УДК 794.1

Б.И. Седунов[1]

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССТАНОВКИ *N* НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФЕРЗЕЙ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ С $N \times N$ ПОЛЕЙ

Задача расстановки N невзаимодействующих ферзей на шахматной доске с N × N полей привлекает большое внимание шахматистов, математиков, программистов и разработчиков систем искусственного интеллекта. Известно множество расстановок как для стандартной доски с 8 × 8 полей, так и для досок вплоть до 1000 × 1000 полей. В данной работе производится компьютерное моделирование расстановок ферзей на шахматной доске с N × N полей для визуального анализа и поиска регулярных расстановок, допускающих обобщение на произвольное, сколь угодно большое число N. Найдены регулярные решения для N = 6k + m, где k = 1, 2, 3... – произвольное положительное целое число, а m = –2, –1, 0, 1. Выяснено, что регуляризация затруднена для m = 2 или 3. Найдены псевдорегулярные решения для N = 8 и 9, не существующие при k > 1. Данный подход демонстрирует эффективность взаимодействия исследователя с компьютером, при котором исследователь генерирует алгоритмы решения задачи, а компьютер возвращает ему визуальные образы, допускающие обобщение и математическую индукцию.

Ключевые слова: *задача ферзей, компьютерное моделирование, визуальный анализ, взаимодействие человек – компьютер, математическая индукция, искусственный интеллект.*

B.I. Sedunov

THE NON-INTERACTING N QUEEN'S PLACING MODELING FOR THE $N \times N$ CHESS BOARD

The non-interacting N Queen's placement on the N × N chess board attracts large attention of chess players, mathematicians, programmers, artificial intelligence systems creators. Multiple decisions are known both for a standard 8 × 8 squares chess board and for up to 1000 × 1000 squares chess boards. This paper is about computerized modeling of the N × N squares chess board for visual analysis and search for regular decisions permitting generalization for any large N. The regular decisions have been found for N = 6k + m, where k = 1, 2, 3... is any positive integer, and m = –2, –1, 0, 1. The regularization for m = 2 or 3 has appeared to be impossible. But for N = 8 and 9 the pseudoregular decisions have been found, which do not exist for k > 1. This approach demonstrates how effective may be the human-computer interaction, in which the researcher generates algorithms to solve the problem and the computer returns visual images permitting generalization and mathematical induction.

Keywords: *N Queen's problem, computerized modeling, visual analysis, human-computer interaction, mathematical induction, artificial intelligence.*

Введение

Проблема расстановки восьми невзаимодействующих ферзей на стандартной шахматной доске достаточно широко известна с 1850 года [1]. Согласно Википедии, она звучит так: «Расставить на стандартной 64-клеточной шахматной доске восемь ферзей так, чтобы ни один из них не находился под боем другого. Подразумевается, что ферзь бьет все клетки, расположенные по вертикалям, горизонталям и обеим диагоналям» [2].

Известно и обобщение задачи на квадратное поле со стороной *N* [1]. В докомпьютерную эру основное внимание было привлечено к стандартной шахматной доске с $N = 8$. Для нее найдено 92 решения. Компьютеры позволили существен-

[1] Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры ТСиИБ АНО ВО «Российский новый университет».

но увеличить число N. При этом они действуют усовершенствованными методами перебора возможных размещений, которые при $N > 1000$ требуют нереально больших затрат времени и сверхвысокой производительности компьютеров. Поэтому в настоящее время большие усилия брошены на поиск эффективных алгоритмов компьютерного решения задачи, исключающих тупой перебор вариантов. Университет Сент Эндрюс в Великобритании назначил приз в 1 миллион долларов тому программисту, который сможет составить программу решения этой задачи [3]. Предполагается, что подобные программы помогут решить многие сложнейшие проблемы, стоящие перед человечеством.

В настоящее время для поиска размещений N ферзей развивают методы искусственного интеллекта (ИИ), призванные существенно сократить число вариантов перебора пробных ситуаций на шахматной доске. Задача расстановки N ферзей служит одним из тестов для новых систем ИИ [4]. Проектирование системы ИИ применительно к шахматным задачам требует тщательной предварительной разработки программ и предполагает полную пассивность исследователя в процессе ожидания от компьютера готового решения.

В данной статье представлен альтернативный подход, при котором исследователь генерирует алгоритмы достаточно простого, но регулярного размещения невзаимодействующих ферзей, а компьютер обеспечивает ему возможность визуального анализа результирующей структуры расстановки ферзей на доске. Визуальный анализ позволяет исследователю выявить достоинства и недостатки исходного алгоритма. Тем самым удается провести разбиение ряда N на отдельные ряды со своей специфической структурой регулярного размещения и с особыми пределами их применения.

Визуальный анализ больших объемов компьютерных данных уже помог автору сделать ряд открытий в области молекулярных взаимодействий с опорой на точные теплофизические данные [5] и даже разработать новый метод интегрирования одного вида дифференциальных уравнений [6].

В настоящей работе не ставится задача поиска всех возможных решений при заданном значении числа N. Вместо этого идет поиск регулярных решений при определенных значениях N, визуальный анализ которых позволяет применить метод математической индукции для экстраполяции на произвольно большие значения N, в том числе и превышающие 1000.

1. Визуальный анализ задачи N ферзей на основе взаимодействия человек – компьютер

В развиваемом здесь подходе к задаче N ферзей исследователь генерирует первичное регулярное расположение невзаимодействующих ферзей для достаточно малого числа N. Под регулярностью здесь подразумевается достаточно простая структура изображения шахматной доски с расположенными на ней невзаимодействующими ферзями. Начнем с известного расположения ферзей при наименьшем возможном $N = 4$. Это изящное расположение выглядит как регулярное, рис. 1. Ферзь в англоязычной шахматной литературе называется Queen (королева), поэтому будем обозначать поля, занятые ферзем, буквой Q.

	1	2	3	4
1			Q	
2	Q			
3				Q
4		Q		

Рис. 1. Регулярное расположение невзаимодействующих ферзей при $N = 4$

В этом расположении все ферзи расставлены на доске ходом конем, обеспечивающим их нахождение на разных вертикалях, горизонталях и диагоналях. Заметно подобие расположения ферзей в левой половине доски расположению в правой половине доски. Данное расположение легко переходит в регулярное расположение для $N = 5$, рис. 2. На рисунке темным фоном отмечены добавленные столбец и строка к доске с $N = 4$.

Рисунок 2 показывает, что при $N = 5$ сохранилась регулярность, присущая $N = 4$. Но для того чтобы развить этот подход на следующее число $N = 6$, придется вставить новый столбец после столбца с номером 2, чтобы левая полови-

	1	2	3	4	5
1			Q		
2	Q				
3				Q	
4		Q			
5					Q

Рис. 2. Преобразование регулярного расположения при четном значении $N = 4$ в расположение при следующем нечетном $N = 5$ путем добавления к доске столбца справа и строки снизу и постановки пятого ферзя в правый нижний угол

на доски имела три столбца, рис. 3. На рисунке темным фоном отмечены добавленные к доске с $N = 5$ столбец с номером 3 в середине доски и строка с номером 6. Дополнительный ферзь появился на пересечении нового столбца с новой строкой. Регулярность, присущая доске с четным числом $N = 4$, перешла в подобную регулярность при четном $N = 6$: изображение расположения ферзей в левой половине доски подобно изображению в правой половине.

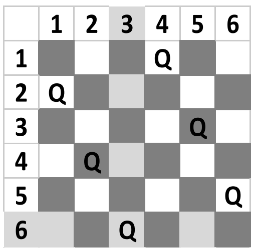

Рис. 3. Преобразование изображения доски с $N = 5$ в изображение доски с $N = 6$ путем добавления нового столбца в середину доски и новой строки внизу доски

Как и в случае с генерацией регулярного расположения при нечетном $N = 5$, для перехода от $N = 6$ к $N = 7$ достаточно добавить новый столбец справа, а новую строку поставить внизу доски, рис. 4.

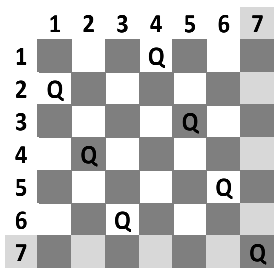

Рис. 4. Преобразование регулярного расположения при $N = 6$ в регулярное расположение при $N = 7$

Регулярные расположения при четных N не затрагивают главную диагональ, начинающуюся с поля (1, 1). Поэтому при образовании изображения доски с нечетным N удается поставить нового ферзя, не атакующего других ферзей, в конец этой диагонали. Это правило распространяется на все значения N: *если найдено регулярное расположение невзаимодействующих ферзей при четном N, то генерация изображения при следующем нечетном N сводится к постановке нового ферзя в конец главной диагонали.*

Поэтому далее будем рассматривать только регулярные расстановки при четных значениях N. Мы видим, что компьютерное изображение регулярных расстановок невзаимодействующих ферзей позволяет исследователю оперировать образами регулярных расстановок, допуская возможность обобщения картины регулярной расстановки на произвольное, сколь угодно большое число N.

Создается излишне оптимистичное впечатление, что переход от N к $N + 1$ соответствует методу математической индукции для всех N. Но дальнейший переход к $N = 8$ вносит коррекцию в применение метода математической индукции, который не срабатывает при $N = 6k + m$, где $k = 1, 2, 3...$ – произвольное положительное целое число, а m равняется 2.

Расстановку ферзей на стандартной доске с $N = 8$ можно отнести к классу псевдорегулярных размещений, рис. 5, тогда как на стандартной доске для 100-клеточных шашек вновь восстанавливается регулярное размещение, рис. 6.

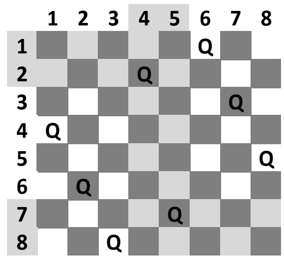

Рис. 5. Преобразование регулярного размещения ферзей на доске с $N = 6$ в псевдорегулярную расстановку при $N = 8$: темным фоном добавлена вновь введенная Z-образная зона шириной в две клетки, на которой показаны новые ферзи, расстановка которых нарушает прежнюю регулярность

Для генерации размещения ферзей при $N = 8$ из размещения при $N = 6$ пришлось сдвинуть левую половину доски с $N = 6$ не только на два столбца вправо, но и на две строки вверх. Эта процедура освободила строки с номерами 2 и 7 для помещения новых невзаимодействующих ферзей. Генерация размещения ферзей при $N = 9$ производится указанным выше методом помещения нового ферзя в нижний угол главной диагонали.

Размещение ферзей при $N = 10$ вновь становится регулярным. Поэтому для его генерации нельзя использовать псевдорегулярное расположение при $N = 8$. Воспользуемся исходным регулярным расположением при $N = 4$. Для расширения доски вставляем три столбца в середину доски и три столбца с правого края. Новые строки вставляем компактно внизу доски, рис. 6.

Как видно, при $k = 2$ и $m = –2$, соответствующим $N = 10$, вновь восстановлена прежняя регулярность. Выполнение этой закономерности проверено также и для $N = 16$ и $N = 22$. Значит, можно сформулировать новый принцип математической индукции применительно к задаче N

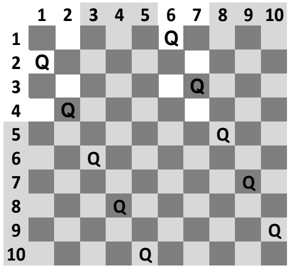

Рис. 6. Преобразование регулярного размещения ферзей на доске с $N = 4$ в регулярную расстановку при $N = 10$: темным фоном добавлена вновь введенная зона шириной в шесть клеток, на которой показаны новые ферзи, расстановка которых продолжает прежнюю регулярную картину

ферзей: *если существует регулярное размещение невзаимодействующих ферзей при определенном значении N, то регулярность будет сохраняться и для $N_k = N + 6k$, где k – любое, сколь угодно большое положительное целое число.*

2. Особенности регулярных расстановок *N* ферзей

• Регулярные расстановки возможны при $N = 6k + m$, где $k = 1, 2, 3...$ – произвольное положительное целое число, а $m = –2, –1, 0, 1$.

• Ферзи выстроены в две прямые линии в двух частях доски, в пределах этих линий они расставлены ходом коня, потому что в ближайшей окрестности ферзя размером 5 × 5 полей все восемь небитых полей образуются ходом коня от центрального ферзя.

• Изображение регулярной расстановки при четных N симметрично относительно поворота на 180°.

• Расстановка при четном N не затрагивает главных диагоналей доски.

• Регулярная расстановка при нечетном N образуется из расстановки при ближайшем четном числе ферзей помещением нового ферзя в угол доски, стоящий на продолжении одной из линий.

• При нечетном N на обеих главных диагоналях стоит по ферзю.

• Поворот регулярной расстановки на 90° и зеркальное отражение относительно средней линии доски дают новые регулярные расстановки.

• Общее число разных вариантов регулярных расстановок ферзей при фиксированном четном числе N равно четырем, а при нечетном – восьми.

Заключение

1. Компьютерное моделирование задачи о расстановке N невзаимодействующих ферзей на доске с N на N полей обеспечило визуальный анализ пробных расстановок и позволило обнаружить наличие регулярных расстановок при определенных значениях числа N.

2. В общем ряду чисел N обнаружены частные ряды N с периодом в шесть чисел; причем, частные ряды с $N = 6k + m$, где $k = 1, 2, 3...$ – произвольное положительное целое число, а $m = –2, –1, 0, 1$ обладают регулярностью расстановки ферзей, а два других частных ряда с $m = 2$ и 3 не имеют регулярных расстановок.

3. Визуальный анализ пробных расстановок позволил отбросить негодные варианты и обнаружить генетическую связь регулярных расстановок на досках с соседними номерами N.

4. При фиксированных значениях N может быть несколько вариантов регулярных расстановок ферзей, отличающихся друг от друга поворотом расстановки на 90° или зеркальным отражением от вертикальной, горизонтальной или диагональных осей доски.

5. Регулярные расстановки ферзей при больших N могут быть сгенерированы методом математической индукции для регулярных частных рядов N, что убеждает в наличии регулярных расстановок при больших значениях N, стремящихся к бесконечности.

6. На примере задачи о расстановке N невзаимодействующих ферзей мы убеждаемся в эффективности взаимодействия человек – компьютер в процессе анализа ситуации и решения задачи и в важности визуального анализа промежуточных и окончательных решений проблем.

Литература

1. Гик Е.Я. Шахматы и математика. – М. : Наука, 1983. – 176 с.

2. Задача о восьми ферзях. Википедия [Электронный ресурс]: https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_о_восьми_ферзях

3. ‘Simple’ chess puzzle holds key to $1m prize. Phys.org – Friday 1 September, 2017. [Электронный ресурс]. – https://phys.org/news/2017-09-simple-chess-puzzle-key-1m.html

4. Gent, P., Ch. Jefferson and P. Nightingale. Complexity of *n*-Queens Completion // J. of Artificial Intelligence Research. – 2017. – Volume 59. – Pp. 815–848 [Электронный ресурс]. – http://jair.org/papers/paper5512.html

5. Sedunov, B. Equilibrium Structure of Dense Gases, Proc. of the JEEP-2013, Nancy, MATEC Web of Conferences [Электронный ресурс]. – http://dx.doi.org/10.1051/matecconf/20130301002

6. Седунов Б.И. Метод численного интегрирования ОДУ первого порядка для компьютерного анализа теплофизических данных // Вестник Российского нового университета. – 2013. – Выпуск 4. – С. 25–28.