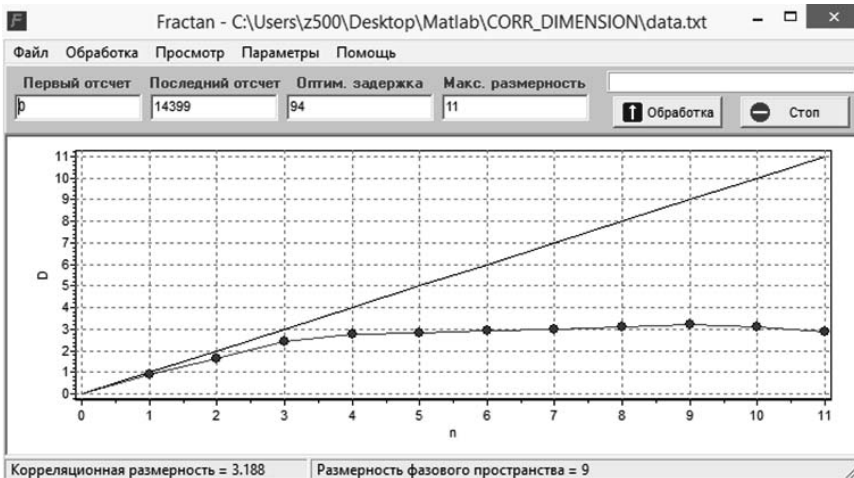


Рис. 5. Сходимость корреляционной размерности для котировок валют USD/CHF в программном модуле Fractan 4.4

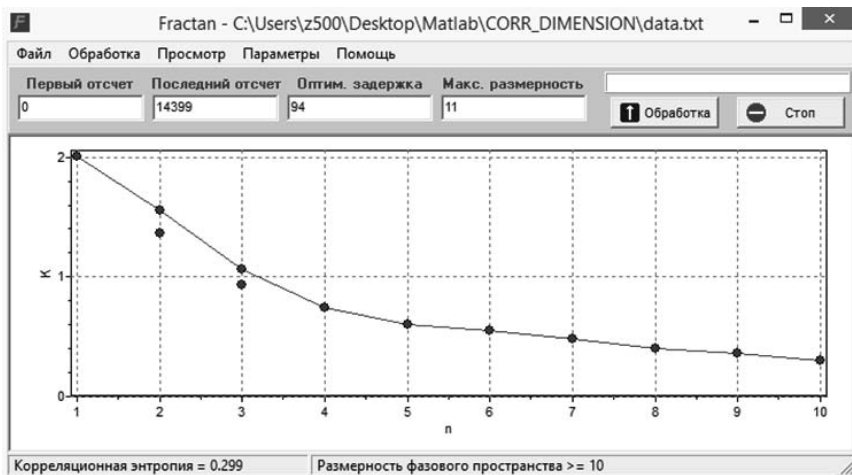


Рис. 6. Сходимость (кривая убывания) аппроксимированной энтропии для котировок валют USD/CHF в программном модуле Fractan 4.4

Первый временной ряд (EUR/USD) продемонстрировал регулярное поведение при реконструкции аттрактора. На рис. 7 приведен вид двухмерного аттрактора при произвольной временной задержке. В этом случае установлена наиболее высокая скорость сходимости корреляционной размерности при наименьшем значении аппроксимированной энтропии, что подтверждает установленный факт регулярности.

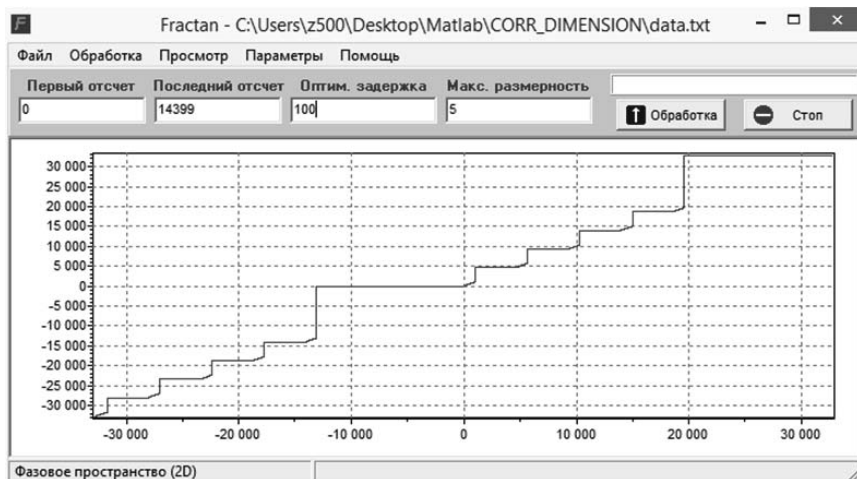


Рис. 7. Пример построения регулярного аттрактора для котировок валют EUR/USD в программном модуле Fractan 4.4

7. Заключение

Вопрос о природе наблюдаемых временных последовательностей является крайне важным при разработке или выборе стратегии управления в нестационарных средах. В частности, установление факта динамического хаоса означает возможность управления на основе экстраполяционного прогноза в течение некоторого, заранее

неопределенного интервала времени. Для чисто случайного нестационарного процесса такая стратегия управления будет неэффективной, необходимо искать другие формы прогнозирования, например связанные с аналитическими исследованиями среды погружения.

В качестве исследования генезиса динамического процесса предлагается использовать такие фрактальные показатели, как корреляционная размерность и аппроксимированная энтропия. С этой целью предложен аппарат нелинейных вычислительных методов, позволяющих осуществить реконструкцию аттрактора динамической системы по произвольному временному ряду и оценить значения соответствующих фрактальных мер. Предложенная технология реализована в нескольких программных комплексах. В частности, в рассмотренных практических применениях хорошо зарекомендовал себя программный модуль Fractan 4.4.

В качестве примера были получены оценки значений указанных фрактальных мер для 16 временных рядов, образованных наблюдениями за динамикой котировок валют. Установлены необходимые для вычислений параметры – временная задержка и максимальное значение размерности пространства вложения. Показана сходимости корреляционной размерности для всех исследуемых временных рядов, найден вид соответствующих кривых сходимости, установлено стремление к нулю кривых аппроксимированной энтропии.

В процессе исследований выявлен пример реализации детерминированного хаоса с регулярным аттрактором, показан его вид и получены необходимые значения параметров. Обнаружено стремление кривой корреляционной размерности к постоянной величине уже для размерности пространства вложения, равном 5. Соответствующее значение аппроксимированной энтропии в указанном пространстве вложения равно 0,054, что является минимальным на множестве исследуемых в работе временных рядов. Найденный регулярный случай с приведенным численным анализом и демонстрацией предсказуемого поведения фрактальных показателей делает возможной реконструкцию динамической системы, соответствующей поведению временного ряда.

Литература

1. *Кальянов Э.В.* Переходные процессы при стабилизации бистабильного генератора с хаотической динамикой // Письма в журнал технической физики. – 2011. – Т. 37. – № 20. – С. 41–48.
2. *Устюжанина Т.Н., Чезганова С.Г.* Математическое моделирование физических процессов в атмосфере Земли // Наука и бизнес: пути развития. – 2016. – № 6. – С. 19–27.
3. *Тенев В.А., Ветчанин Е.В., Илалетдинов Л.Ф.* Хаотическая динамика в задаче о падении тела винтовой формы в жидкости // Нелинейная динамика. – 2016. – Т. 12. – № 1. – С. 99–120.
4. *Бизяев И.А., Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С.* Топология и бифуркации в неголономной механике // Нелинейная динамика. – 2015. – Т. 11. – № 4. – С. 735–762.
5. *Боев Я.И., Стрелкова Г.И., Анищенко В.С.* Оценка размерности хаотических аттракторов с использованием времен возвращения Пуанкаре // Нелинейная динамика. – 2015. – Т. 11. – № 3. – С. 475–485.
6. *Кузнецов С.П., Кузнецов А.С., Круглов В.П.* Гиперболический хаос в системах с параметрическим возбуждением паттернов стоячих волн // Нелинейная динамика. – 2014. – Т. 10. – № 3. – С. 265–277.
7. *Исаева О.Б., Кузнецов А.С., Кузнецов С.П.* Гиперболический хаос при параметрических колебаниях струны // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9. – № 1. – С. 3–10.

8. *Захаров В.С.* Самоподобие структур и процессов в литосфере по результатам фрактального и динамического анализа: автореф. дис. ... д-ра геолого-минералогических наук. – М., 2014. – 35 с.

9. *Лаврушевич А.А., Захаров В.С., Хоменко В.П.* Особенности фрактального анализа лесового псевдокарста // Инженерная геология. – 2013. – № 2. – С. 72–78.

10. *Кобелев Н.Б.* Имитационный анализ и моделирование мировых процессов с учетом хаотических факторов // Доклады Седьмой Всероссийской научно-практической конференции «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2015), Москва, 21 октября 2015 года. – URL: <http://simulation.su/uploads/files/default/immod-2015-plenar-dokl-kobelev.pdf>

11. *Сафонов В.Ю.* Исследование финансовых рынков методами хаотической динамики // Сборник конференций НИЦ Социосфера. – 2013. – № 32. – С. 10–11.

12. *Venincsa, E., Ballantine, W., Ellner, S.P., Huisman, J.* Species fluctuations sustained by a cyclic succession at the edge of chaos // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2015. – V. 112. – № 20. – P. 6389–6394.

13. *Чичаев И.А., Попов В.Ю.* Об одном подходе к вычислению индекса Херста финансовых временных рядов и их аппроксимации фрактальным броуновским движением // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 2. – URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/ob-odnom-podhode-k-vychisleniyu-indeksa-hersta-finansovyh-vremennyh-ryadov-i-ih-approksimatsii-fraktalnym-brounovskim-dvizheniem-1>

14. *Амосов О.С., Муллер Н.В.* Исследование временных рядов с применением методов фрактального и вейвлет анализа // Интернет-журнал Науковедение. – 2014. – № 3 (22). – URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-vremennyh-ryadov-s-primeneniem-metodov-fraktalnogo-i-veyvlet-analiza>

15. *Мусаев А.А.* Статистический анализ инерционности хаотических процессов // Труды СПИИРАН. – 2014. – Вып. 2 (33). – С. 48–59.

16. *Захаров А.И., Ходаковский В.А., Загайнов А.И.* Multifractal analysis: identifying the boundaries application in the study of time series // Интеллектуальные технологии на транспорте. Санкт-Петербург, 2015. – № 3. – С. 24–29.

17. *Астахов С.В., Анищенко В.С.* Относительная метрическая энтропия. Мера степени перемешивания в регулярных и хаотических зашумленных системах. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG. 2011. 108 с.

18. *Кратчфилд Д.П., Фармер Д.Д., Паккард Н.Х., Шоу Р.С.* Хаос // В мире науки. – 1987. – № 2. – С. 16–28.

19. *Данилевич Я.Б., Коваленко А.Н., Носырев С.П.* Иррегулярность энтропийных процессов в организме как показатель его функциональной устойчивости // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 429. – № 1. – С. 135–138.

20. *Махортых С.А., Сычев В.В.* Алгоритмы вычисления характеристик стохастических сигналов и их применение к анализу электрофизиологических данных // Abstracts. Nonlinear Phenomena in Biology. Pushchino: 1998. – P. 33–34.

21. *Takens, F.* Detecting strange attractors in turbulence, in dynamical systems and turbulence. Lecture Notes in Mathematics, edited by D.A. Rand and L.S. Young. – Heidelberg, Springer-Verlag, 1981. – Pp. 366–381.

22. *Tsonis, A.* Chaos: from Theory to Applications. – New York : Plenum Press, 1992. – P. 274.

23. *Антонов В.И., Загайнов А.И., Коваленко А.Н.* Динамический тренд корреляционной размерности как характеристический показатель жизнедеятельности организма // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2009. – № 6 (91). – С. 111–119.

24. *Antonov, V., Kovalenko, A., Zagaynov, A., Vu van Quang.* The research of fractal characteristics of the electrocardiogram in a real time mode // Journal of Mathematics and System Science. – 2012. – Vol. 2. – № 3. – P. 191–195.

References

1. Kal'yanov, E.V. Perekhodnye protsessy pri stabilizatsii bistabil'nogo generatora s khaoticheskoy dinamikooy // Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki. – 2011. – T. 37. – № 20. – S. 41–48.
2. Ustyuzhanina, T.N., Chezganova, S.G. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v atmosfere Zemli // Nauka i biznes: puti razvitiya. – 2016. – № 6. – S. 19–27.
3. Tenenev, V.A., Vetchanin, E.V., Ilaletdinov, L.F. Khaoticheskaya dinamika v zadache o padenii tela vintovoy formy v zhidkosti // Nelineynaya dinamika. – 2016. – T. 12. – № 1. – S. 99–120.
4. Bizyaev, I.A., Bolsinov, A.V., Borisov, A.V., Mamaev, I.S. Topologiya i bifurkatsii v negolonomnoy mekhanike // Nelineynaya dinamika. – 2015. – T. 11. – № 4. – S. 735–762.
5. Boev, Ya.I., Strelkova, G.I., Anishchenko, V.S. Otsenka razmernosti khaoticheskikh attraktorov s ispol'zovaniem vremen vozvrata Puankare // Nelineynaya dinamika. – 2015. – T. 11. – № 3. – S. 475–485.
6. Kuznetsov, S.P., Kuznetsov, A.S., Kruglov, V.P. Giperbolicheskiy khaos v sistemakh s parametricheskim vobuzhdeniem patternov stoyachikh voln // Nelineynaya dinamika. – 2014. – T. 10. – № 3. – S. 265–277.
7. Isaeva, O.B., Kuznetsov, A.S., Kuznetsov, S.P. Giperbolicheskiy khaos pri parametricheskikh kolebaniyakh struny // Nelineynaya dinamika. – 2013. – T. 9. – № 1. – S. 3–10.
8. Zakharov, V.S. Samopodobie struktur i protsessov v litosfere po rezul'tatam fraktal'nogo i dinamicheskogo analiza : avtoref. dis. ... d-ra geologo-mineralogicheskikh nauk. – M., 2014. – 35 s.
9. Lavrusevich, A.A., Zakharov, V.S., Khomenko, V.P. Osobennosti fraktal'nogo analiza lessovogo psevdokarsta // Inzhenernaya geologiya. – 2013. – № 2. – S. 72–78.
10. Kobelev, N.B. Imitatsionnyy analiz i modelirovanie mirovykh protsessov s uchetoem khaoticheskikh faktorov // Doklady Sed'moy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Imitatsionnoe modelirovanie. Teoriya i praktika" (IMMOD-2015), Moskva, 21 oktyabrya 2015 goda. – URL: <http://simulation.su/uploads/files/default/immod-2015-plenar-dokl-kobelev.pdf>
11. Safonov, V.Yu. Issledovanie finansovykh rynkov metodami khaoticheskoy dinamiki // Sbornik konferentsiy NITS Sotsiosfera. – 2013. – № 32. – S. 10–11.
12. Beninca, E., Ballantine, W., Ellner, S.P., Huisman, J. Species fluctuations sustained by a cyclic succession at the edge of chaos // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2015. – V. 112. – № 20. – P. 6389–6394.
13. Chichaev, I.A., Popov, V.Yu. Ob odnom podkhode k vychisleniyu indeksa Khersta finansovykh vremennykh ryadov i ikh approksimatsii fraktal'nym brounovskim dvizheniem // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. – 2013. – № 2. – URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/ob-odnom-podhode-k-vychisleniyu-indeksa-hersta-finansovykh-vremennykh-ryadov-i-ih-approksimatsii-fraktalnym-brounovskim-dvizheniem-1>
14. Amosov, O.S., Muller, N.V. Issledovanie vremennykh ryadov s primeneniem metodov fraktal'nogo i veyvlet analiza // Internet-zhurnal Naukovedenie. – 2014. – № 3 (22). – URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-vremennykh-ryadov-s-primeneniem-metodov-fraktalnogo-i-veyvlet-analiza>
15. Musaev, A.A. Statisticheskii analiz inertsionnosti khaoticheskikh protsessov // Trudy SPIIRAN. – 2014. – Vyp. 2 (33). – S. 48–59.
16. Zakharov, A.I., Khodakovskiy, V.A., Zagaynov, A.I. Multifractal analysis: identifying the boundaries application in the study of time series // Intellekual'nye tekhnologii na transporte. Sankt-Peterburg, 2015. – № 3. – S. 24–29.
17. Astakhov, S.V., Anishchenko, V.S. Otnositel'naya metricheskaya entropiya. Mera stepeni peremeshvaniya v regul'yarnykh i khaoticheskikh zashumlennykh sistemakh. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG. 2011. 108 s.

18. *Kratchfeld, D.P., Farmer, D.D., Pakkard, N.Kh., Shou, R.S.* Khaos // V mire nauki. – 1987. – № 2. – S. 16–28.
19. *Danilevich, Ya.B., Kovalenko, A.N., Nosyrev, S.P.* Irregulyarnost' entropiynykh protsessov v organizme kak pokazatel' ego funktsional'noy ustoychivosti // Doklady Akademii nauk. – 2009. – T. 429. – № 1. – S. 135–138.
20. *Makhortykh, S.A., Sychev, V.V.* Algoritmy vychisleniya kharakteristik stokhasticheskikh signalov i ikh primenenie k analizu elektrofiziologicheskikh dannykh // Abstracts. Nonlinear Phenomenain Biology. Pushchino: 1998. – P. 33–34.
21. *Takens, F.* Detecting strange attractors in turbulence, in dynamical systems and turbulence. Lecture Notes in Mathematics, edited by D.A. Rand and L.S. Young. – Heidelberg, Springer-Verlag, 1981. – Pp. 366–381.
22. *Tsonis, A.* Chaos: from Theory to Applications. – New York : Plenum Press, 1992. – P. 274.
23. *Antonov, V.I., Zagaynov, A.I., Kovalenko, A.N.* Dinamicheskii trend korrelyatsionnoy razmernosti kak kharakteristicheskii pokazatel' zhiznedeyatel'nosti organizma // Nauchno-tehnicheskije vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. – 2009. – № 6 (91). – S. 111–119.
24. *Antonov, V., Kovalenko, A., Zagaynov, A., Vu van Quang.* The research of fractal characteristics of the electrocardiogram in a real time mode // Journal of Mathematics and System Science. – 2012. – Vol. 2. – № 3. – P. 191–195.