

А.Н. Новиков¹
 А.А. Нечай²
 А.В. Малахов³

A.N. Novikov
 A.A. Nechay
 A.V. Malakhov

О ПОДХОДЕ К ОБОСНОВАНИЮ РАЦИОНАЛЬНОЙ НОМЕНКЛАТУРЫ ЭТАЛОННОЙ БАЗЫ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ

ABOUT APPROACH TO SUBSTANTIATION OF THE RATIONAL NOMENCLATURE'S REFERENCE BASE OF MEASURING COMPLEXES ON THE BASIS OF INDISTINCT MODELS

Представлены результаты исследований особенностей применения методов целочисленной многокритериальной оптимизации при обосновании рациональной номенклатуры эталонной базы измерительных комплексов с использованием формализованных в нечетком виде исходных данных о режимах и условиях проведения поверки (аттестации), а именно: особенностей ранжирования альтернатив с учетом возможных вариантов сочетания различных типов оценок, представленных в детерминированной, стохастической, либо нечеткой формах. Основное внимание уделяется разработке уточняющих положений, касающихся применения метода ранжирования по максимальному удалению с использованием формализованных в нечетком виде исходных данных, позволяющих исключить допущения, обязательные в случае применения традиционных методов ранжирования недоминируемых альтернатив о том, что частные показатели оценивания альтернатив независимы, насколько неравноценны, настолько и несоизмеримы по важности, об аддитивности частных показателей, о неизменности выполнения принципа транзитивности при ранжировании альтернатив. Показано, что применение аппарата теории нечетких множеств существенно дополняет методологию решения задач целочисленной многокритериальной оптимизации.

Ключевые слова: измерительные комплексы, нечеткие модели, методы ранжирования, определение функций принадлежности, показатели оценивания альтернатив, методы целочисленной многокритериальной оптимизации.

In this article are presented the results of researches of application methods features of integer multicriteria optimization at justification of the rational nomenclature of reference base of measuring complexes with use of indistinct basic data about the modes and conditions of carrying out checking (certification), namely, the features of alternatives ranging taking into account the possible options of various types of the estimates combination presented in the determined, stochastic, or indistinct forms. The main attention is paid to the development of specifying provisions concerning the application of ranging method on the maximum removal with use of the basic data formalized in an indistinct look allowing to exclude the assumptions obligatory in the case of application traditional of ranging methods of not dominated alternatives that private indicators of alternatives estimation are independent as far as aren't equivalent, so and are incommensurable on importance, about additivity of private indicators, about an invariance of performance of the principle of transitivity when ranging alternatives. It is shown that the use of device of the theory of indistinct sets significantly supplements methodology of the solution of integer multicriteria optimization problems.

Keywords: measuring complexes, indistinct models, ranging methods, definition of accessory functions, indicators of alternatives estimation, methods of integer multicriteria optimization.

Введение

В условиях постоянного роста требований к повышению функциональности, технологично-

¹ Кандидат технических наук, доцент кафедры Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского.

² Преподаватель кафедры Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского

³ Адъюнкт кафедры Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского

сти, оперативности и одновременно снижению ресурсоемкости измерительных систем и комплексов, применяемых для метрологического обслуживания объектов наземной космической инфраструктуры, а также отсутствия полноценной апостериорной информации о степени реализуемости режимов и условий проведения поверочных (аттестационных) работ возникают предпосылки для поиска оригинальных подхо-

дов в решении оптимизационных задач обоснования рациональной номенклатуры эталонной базы измерительных комплексов, связанных с применением теории нечётких множеств. Нечёткие оценки в ряде случаев являются единственно корректной формой отражения реальной неопределённости оценивания значений частных показателей предпочтительности того или иного варианта (состава) эталонной базы, имеющейся в распоряжении лица, принимающего решение для комплектования, например, подвижной лаборатории измерительной техники. В частности, ряд переменных, отражающих влияние внешних факторов (условий) проведения поверки (электромагнитные помехи, вибрации, солнечная радиация, состав газов и параметры их динамических состояний и т.д.) при оценивании показателя результативности поверки, а также компонент затрат на ее проведение при оценивании показателя экономичности (ресурсоёмкости) на этапе анализа вариантов формирования рационального состава эталонной базы измерительного комплекса может быть оценён лишь приблизительно, с указанием примерного интервала возможных значений и ожидаемого распределения на этом интервале.

Постановка задачи исследования

Представим множество вариантов решений по формированию рациональной номенклатуры эталонной базы отдельно взятого образца измерительного комплекса на примере подвижной лаборатории измерительной техники в виде некоторого конечного множества альтернатив

$$A_{\{n\}} = \{a_1, \dots, a_n\}. \quad (1)$$

Сравнительную предпочтительность альтернатив будем оценивать с помощью частных показателей K_1, \dots, K_s , $s > 1$. Тогда, s -мерная оценка каждой альтернативы $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$ может быть представлена вектором

$$X_{i<s>} = (x_{i1}, \dots, x_{is}). \quad (2)$$

При сравнении альтернатив могут возникать следующие ситуации:

1) альтернатива a_i не менее предпочтительна, чем альтернатива a_j ($a_i \geq a_j$), если $X_{i<s>} \geq X_{j<s>}$, т.е. $x_{iv} \geq x_{jv}$, $v \in \{1, \dots, s\}$;

2) альтернатива a_i более предпочтительна, чем альтернатива a_j ($a_i \succ a_j$), если $X_{i<s>} > X_{j<s>}$, т.е. $x_{iv} \geq x_{jv}$, и хотя бы для одного v $x_{iv} > x_{jv}$;

3) альтернатива a_i недоминируема, если не существует альтернативы $a_j \in \{a_1, \dots, a_n\}$ такой, что $a_j \succ a_i$.

Естественно, что наиболее предпочтительная среди альтернатив a_1, \dots, a_n относится к числу недоминируемых. Недоминируемые альтернативы образуют так называемое множество Парето [1]. При выборе наиболее предпочтительных альтернатив, как правило, недостаточно ограничиться указанием множества Парето, которому может принадлежать слишком много альтернатив. Поэтому необходимо использовать другие дополнительные методы сравнительной оценки альтернатив, связанные с построением на множестве Парето отношения предпочтения. Данные методы можно условно разделить по способу ранжирования на три группы как показано на рис. 1.



Рис. 1. Основные методы ранжирования недоминируемых альтернатив

Метод лексикографического упорядочения [2] целесообразно использовать, когда частные показатели K_1, \dots, K_s , характеризующие альтернативы, таковы, что их относительная важность измерима в порядковых шкалах, причем K_1 существенно важнее всех остальных частных показателей, K_2 – всех остальных, за исключением K_1 , и т.д.

В этом случае, если $a_i \succ a_j$ по K_1 , то $a_i \succ a_j$ независимо от оценок по остальным частным показателям K_2, \dots, K_s . Если же оценки альтернатив совпадают по первым r частным показателям и различаются по $(r + 1)$ -му частному показателю, то более предпочтительной в этом случае является альтернатива, более предпочтительная по $(r + 1)$ -му частному показателю.

Легко заметить, что при лексикографическом упорядочении все альтернативы являются строго проранжированными. Одинаково предпочтительными могут оказаться лишь альтернативы с совпадающими векторами оценок. В случае лексикографического упорядочения оказывается легко решаемой задача выбора заданного числа наилучших альтернатив. Для этого достаточно выбрать нужное число первых альтернатив в их лексикографическом упорядочении.

Однако далеко не всегда частные показатели оценивания альтернатив K_1, \dots, K_s настолько неравноценны, настолько несоизмеримы по важности. Более типична ситуация, когда важность частных показателей является сопоставимой. В этом случае целесообразно применить различные методы свёртки – построения обобщённого критерия, либо, если обобщённый критерий нельзя построить, – методы упорядочения без обобщённого критерия.

Методы упорядочения с обобщённым критерием [3] отличаются по способам формирования обобщённого критерия. Наиболее распространены линейные обобщённые критерии, которые строятся в предположении об аддитивности, однородности частных показателей, сопоставимости их по относительной важности и независимости, как это показано в работе [4].

Предположение об аддитивности частных показателей означает, что более предпочтительной является альтернатива, у которой выше значение суммы значений частных показателей. В этом случае предполагается, что для лица, принимающего решение, существенным обстоятельством является факт суммарного превосходства альтернативы по всей совокупности рассматриваемых показателей. Однородными считаются показатели, измеряющие интенсивность свойств одной и той же природы. В случае, когда показатели таковыми не являются, их необходимо преобразовать в однородные. Сопоставимость по относительной важности для частных показателей означает, что их важность может быть сравнима с использованием количественных шкал (в отличие от порядковых при лексикографическом упорядочении).

Одним из наиболее важных предположений о характере частных показателей при использовании обобщённого критерия является предположение об их независимости.

При соблюдении указанных предположений процедура сравнительной оценки многокритериальных альтернатив сводится к построению обобщённого линейного критерия

$$\sum_{v=1}^s \alpha_v K_v(a_i) = \sum_{v=1}^s \alpha_v x_{iv}, \quad (3)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ – весовые коэффициенты частных показателей K_1, \dots, K_s , отражающие результаты сравнительной оценки частных показателей по важности.

Лучшей признаётся альтернатива a_i , для которой

$$\sum_{v=1}^s \alpha_v K_v(a_i) \geq \sum_{v=1}^s \alpha_v K_v(a_j), \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i. \quad (4)$$

Если необходимо выбрать k лучших альтернатив, то ими будут k альтернатив, получивших наибольшие оценки по критерию (3).

Несмотря на достаточную наглядность критерия (3) и простоту его применения на практике, линейный обобщённый критерий не всегда может быть сформирован. В частности, при решении задач выбора вариантов построения эталонной базы измерительного комплекса некоторые показатели эффективности комплекса являются зависимыми (например, ресурсоемкость в общем случае косвенно зависит от значений показателей результативности и оперативности). Кроме того, не всегда обоснованным представляется применение в этих задачах принципа аддитивности частных показателей.

Отсутствие обобщённого критерия существенно усложняет сравнительную оценку предпочтительности многомерных альтернатив. В этом случае обычно применяются методы упорядочения без обобщённого критерия.

Одним из известных методов из этой группы является так называемый метод ЭЛЕКТРА [5]. В данном методе предлагается определять предпочтения экспертов на множестве многомерных альтернатив, не выясняя структуры и вида обобщённого критерия, а используя дополнительную функцию порогового характера о согласии и несогласии экспертов с результирующим отношением предпочтения альтернатив.

Рассмотрим произвольную пару альтернатив a_i и a_j . Обозначим класс частных показателей, согласно которым a_i не менее предпочтительна, чем a_j , как $C(a_i, a_j)$, а класс, по которому действует обратное предпочтение, как $D(a_i, a_j)$. Пусть известны коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, характеризующие относительную важность предпочтений по каждому из частных показателей. В методе ЭЛЕКТРА вводятся индекс согласия, характеризующий согласие эксперта с порядком предпочтений $a_i \succ a_j$:

$$c(a_i, a_j) = \frac{1}{\sum_{v=1}^s \alpha_v} \sum_{K_v \in C(a_i, a_j)} \alpha_v \quad (5)$$

и индекс несогласия:

$$d(a_i, a_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } D(a_i, a_j) = \emptyset; \\ \frac{1}{m} \max_{K_p \in D(a_i, a_j)} |x_{iv} - x_{jv}| - & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6)$$

где m – максимально возможная разность между оценками x_{iv} и x_{jv} .

Считается, что альтернатива a_i предпочтительней a_j , только если

$$c(a_i, a_j) \geq c_0 \text{ и } d(a_i, a_j) \leq d_0,$$

где c_0 и d_0 – специально вводимые пороговые значения индексов (5) и (6).

Недостатком данного метода и его модификаций является эвристический характер процедур формирования классов $C(a_i, a_j)$ и $D(a_i, a_j)$, требующий привлечения экспертов для попарного сравнения альтернатив a_i и a_j , недостаточно обоснованный способ задания пороговых значений c_0 и d_0 , а также принципиальная возможность получения вариантов упорядочений с нарушением принципа транзитивности при ранжировании альтернатив, т.е. может быть, что

$$a_i \succ a_j, a_j \succ a_k \text{ и } a_k \succ a_i, \quad (7)$$

что, конечно, противоречит здравому смыслу при использовании метода в инженерных приложениях.

Исходя из этого, рассмотрим альтернативный метод обоснования рационального состава эталонной базы измерительного комплекса, основанный на решении оптимизационных задач.

Пусть для каждого частного показателя K_v можно указать пороговое значение L_v такое, что альтернативы, оценки которых по показателю K_v ниже, чем L_v , крайне нежелательны. Более предпочтительными считаются альтернативы, оценки которых по частным показателям как можно дальше отстоят от критических значений L_v . Исходя из сущности подхода к ранжированию, данный метод можно назвать методом ранжирования по максимальному удалению от критических значений частных показателей, или, сокращённо, методом ранжирования по максимальному удалению (РМУ).

Представим математическую модель, лежащую в основе метода РМУ, в формализованном виде следующим образом.

Пусть альтернативы $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ оцениваются по s частным критериям K_1, \dots, K_s и $X_{i \leftarrow s} = (x_{i1}, \dots, x_{is})$ – вектор оценок альтернативы $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$. Альтернативу a_i будем считать более предпочтительной, чем a_j , если

$$\min \{x_{i1} - L_1, \dots, x_{is} - L_s\} > \min \{x_{j1} - L_1, \dots, x_{js} - L_s\}.$$

Тогда выбор наилучшей альтернативы a^* осуществляется как решение задачи

$$a^* = \arg \max_{a_i \in A} \left[\min_{v \in \{1, \dots, s\}} \{(x_{iv} - L_v)\} \right]. \quad (8)$$

В работе [6] показано, что задача (8) может быть решена как задача линейного программирования

$$z_{iv} \rightarrow \max_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ v \in \{1, \dots, s\}}} \quad (9)$$

при ограничениях $x_{iv} - L_v - z_{iv} \geq 0, v \in \{1, \dots, s\}, a_i \in A$.

При небольшом числе альтернатив задача может быть решена непосредственным расчётом значений $\min_v (x_{iv} - L_v)$ и выбором альтернативы с максимальным значением данного критерия.

Обобщим правило (8) на случай, когда частные показатели $K_v, v \in \{1, \dots, s\}$ различны по важности. В данной постановке это означает, что удаление оценок альтернатив от критических значений по одним частным показателям важнее, чем по другим. Например, для одной группы эталонов важнее обеспечить более высокие значения соотношения показателей функциональной избыточности (возможности обеспечить проверку в максимально широком диапазоне воспроизводимых поверяемыми средствами измерений величин) и технологической сложности, которая косвенно отражает требования к уровню квалификации специалиста по проверке по сравнению с показателями оперативности и экономичности (ресурсоемкости) проверки. В то время как для другой важнее обеспечить более высокие значения показателей оперативной готовности и помехоустойчивости по сравнению с требованиями к точности и функциональной избыточности применяемых эталонов.

Допустим, что определены значения весовых коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, характеризующих важность удаления оценки альтернативы по каждому из частных показателей. Тогда задача (8) может быть записана в виде

$$a^* = \arg \max_{a_i \in A} \left[\min_{v \in \{1, \dots, s\}} \{\alpha_v (x_{iv} - L_v)\} \right]. \quad (10)$$

Соответственно, задача линейного программирования (9) принимает вид

$$\sum_{v=1}^s \alpha_v z_{iv} \rightarrow \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \quad (11)$$

при ограничениях $x_{iv} - L_v - z_{iv} \geq 0, v \in \{1, \dots, s\}, a_i \in A$.

Или, введя функцию $\Phi(a_i) = \sum_{v=1}^s \alpha_v z_{iv}$, можно записать:

$$a^* = \arg \max_{a_i \in A} \Phi(a_i) \quad (12)$$

$$x_{iv} - L_v - z_{iv} \geq 0, v \in \{1, \dots, s\}.$$

Анализ составляющих выражения (12) позволяет выделить следующие аспекты, подлежащие уточнённому исследованию:

1. Выбор способа оценивания значений коэффициентов важности частных показателей $\alpha_v, v \in \{1, \dots, s\}$.

2. Анализ возможных способов формирования оценок $x_{iv}, i \in \{1, \dots, n\}, v \in \{1, \dots, s\}$ частных показателей.

3. Исследование способов преобразования частных показателей $K_v, v \in \{1, \dots, s\}$ к однородным.

4. Анализ способов задания критических значений $L_v, v \in \{1, \dots, s\}$ частных показателей.

5. Исследование особенностей ранжирования альтернатив с учётом возможных вариантов сочетания различных типов оценок составляющих данного выражения.

Решение

В случае если заранее можно строго проранжировать частные показатели по важности, то можно воспользоваться следующим способом оценивания значений коэффициентов α_v .

Пусть частные показатели $K_v, v \in \{1, \dots, s\}$ представлены в проранжированном виде множеством $K_{\{s\}}^r = \{K_1^r, \dots, K_s^r\}$. Тогда можно сформировать соответствующее упорядоченное множество из коэффициентов важности $\alpha_{\{s\}}^r = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$.

Допустим, что определены значения коэффициентов сравнительной предпочтительности ρ_{ij} между соседними коэффициентами важности α_i и α_j в упорядоченном множестве $\alpha_{\{s\}}$, такие, что $\rho_{ij} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}, j = i+1; i, j \in (1, \dots, s)$.

С учётом этого можно составить следующую систему из $(s + 1)$ уравнений с s неизвестными α_i :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \rho_{12}\alpha_2, \\ \alpha_2 = \rho_{23}\alpha_3, \\ \vdots \\ \alpha_{s-1} = \rho_{(s-1)s}\alpha_s, \\ \sum_{v=1}^s \alpha_v = 1. \end{cases} \quad (13)$$

Решая (6), имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \left(1 + \rho_{(s-1)s} + \dots + \prod_{i=2}^{s-1} \rho_{i(i+1)} + \prod_{i=1}^{s-1} \rho_{i(i+1)} \right)^{-1} = M_s, \\ \alpha_{s-1} &= \rho_{(s-1)s} M_s, \\ \alpha_{s-2} &= \rho_{(s-2)(s-1)} \rho_{(s-1)s} M_s, \\ &\vdots \\ \alpha_j &= \prod_{i=j+1}^s \rho_{(i-1)i} M_s, \\ &\vdots \\ \alpha_1 &= \prod_{i=2}^s \rho_{(i-1)i} M_s. \end{aligned} \quad (14)$$

Если при строгом ранжировании частных показателей K_v по важности возникают затруднения, то можно воспользоваться методом, описанным в работе [7]. При этом предполагаются известными значения, принимаемые каждой из n альтернатив по всем частным показателям $K_v, v = \overline{1, s}$, т.е. векторы $X_i = (x_{i1}, \dots, x_{is}), i \in \{1, \dots, n\}$. Кроме того, есть информация о парных сравнениях альтернатив, т.е. для каждой пары альтернатив α_j, α_i известна более предпочтительная.

Тогда задача отыскания весовых коэффициентов $\alpha_v \geq 0$ формулируется как

$$\sum_{ij \in I} Y_{ij} \rightarrow \min \quad (15)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^s (x_{iv} - x_{jv}) \alpha_v + Y_{ij} &\geq 0, \\ \sum_{v=1}^s \alpha_v &= 1, \alpha_v \geq 0, Y_{ij} \geq 0, \end{aligned}$$

где I есть множество всех пар индексов i, j , для которых $\alpha_i \succ \alpha_j$.

Данная задача относится к классу задач линейного программирования и при сравнительно небольшом числе альтернатив может эффективно решаться с помощью ЭВМ.

Анализ возможных способов формирования оценок $x_{iv}, i \in \{1, \dots, n\}, v \in \{1, \dots, s\}$ частных показателей показывает, что в зависимости от количества исходных данных, доступности источников информации, способов получения информации и природы частных показателей K_v оценки x_{iv} могут быть представлены в детерминированной, стохастической, либо нечёткой формах. Детерминированные и стохастические оценки с точки зрения формы представления выражаются в виде точечных, либо интервальных величин. Нечёткие же оценки представляют собой нечёткие множества \underline{x}_{iv} , определённые на множествах значений частных показателей с помощью так называемых функций принадлежности μ_{iv} в виде

$$\underline{x}_{iv} = \{ \langle x_{iv}, \mu_{iv} \rangle \}, \mu_{iv} : X_{iv} \rightarrow [0; 1]. \quad (16)$$

Нечёткие оценки в ряде случаев являются единственно корректной формой отражения реальной неопределённости оценивания значений частных показателей. В частности, ряд переменных, отражающих влияние внешних факторов (условий) проведения проверки (электромагнитные помехи, вибрации, солнечная радиация, состав газов и параметры их динамических состояний и т.д.) при оценивании показателя результативности проверки, а также компонент затрат на ее проведение при оценивании показателя экономичности (ресурсоемкости) на этапе

анализа вариантов формирования рационального состава эталонной базы измерительного комплекса может быть оценён лишь приблизительно, с указанием примерного интервала возможных значений и ожидаемого распределения на этом интервале.

Как уже было сказано выше, в общем случае частные показатели являются неоднородными, так как измеряют интенсивность свойств различной физической природы. В этом случае они нуждаются в преобразовании к однородным. Рекомендации, приведенные в работе [8], справедливы для случая, когда частные показатели таковы, что более предпочтительной альтернативе соответствует большее значение показателя. В противном случае преобразование показателей в однородные следует осуществлять с помощью выражений:

$$x'_{iv} = \frac{\bar{x}_v - x_{iv}}{\bar{x}_v} = 1 - \frac{x_{iv}}{\bar{x}_v}, \quad (17)$$

$$x'_{iv} = \frac{\bar{x}_v - \underline{x}_v - \bar{x}_{iv} + x_{iv}}{\bar{x}_v - \underline{x}_v} = 1 - \frac{\bar{x}_{iv} - x_{iv}}{\bar{x}_v - \underline{x}_v}, \quad (18)$$

$v \in \{1, \dots, s\}.$

В большинстве практических случаев измерения значений частных показателей производятся в шкалах отношений, когда преобразование показателей к однородному виду требует знания точечных оценок \bar{x}_v . Однако для некоторых частных показателей, не измеряемых в шкале $[0;1]$, таких, например, как трудоемкость, стоимость, технологическая сложность процедуры контроля и т.п., трудно задать однозначное значение максимально возможной оценки показателя. В то же время, можно указать приближённо область значений, которой \bar{x}_v принадлежит с большей или меньшей уверенностью. В этих случаях целесообразно оценивать \bar{x}_v в виде нечёткой величины

$$\bar{x}_v = \{< \bar{x}_v, \mu(\bar{x}_v) >\}, \quad (19)$$

где $\mu(\bar{x}_v)$ есть функция принадлежности нечёткого множества \bar{x}_v максимально возможных значений оценки показателя K_v .

С учётом этого обстоятельства преобразование x_{iv} к однородному виду производится по формулам:

$$\underline{x}'_{iv} = x_{iv} / \bar{x}_v = \{< x'_{iv}, \mu(x'_{iv}) >\}, \quad (20)$$

где $x'_{iv} = x_{iv} / \bar{x}_v$, $\mu(x'_{iv}) = \mu(\bar{x}_v)$;

$$\underline{x}'_{iv} = (\bar{x}_{iv} - x_{iv}) / (\bar{x}_v - \underline{x}_v) = \{< x'_{iv}, \mu(x'_{iv}) >\}, \quad (21)$$

где $x'_{iv} = (\bar{x}_{iv} - x_{iv}) / (\bar{x}_v - \underline{x}_v)$, $\mu(x'_{iv}) = \mu(\bar{x}_v)$;

$$\underline{x}'_{iv} = 1 - (x_{iv} / \bar{x}_v) = \{< x'_{iv}, \mu(x'_{iv}) >\}, \quad (22)$$

где $x'_{iv} = 1 - (x_{iv} / \bar{x}_v)$, $\mu(x'_{iv}) = \mu(\bar{x}_v)$;

$$\underline{x}'_{iv} = 1 - [(\bar{x}_{iv} - x_{iv}) / (\bar{x}_v - \underline{x}_v)] = \{< x'_{iv}, \mu(x'_{iv}) >\}, \quad (23)$$

где $x'_{iv} = 1 - [(\bar{x}_{iv} - x_{iv}) / (\bar{x}_v - \underline{x}_v)]$, $\mu(x'_{iv}) = \mu(\bar{x}_v)$.

Примечание. Выражения (17) и (18) получены в предположении, что минимально возможная оценка \underline{x}_v по v -му показателю задана в чётком виде (обычно $\underline{x}_v = 0$).

В формулах (17) и (18) не учитывается возможность приближённого оценивания самих значений показателей K_v . Однако, как было сказано выше (см. формулу (9)), такие ситуации могут вполне встречаться на практике. Поэтому, обобщим выражения (19) и (20), представив их с учётом нечёткого оценивания значений частного показателя K_v :

$$\bar{x}_v = \{< x_v, \mu(x_v) >\}.$$

Имеем:

$$\underline{x}'_{iv} = x_{iv} / \bar{x}_v = \{< x'_{iv}, \mu(x'_{iv}) >\}, \quad (24)$$

где $x'_{iv} = x_{iv} / \bar{x}_v$, $\mu(x'_{iv}) = \sup \min [\mu(x_{iv}), \mu(\bar{x}_v)]$;

либо

$$\underline{x}'_{iv} = 1 - (x_{iv} / \bar{x}_v) = \{< x'_{iv}, \mu(x'_{iv}) >\}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} x'_{iv} &= 1 - (x_{iv} / \bar{x}_v), \mu(x'_{iv}) = \\ &= \sup \min [\mu(x_{iv}), \mu(\bar{x}_v)]. \end{aligned}$$

Выражения для функций принадлежности $\mu(x'_{iv})$ в формулах (24) и (25) получены с помощью принципа обобщения Л. Заде [9].

Анализ способов задания критических значений L_v , $v \in \{1, \dots, s\}$ частных показателей также показал, что наиболее корректно оценивать их значения в виде нечётких величин:

$$\underline{L}_v = \{< L_v, \mu(L_v) >\}. \quad (26)$$

Необходимо учитывать, что при работе с неоднородными показателями их критические значения также должны быть подвергнуты преобразованию к значению в однородной шкале:

$$L'_v = \underline{L}_v / \bar{x}_v = \{< L'_v, \mu(L'_v) >\}, \quad (27)$$

где $L'_v = \underline{L}_v / \bar{x}_v$, $\mu(L'_v) = \sup \min [\mu(L_v), \mu(\bar{x}_v)]$;

либо

$$\underline{L}'_v = 1 - (\underline{L}_v / \bar{x}_v) = \{< L'_v, \mu(L'_v) >\}, \quad (28)$$

где

$$L'_v = 1 - (\underline{L}_v / \bar{x}_v), \mu(L'_v) = \sup \min [\mu(L_v), \mu(\bar{x}_v)].$$

Сущность преобразования x_v и L_v к однородной шкале показана на рис. 2.

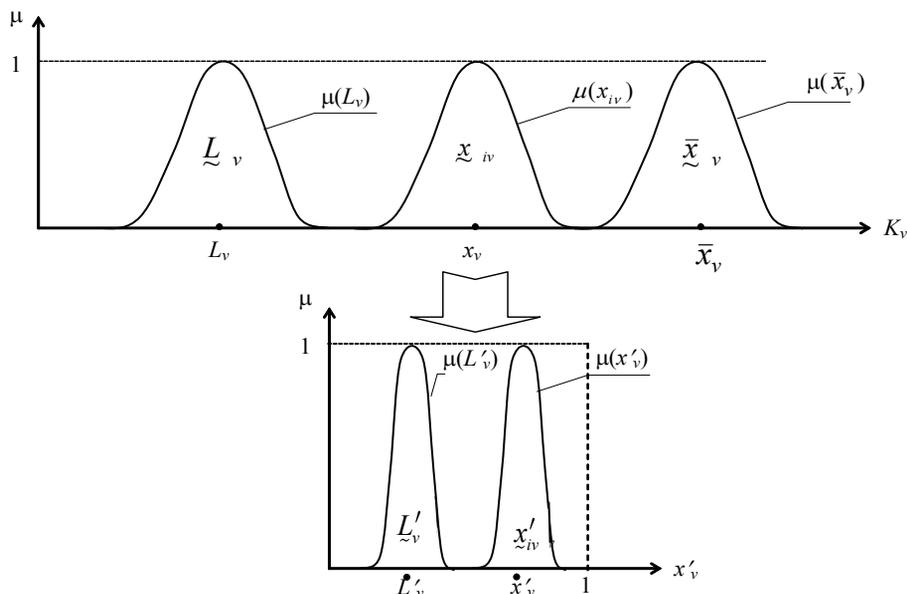


Рис. 2. Преобразование частного показателя к однородному виду

После того как рассмотрены основные особенности оценивания частных показателей, их критических значений и способы преобразования шкал отношений к однородному виду, исследуем особенности ранжирования альтернатив по правилу (10).

С учётом проведённого анализа в наиболее общей постановке задача выбора наилучшей альтернативы описывается выражением:

$$a^* = \arg \max_{a_i \in A} \left[\min_{v \in \{1, \dots, s\}} \{\alpha_v(x'_{iv} - L'_v)\} \right], \quad (29)$$

где x'_{iv} есть результат приближённого оценивания i -й альтернативы по v -му частному показателю, преобразованному к однородному виду.

Очевидно, что результатом преобразования $\alpha_v(x'_{iv} - L'_v)$ будет нечёткое множество Δ_{iv} взвешенного нормированного расстояния (удаления) оценки i -й альтернативы по v -му частному показателю от критического значения:

$$\Delta_{iv} = \{ \langle \delta_{iv}, \mu(\delta_{iv}) \rangle \}, \quad (30)$$

где $\delta_{iv} = \alpha_v(x'_{iv} - L'_v) = \alpha_v(x_{iv} / \bar{x}_v - L_v / \bar{x}_v)$, либо $\delta_{iv} = (L_v / \bar{x}_v - x_{iv} / \bar{x}_v)$ – в случае, когда лучшей альтернативе соответствует меньшее значение показателя. Функция принадлежности $\mu(\delta_{iv})$ соответственно оценивается выражениями:

$$\mu(\delta_{iv}) = \sup \min [\mu(x'_{iv}), \mu(L'_v)], \quad (31)$$

либо

$$\mu(\delta_v) = \sup \min [\mu(x'_{iv}), \mu(L'_v)]. \quad (32)$$

С учётом (31), задача (32) может быть записана в виде:

$$a^* = \arg \max_{a_i \in A} \left[\min_{v \in \{1, \dots, s\}} \Delta_{iv} \right]. \quad (33)$$

Таким образом, задача выбора рационального варианта сводится к задаче поиска минимальной нечёткой оценки удаления каждой альтернативы от критического значения по всем частным показателям и, затем, выбора среди таких альтернатив наилучшей по максимальному удалению.

Для ранжирования нечётких множеств можно воспользоваться одним из известных методов, описанных в литературе, например методом сравнения нечётких подмножеств единичного интервала [10]. Согласно этому методу, сравнение нечётких множеств может производиться на основе так называемой функции упорядоченности, представляющей собой скалярное число из единичного интервала.

Пусть \underline{A} – нечёткое подмножество единичного интервала $\underline{A} = \{ \langle x, \mu_{\underline{A}}(x) \rangle \}$, $x \in [0; 1]$. Определим уровневое множество как

$$A_\alpha = \{ x \mid \mu_{\underline{A}}(x) \geq \alpha \},$$

где α есть некоторый заданный уровень, $0 < \alpha \leq 1$. Пусть $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ есть соответственно левая и правая границы множества A_α . Определим функцию $M(\alpha)$ как среднюю величину интервала $[a(\alpha), b(\alpha)]$, т.е.

$$M(\alpha) = \frac{a(\alpha) + b(\alpha)}{2}.$$

Тогда, функция упорядоченности $F(\underline{A})$ может быть рассчитана как

$$F(\underline{A}) = \frac{\int_0^{\alpha_{\max}} M(\alpha) d\alpha}{J}, \quad (34)$$

где $J = 1/da$.

При практических расчётах задаются некоторым интервалом дискретизации da множества значений α , так что оно разбивается на конечное число непересекающихся интервалов: $0 < \alpha \leq da$, $da < \alpha \leq 2da, \dots, 1 - da < \alpha \leq 1$.

Для каждого j -го интервала находится значение $M_j(\alpha)$, затем рассчитывается приближённое значение $F(\underline{A})$:

$$F(\underline{A}) \approx \frac{\sum_{j=1}^J M_j(\alpha)}{J}. \quad (35)$$

Таким образом, по функции упорядоченности можно проанжировать нечёткие множества $\underline{\Delta}_{iv}$ и $\underline{\Delta}_{imin}$, что позволяет выбрать наиболее предпочтительную альтернативу a^* , то есть определить рациональную номенклатуру эталонной базы измерительного комплекса (ПЛИТ).

Литература

1. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
2. Алексеев А.В. Интерпретация и определение функций принадлежности нечётких множеств // Методы и системы принятия решений / Рижский политехнический институт. – Рига: Изд-во РПИ, 1979. – С. 42–50.
3. Борисов А.Н., Вульф Г.Н., Осис Я.Я. Методика оценки функций принадлежности элементов размытого множества // Кибернетика и диагностика. – 1970. – Вып. 4. – С. 125–134.
4. Новиков А.Н., Нечай А.А., Малахов А.В. Математическая модель обоснования вариантов реконфигурации, распределенной автоматизированной контрольно-измерительной системы // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2016. – Выпуски 1–2. – С. 56–59.
5. Hokkannen, J., Salminen, P. ELECTRE III and IV Decision Aids in an Environmental Problem // J. of Multi-Criteria Decision Analysis. – 1997. – V. 6.
6. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы: учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 240 с.
7. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей: примеры использования. – Рига: Зинатне, 1990. – 184 с.
8. Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В. и др. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. – М.: Радио и связь, 1989.
9. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.
10. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 208 с.