



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 535.3:539.27:541.64

Е.Б. Ипатов¹
С.П. Кузнецов²
И.В. Мешков³
А.В. Шелагин⁴

E.B. Ipatov
S.P. Kuznetsov
I.V. Meshkov
A.V. Shelagin

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛНЫХ СЕЧЕНИЙ РАССЕЯНИЯ ОЧЕНЬ ХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ НА СПЛОШНОМ БЕСКОНЕЧНОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

NUMERICAL SIMULATION OF THE TOTAL SCATTERING CROSS SECTIONS OF VERY COLD NEUTRONS BY THE INFINITE SOLID CIRCULAR CYLINDER

Данная работа продолжает развивать методику определения параметров углеродных нанотрубок с помощью очень холодных нейтронов (ОХН). Представлены полные сечения упругого рассеяния ОХН на сплошном бесконечном круговом цилиндре, используемом в качестве модели нанотрубки. Они были вычислены на основе построения точного решения скалярного уравнения Шрёдингера методом разделения переменных. Проведено сравнение значений полных сечений упругого рассеяния, рассчитанных на основе строгой теории, и значений этих величин, вычисленных в первом борновском приближении. Результаты сравнения представлены в виде графиков, построенных для различных значений радиуса нанотрубки $R = 25, 50, 70$ и 90 нм.

Ключевые слова: нейтронная оптика, ядерный оптический потенциал, волна де Бройля, полные сечения рассеяния, численное моделирование, нанодиагностика.

This work continues to develop the techniques of definition the parameters of carbon nanotubes by means of very cold neutrons (VCN). In the work are given the total cross sections for elastic scattering of VCN by the infinite solid circular cylinder, which is used as a model of the nanotube. They were calculated on the base on the construction of the exact solutions of the scalar Schrödinger equation by separation of variables. We compared the values of the total elastic scattering cross sections calculated on the basis of a rigorous theory, and the values of these quantities, calculated in the first Born approximation. The results of comparison are presented in the form of graphs, which are constructed for the different values of the nanotube radius $R = 25, 50, 70$ and 90 nm.

Keywords: neutron optics, nuclear optical potential, de Broglie wave, total scattering cross sections, numerical simulation, nanodiagnostics.

Введение

Макроскопические свойства материалов

¹ Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры информационных технологий и естественно-научных дисциплин НОУ ВПО «Российский новый университет».

² Кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник нейтронно-физического отдела Физического института Российской академии наук им. П.Н. Лебедева (ФИАН).

сильно зависят от элементов структуры с характерными размерами от единиц до сотен нанометров. Введение наноразмерных наполнителей

³ Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник нейтронно-физического отдела Физического института Российской академии наук им. П.Н. Лебедева (ФИАН).

⁴ Доктор физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского физико-технического института (государственный университет).

в полимерную матрицу нанокompозитов позволяет создавать многофункциональные материалы с высоким модулем упругости, большой электропроводностью и теплопроводностью [1]. Они также обладают повышенной прочностью и эластичностью. При создании новых материалов с улучшенными свойствами в качестве наполнителя довольно часто используются многослойные углеродные нанотрубки (МУНТ). Перечисленные выше макроскопические свойства зависят от параметров этих трубок и их распределения в полимерной матрице нанокompозита. Для определения параметров МУНТ широко используется электронная микроскопия, рентгеновская дифракция и малоугловое рассеяние рентгеновских лучей. Эти методы исследования структуры композиционных материалов наряду с неоспоримыми достоинствами обладают и существенными недостатками. Так, например, электронная микроскопия требует сложной предварительной подготовки образца толщиной от 10^{-2} до 10 мкм. С помощью рентгеновских лучей нельзя исследовать магнитные структуры. Из-за сильного поглощения рентгеновских лучей и электронных пучков крайне затруднительно применение этих методик при увеличении толщины исследуемых образцов.

Развитие нейтронных методов исследования вещества, использующих высокопоточные пучки нейтронов, привело к созданию уникальных установок на импульсных и стационарных реакторах, таких, как трехкристалльные спектрометры, спектрометры обратного рассеяния, малоугловые дифрактометры с высоким разрешением по переданному импульсу. Создание и функционирование подобных приборов требует больших затрат, высокого уровня математического обеспечения. В то же время использование для исследования нейтронов очень низких энергий значительно упрощает экспериментальные установки, хотя и усложняет теоретическое обоснование.

Очень холодные нейтроны (ОХН) – это нейтроны, двигающиеся в вакууме с энергий $5 \cdot 10^{-7} < \varepsilon_n < 5 \cdot 10^{-7}$ (длина волны де Бройля $1 < \lambda_n < 100$ нм). При таких энергиях нейтроны эффективно и на большие углы рассеиваются на элементах структуры с характерными размерами от единиц до сотен нанометров. При взаимодействии такой волны с препятствием меняется состояние нейтронов, состояние же мишени не изменяется, так как энергия ОХН много меньше энергии химических связей между атомами и энергии элементарных возбуждений. В этом случае процесс взаимодействия нейтронов с

исследуемым образцом сводится к отражению, преломлению и дифракции нейтронной волны. Свойства очень холодных нейтронов определяются оптическим ядерным потенциалом [2–4]:

$$V(\mathbf{r}) = (2\pi\hbar^2 / m_n) \bar{b} \rho(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{r} – текущая координата нейтрона; \hbar – постоянная Планка; m_n – масса нейтрона; $\rho(\mathbf{r})$ – плотность частиц исследуемого образца. Константа \bar{b} – это усреднённое значение когерентных амплитуд рассеяния на связанных ядрах рассеивающей системы. Квадрат показателя преломления, полностью описывающий оптические свойства такой среды, определяется выражением:

$$m^2 = 1 - V / E, \quad (2)$$

где E – энергия нейтрона, падающего из вакуума. Отметим также, что оптический ядерный потенциал $V(\mathbf{r})$ – это макроскопическая величина. Он зависит только от термодинамического состояния системы и не зависит от мгновенных положений атомов, из которых состоит рассеивающая система. Мы заменили традиционное обозначение коэффициента преломления n на символ m , для того чтобы сохранить обычные обозначения и индексы при записи решения уравнения Бесселя (функций J_n и функций $H_n^{(1)}$).

В газах, жидкостях и аморфных твёрдых телах $V(\mathbf{r})$ – это константа. Значит, и показатель преломления зависит только от скорости нейтронов, падающих из вакуума на исследуемый образец $5 < v_n < 100$ м/с. Более подробно смотри теоретические исследования, выполненные в работах [5–9].

В этих работах было подробно обосновано использование простого метода ослабления ОХН, позволяющего получить информацию о наноструктуре исследуемых материалов при пропускании пучка нейтронов через образец, и исследовании зависимостей полных сечений упругого некогерентного рассеяния ОХН от длины волны нейтрона.

Цель настоящей работы – рассмотреть и сравнить поведение полных сечений упругого рассеяния ОХН, построенных на основе решения задачи рассеяния – точного решения скалярного уравнения Шрёдингера и первого борновского приближения для ОХН. Углеродные нанотрубки мы будем описывать как цилиндры, длина которых во много раз превосходит радиус R . Оптический ядерный потенциал $V(\mathbf{r})$ – это константа, равная U .

Теоретические основы метода рассеяния ОХН

Фундаментальная величина в нейтронной оптике – когерентная волна, $\psi(\mathbf{r})$. Она обеспечивает полное описание всех когерентных упругих процессов рассеяния. В области достаточно больших расстояний \mathbf{r} между рассеивателем и точкой наблюдения она удовлетворяет одночастичному скалярному уравнению Шрёдингера [3]:

$$\left[(\hbar^2 / 2m_n) \Delta + U \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

В уравнении (3) \hbar – это постоянная Планка; m_n – масса нейтрона; Δ – оператор Лапласа; U – оптический ядерный потенциал; E – энергия падающего нейтрона. Отметим, что потенциал U и, следовательно, решение $\psi(\mathbf{r})$ – это макроскопические величины.

Выбор решений уравнения (3) диктуется видом симметрии, которая имеется в задаче. Нанотрубки лучше всего описывать, как цилиндры, длина которых во много раз превосходит диаметр. Поэтому построим точное решение задачи рассеяния на бесконечно длинном круговом цилиндре.

Итак, однородная плоская волна $\psi_i = \exp(ik_e \cdot \mathbf{x})$, распространяющаяся в направлении вектора $\mathbf{e}_i = -\sin \zeta \mathbf{e}_x - \cos \zeta \mathbf{e}_z$, падает на бесконечно длинный прямой круговой цилиндр радиуса R . Ось цилиндра совпадает с осью OZ прямоугольной системы координат (x, y, z) . Вектор \mathbf{e}_i лежит в плоскости (x, z) , образуя с осью z угол ζ . Волновой вектор рассеянной волны \mathbf{k}_s лежит в плоскости, проходящей через ось z .

Запишем уравнение (3) в цилиндрической системе координат (r, φ, z) :

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \psi(r, \varphi, z) = 0. \quad (4)$$

Однозначные по φ решения уравнения (4) имеют вид:

$$\psi_n(r, \varphi, z) = Z_n(\rho) e^{in\varphi + izz}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

где $\rho = r \sqrt{k^2 - h^2}$, а Z_n – решение уравнения Бесселя:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} Z_n \right) + (\rho^2 - n^2) Z_n = 0. \quad (6)$$

Линейно-независимыми решениями уравнения (6) являются функции Бесселя первого и второго рода J_n и Y_n с целочисленными значениями индекса n . Величина константы разделения h определяется видом падающего поля и необходимостью выполнения граничных условий на поверхности рассматриваемого цилиндра (нанотрубки).

Используя разложение по собственным функ-

циям и граничные условия на поверхности цилиндра, получим для падающей волны ψ_i , внутренней волны ψ_1 и рассеянной волны ψ_s выражения:

$$\psi_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(kr \sin \zeta) e^{in\varphi - ik \cos \zeta z}, \quad (7)$$

$$\psi_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (-i)^n J_n(kr \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}) e^{in\varphi - ik \cos \zeta z}, \quad (8)$$

$$\psi_s(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n (b_n / 2) H_n^{(1)}(kr \sin \zeta) e^{in\varphi - k \cos \zeta z}. \quad (9)$$

В формуле (9) множитель $1/2$ введён для удобства. Так как при упругом рассеянии число частиц сохраняется (квадрат амплитуды сходящейся волны равен квадрату амплитуды расходящейся волны), то мы можем записать:

$$|1 + \tilde{b}_n|^2 = 1, \quad \tilde{b}_n = e^{2i\delta_n} - 1, \quad \tilde{b}_n = \frac{b_n}{2}. \quad (10)$$

Здесь δ_n – фазовый сдвиг. Амплитуда рассеяния $f(\varphi)$ определяется из соотношения:

$$u_s \equiv \psi_i + \psi_s - e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \rightarrow f(\varphi) \frac{e^{ikr \sin \zeta}}{\sqrt{r}}, \quad (11)$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k \sin \zeta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (b_n / 2) e^{in\varphi - i\pi/4 - ik \cos \zeta z}. \quad (12)$$

Коэффициенты a_n и b_n находятся из граничных условий:

$$\psi_i(R) + \psi_s(R) = \psi_1(R),$$

$$[\partial / \partial r (r \cdot \psi_i(r) + r \cdot \psi_s(r))]_{r=R} = [\partial / \partial r (r \cdot \psi_1(r))]_{r=R}.$$

Используя тождество

$$J_{n-1}(x) H_n^{(1)}(x) - J_n(x) H_{n-1}^{(1)}(x) = 2 / \pi i x, \quad (13)$$

можно получить:

$$a_n = \frac{J'_n(x) H_n^{(1)}(x) - J_n(x) H_n^{(1)'}(x)}{m^* J'_n(x') H_n^{(1)}(x) - J_n(x') H_n^{(1)'}(x)} = \frac{2 / \pi i x}{m^* J'_n(x') H_n^{(1)}(x) - J_n(x') H_n^{(1)'}(x)}, \quad (14)$$

$$b_n = \frac{m^* J'_n(x') J_n(x) - J_n(x') J'_n(x)}{m^* J'_n(x') H_n^{(1)}(x) - J_n(x') H_n^{(1)'}(x)}. \quad (15)$$

В формулах (13), (14) и (15) введены обозначения $x' = kR \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$, $x = kR \sin \zeta$; штрих, стоящий сверху около функций J_n и $H_n^{(1)}$, означает дифференцирование этих функций по их аргументам – либо x , либо x' ; $m^* \equiv x' / x = \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta} / \sin \zeta$, $m^2 = 1 - U / E$ – показатель преломления препятствия.

Вычислив коэффициенты b_n , можно определить дифференциальное сечение рассеяния на единицу длины цилиндра:

$$d\sigma_{sc} = |f|^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi k \sin \zeta} |b_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\varphi|^2 d\varphi \quad (16)$$

Выполнив интегрирование дифференциального сечения рассеяния на единицу длины цилиндра $d\sigma_{sc}$ по углу φ , мы получим следующую формулу для вычисления полного сечения рассеяния единицей длины прямого кругового цилиндра:

$$\sigma_{sc} = \frac{1}{k \sin \zeta} \left(|b_0|^2 + 2\sum_1^{\infty} |b_n|^2 \right). \quad (17)$$

Рассмотрим задачу рассеяния ОХН бесконечным длинным круговым цилиндром радиуса R при нормальном к оси цилиндра падении ОХН ($\zeta = \frac{\pi}{2}$) в первом борновском приближении [10].

Потенциальная энергия – оптический ядерный потенциал – U рассматривается как возмущение. Волновую функцию мы будем искать в виде $\psi = \psi_0 + \psi_1$, где функция $\psi_0 = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ – соответствует падающей частице. В цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) расходящаяся волна на больших расстояниях от оси имеет асимптотическое выражение функции Ганкеля первого рода [10], и поправка ψ_1 к волновой функции ψ_0 на больших расстояниях от оси цилиндра R_0 будет:

$$\psi_1 = -\frac{m_n}{2\pi\hbar^2} \int U(\rho, z) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \cdot i\pi H_0^{(1)}(k\rho) \rho d\rho d\varphi = f_B(\varphi) \frac{e^{ikR_0}}{\sqrt{R_0}}. \quad (18)$$

Здесь m_n – масса нейтрона; отсюда амплитуда рассеяния $f_B(\varphi)$:

$$f_B(\varphi) = -\frac{m_n}{\hbar^2} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}} \int \frac{\hbar^2}{2m_n} (4\pi N b_c) e^{-iq\rho} \rho d\rho d\varphi = -\sqrt{\frac{2\pi}{k}} (N b_c) e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{2J_1(qR)}{qR} \pi R^2, \quad [cm^{1/2}] \quad (19)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s$ – вектор рассеяния, $q = 2k \sin \varphi / 2$.

Сделав в (19) замену переменных $\theta = \pi - \varphi$, получим формулу для вычисления дифференциального сечения упругого рассеяния ОХН

$$\frac{d\sigma_B}{d\theta} = \frac{2\pi}{k} (N b_c)^2 \left(\frac{2J_1(2k \sin(\theta/2)R)}{2kR \sin \theta / 2} \right)^2 \times (\pi R^2)^2 \quad [cm] \quad (20)$$

и полного сечения упругого рассеяния

$$\sigma_B = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right)_B d\varphi = \frac{8\pi}{k} (N b_c \pi R^2)^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{J_1(2kR \sin \theta / 2)}{2kR \sin \theta / 2} \right]^2 d\varphi \quad (21)$$

в борновском приближении.

Обсуждение результатов численного моделирования

На рис. 1–4 приведены диаграммы рассеяния, вычисленные по формулам, полученным на основе решения уравнения Шрёдингера методом разделения переменных, и по формулам борновского приближения. Для вычисления коэффициентов b_n в (17) использовались алгоритмы, изложенные в работах [13–14]. Время вычисления можно существенно сократить, если воспользоваться методами волновой теории катастроф [15–22]. На графиках по вертикальной оси отложены полные сечения рассеяния в логарифмическом масштабе (одно деление – 10 единиц), по горизонтальной оси – скорость нейтронной волны в вакууме. Толстая сплошная линия представляет результат вычисления по строгой формуле (17) полного сечения рассеяния σ_{sc} единицей длины прямого кругового цилиндра радиуса R , моделирующего рассеиватель. Тонкая линия – по формуле борновского приближения (21).

Оптический ядерный потенциал для материала рассеивателя $U = 1,81 \cdot 10^{-7}$ эВ. Значение потенциала соответствует граничной скорости ОХН $v_{cp} = 5,90$ м/с. Все расчётные значения представлены для нейтронов, двигающихся в вакууме со скоростями $6 < v_n < 100$ м/с. Значения радиусов цилиндров представлены в подписях к рисункам.

Полное время вычисления результатов, представленных на рис. 1, меньше 10 секунд на ПЭВМ с процессором Intel Core I5 (тактовая частота процессора – 2,4 ГГц.). По мере увеличения значения радиуса R время работы программы увеличивается до одной минуты за счёт увеличения значения n , при котором останавливается суммирование в формуле (17). При написании

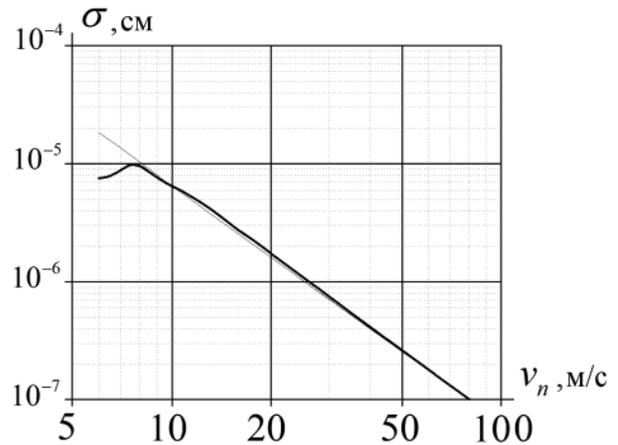


Рис. 1. Полное сечение упругого рассеяния ОХН на цилиндре с радиусом $R = 25$ нм

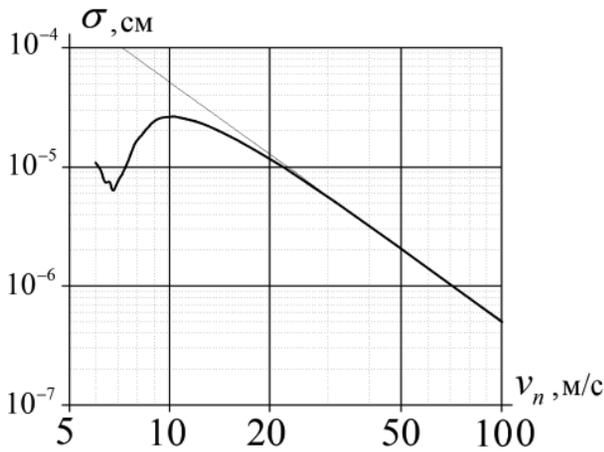


Рис. 2. Полное сечение упругого рассеяния ОХН на цилиндре с радиусом $R = 50$ нм

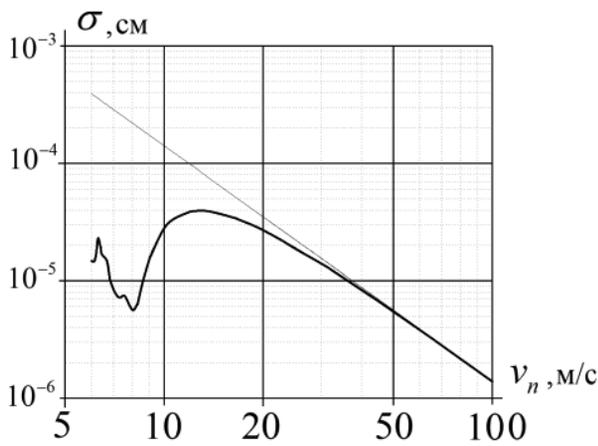


Рис. 3. Полное сечение упругого рассеяния ОХН на цилиндре с радиусом $R = 70$ нм

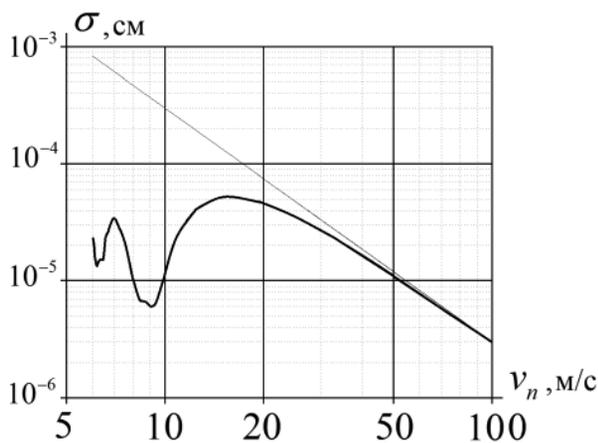


Рис. 4. Полное сечение упругого рассеяния ОХН на цилиндре с радиусом $R = 90$ нм

программы в качестве языка программирования использовался Фортран-90.

Из представленных в данном разделе результатов видно, что формулы, полученные в борновском приближении, можно использовать для интерпретации экспериментальных данных только для сплошных трубок, внешний радиус которых $R < 50$ нм. При увеличении радиуса на интервале скоростей от 6 до 20 м/сек на графиках наблюдаются дополнительные минимумы и максимумы, отсутствующие в результатах, полученных в борновском приближении. Различие между строгим и приближённым решениями в несколько раз превосходит ошибку измерения полного сечения рассеяния с помощью время-пролётного спектрометра ОХН [6].

В заключение отметим, что методика определения параметров углеродных нанотрубок основана на анализе экспериментальных данных по рассеянию очень холодных нейтронов при прохождении нейтронов через образец и математическом моделировании этого процесса. Алгоритмы, представленные в этой статье, позволяют вычислять полные сечения упругого рассеяния, необходимые для такого моделирования.

Литература

1. Dubnikova, I., Kuvardina, E., Krasheninnikov, V., Lomakir, S., Tchmutin, I. and Kuznetsov, S. The effect of multiwalled carbon nanotube dimensions on the morphology, mechanical and electrical properties of melt mixed polypropylene – based composites // *J. Appl. Polimer. Science.* – 2010. – V. 117. – P. 259.
2. Гуревич И.И., Тарасов Л.В. Физика нейтронов низких энергий. – М.: Наука, 1965.
3. Sears, V.E. Fundamental aspects of neutron optics // *Physics Reports (Review section of Physics letters).* – 1982. – V. 82. – № 1. – P. 1–29.
4. Игнатович В.К. Нейтронная оптика. – М.: Физматлит, 2006.
5. Антонов А.В., Исаков А.И., Мешков И.В., Перекрестенко А.Д., Шелагин А.В. Рассеяние очень холодных нейтронов на неоднородностях различных форм // *Краткие сообщения по физике ФИАН.* – 1985. – № 10. – С. 48.
6. Антонов А.В., Исаков А.И., Кузнецов С.П., Мешков И.В., Перекрестенко А.Д., Шелагин А.В. Исследование неоднородностей в ванадии и бериллии методом очень холодных нейтронов // *Физика твердого тела.* – 1984. – № 26. – С. 1585.
7. Антонов А.В., Герасимов В.И., Исаков А.И., Кузнецов С.П., Мешков И.В., Тарасов С.Т. Взаимодействие очень холодных нейтронов с блок-

сополимером типа полистирол-полибутадиен-полистирол // Письма в ЖЭТФ. – 1985. – Т. 41. – № 5. – С. 210.

8. Ковалева Н.Ю., Бревнов П.Н., Гринев В.Г., Кузнецов С.П., Позднякова И.В., Чвалун С.Н., Синевич Е.А., Новокшенова Л.А. Синтез нанокомпозигов на основе полиэтилена и слоистых силикатов методом интеркаляционной полимеризации // Высокомолекулярные соединения А. – 2004. – Т. 46. – № 6. – С. 1–7.

9. Kuznetsov, S.P., Dubnikova, I.L., Litvin, V.S., Meshkov, I.V., Shelagin, A.V. and Udovenko, A.I. Acta Physica Polonica A. – 2010. – № 117. – С. 727.

10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – М.: Наука, 1974.

11. Г. ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. – М.: ИЛ, 1961.

12. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986. – 664 с.

13. Ипатов Е.Б., Гридин Д.В. Вычисление интегралов от быстро осциллирующих функций // Проблемы распространения и дифракции электромагнитных волн. – М.: МФТИ, 1995. – С. 47–53.

14. Ипатов Е.Б., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численные методы расчёта специальных функций волновых катастроф // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1985. – Т. 25. – № 2. – С. 224–236.

15. Крюковский А.С. Локальные равномерные асимптотики волновых полей в окрестности основных и краевых каспидных каустик // Радиотехника и электроника. – 1996. – Т. 41. – № 1. – С. 59–65.

16. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Чистяков Д.Н. Компрессия, фокусировка и инверсия частотно-модулированных радиоимпульсов в пространственно-временных областях типа катастроф // Радиотехника и электроника. – 2001. – Т. 46. – № 7. – С. 816–825.

17. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Классификация и равномерное асимптотическое описание пространственно-временных трехмерных краевых фокусировок волновых полей // Радиотехника и электроника. – 2005. – Т. 50. – № 10. – С. 1221–1230.

18. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Классификация унимодальных и бимодальных угловых катастроф // Функциональный анализ и его приложения. – 1992. – Т. 26. – Вып. 3. – С. 77–79.

19. Kryukovsky, A.S., Lukin, D.S., Palkin, E.A., Rastyagaev, D.S. Wave catastrophes: types of focusing in diffraction and propagation of electromagnetic waves // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2006. – Т. 51. – № 10. – P. 1087.

20. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Построение равномерной геометрической теории дифракции методами краевых и угловых катастроф // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43. – № 9. – С. 1044–1060.

21. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые катастрофы и асимптотики // ДАН СССР. – 1986. – Т. 291. – № 4. – С. 823–827.

22. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики и угловые катастрофы // Доклады РАН. – 1995. – Т. 341. – № 4. – С. 456–459.