



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.913, 517.925, 519.21

Е.Л. Абрамова<sup>1</sup>  
Е.А. Палкин<sup>2</sup>  
А.А. Петрович<sup>3</sup>

Eu.L. Abramova  
Eu.A. Palkin  
A.A. Petrovich

**О ФОРМИРОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТИ  
РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ  
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

**ON THE ULTIMATE PROBABILITY  
DISTRIBUTION FORMATION  
FOR THE EQUILIBRIUM STATES  
OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS  
HAVING RANDOM PARAMETERS**

*Предложен метод анализа формирования равновесных состояний нелинейных динамических структур со случайными параметрами и/или начальными условиями для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих их временную эволюцию. На примере модели «конкуренции» в форме модифицированных уравнений В. Вольтерра представлен алгоритм аналитического расчета распределений вероятности значений координат равновесных состояний при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t$  – время).*

**Ключевые слова:** системы нелинейных дифференциальных уравнений, равновесные состояния, сепаратрисные множества, геометрическая вероятность.

*The analyzing algorithms are proposed for the problems of equilibrium states formation in nonlinear dynamic structures when the appropriate ordinary differential equations system has random parameters and/or initial conditions. As an example, the mathematical model of “competition” is examined likewise modified V. Volterra equations to illustrate the analytical results for equilibrium coordinates distribution when  $t \rightarrow +\infty$  ( $t$  is a time).*

**Keywords:** nonlinear differential equations systems, equilibrium states, separatrix varieties, geometrical probability.

### I. Введение

При изучении динамических, эволюционных

<sup>1</sup> Старший инженер АО «Концерн “Созвездие”» (г. Воронеж).

<sup>2</sup> Кандидат физико-математических наук, профессор, проректор РосНОУ (г. Москва).

<sup>3</sup> Аспирант Московского физико-технического института (Технического университета) (г. Долгопрудный).

процессов, связанных с формированием равновесных состояний сложных систем, одной из важных задач представляется определение вероятностных характеристик таких состояний (в дальнейшем мы называем их «предельные состояния»). Причиной неопределенностей здесь являются как недетерминированность параметров самой системы, так и неопределенности в задании начальных условий. Сложные систе-

мы, как правило, имеют не одно, а несколько состояний равновесия (в том числе и несколько устойчивых состояний равновесия, проявляя свойство мультстабильности); и вероятности формирования предельных состояний довольно сложным образом связаны с характеристиками тех случайных величин, характеристики которых можно считать априорно известными.

Задачи подобного характера возникают в исследовании мультстабильности нелинейных систем [1–3], в исследовании динамики многокомпонентных спектров при волновой диагностике нестационарных диспергирующих сред [4–6], в моделировании социальных явлений [7; 8] и т.п.

Рассматриваемый в настоящей работе подход к анализу формирования статистических распределений характеристик предельных состояний основывается на расчете геометрической вероятности, определяемой по пространственной структуре сепаратрисных множеств и, соответственно, по вариациям реализующихся решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно границ, определенных этими множествами. Такие вариации, в свою очередь, обусловлены случайными изменениями начальных условий и/или вариациями самих границ, связанными со случайными параметрами самой системы. Функции распределения вероятности этих характеристик мы считаем стационарными.

Конкретика применения данного алгоритма существенно зависит от структуры сепаратрисных множеств, поэтому мы будем иллюстрировать его особенности на конкретном примере – задаче о «конкуренции». Применение данного подхода для иных ОДУ, описывающих нелинейную динамическую систему, в целом имеет ту же последовательность операций, но каждый шаг будет иметь специфику, определяемую спецификой задачи.

**II. Сепаратрисные множества для системы нелинейных ОДУ**

Рассмотрим систему нелинейных ОДУ типа уравнений Вольтерра для конкурентных взаимодействий [9], в которую добавлены члены третьего порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1y - a_2xy - a_3x^2y \\ \frac{dy}{dt} = b_1x - b_2xy - b_3xy^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x|_{t=0} = x_c \\ y|_{t=0} = y_c \end{cases} \quad (2)$$

Согласно [8], такая система может описывать конкуренцию бизнесов, с учетом ограничений законодательного порядка. Условно назовем их бизнес  $X$  и бизнес  $Y$ . Для дальнейшего рассмотрения конкретика модели определяет только особенности геометрии рассматриваемых далее множеств, но не меняет структуры алгоритма исследования. Поэтому для иллюстрации мы не только будем пользоваться примером (1), (2), но и применять некоторые смысловые представления данного примера. Так, величины  $x(t)$  и  $y(t)$  мы рассматриваем как отклонение от устоявшегося в среднем баланса объемов производств соответственно первого и второго бизнесов. Коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  – действительные положительные величины, характеризующие в соответствующих компонентах правой части уравнений (1) соответственно: взаимную адаптацию (договоренность) бизнесов ( $i = 1$ ), их конкуренцию ( $i = 2$ ) и ограничения, возникающие при различных нарушениях законодательства ( $i = 3$ ) [8].

Уравнения (1) позволяют легко определить координаты критических точек, точек равновесия:

$$\begin{aligned} X_0 &= 0, \quad Y_0 = 0; \\ X_{1,2} &= \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + 4a_1a_3}}{2a_3}; \\ Y_{1,2} &= \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 + 4b_1b_3}}{2b_3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Верхний знак «+» соответствует индексу «1», нижний «-» – индексу «2». Анализ этих точек показывает, что точка  $(X_0, Y_0)$  является седловой точкой, а остальные – критические точки – представляют собой узлы, причем точки  $(X_1, Y_1)$  и  $(X_2, Y_2)$  – это устойчивые узлы, а точки  $(X_1, Y_2)$  и  $(X_2, Y_1)$  – неустойчивые узлы. При выполнении условий  $Y_{1,2} * \sqrt{a_2^2 + 4a_1a_3} = X_{1,2} * \sqrt{b_2^2 + 4b_1b_3}$  соответствующие узлы – вырожденные. В данной модели устойчивые узлы мы и рассматриваем как конечные предельные состояния данной системы при  $t \rightarrow +\infty$ .

Семейство решений системы (1) задается первым интегралом:

$$F(x, y) = \frac{|y - Y_1|^{Y_1}}{|y - Y_2|^{Y_2}} * \left( \frac{|x - X_2|^{X_2}}{|x - X_1|^{X_1}} \right)^\mu, \quad (4)$$

где параметр  $\mu$  определен формулой:

$$\mu = \frac{\sqrt{b_2^2 + 4b_1b_3}}{\sqrt{a_2^2 + 4a_1a_3}} = \frac{b_3 * (Y_1 - Y_2)}{a_3 * (X_1 - X_2)}. \quad (5)$$

Траектории системы (1) лежат на линиях уровня функции (5)  $F(x, y) = F(x_c, y_c) = C$ , причем уровень  $C = 0$  определяет две прямые  $y = Y_1, y = Y_2$ , а уровень  $C = \infty$  – прямые  $x = X_1, x = X_2$ .

«Особым решением», представляющим интерес для дальнейшего, является линия уровня

$$F(x, y) = F(0, 0) = \frac{|Y_1|^{Y_1}}{|Y_2|^{Y_2}} * \left( \frac{|X_2|^{X_2}}{|X_1|^{X_1}} \right)^{\mu} = const, \quad (6)$$

проходящая во втором и четвёртом квадрантах и соединяющая точки  $(X_1, Y_2), (X_2, Y_1)$  и  $(X_0, Y_0)$ . Она является сепаратрисой седловой точки  $(X_0, Y_0)$ .

Общая геометрическая структура множества решений системы (1) приведена на рисунке 1. Для примера выбраны следующие значения параметров:  $a_1 = 0,6, a_2 = 0,4, a_3 = 0,25$  и  $b_1 = 0,3, b_2 = 0,27, b_3 = 0,375$ .

Из представленного анализа и рисунка 1 следует, что координатная плоскость пространства решений разделена на четыре области:

1)  $S_1$  – область, ограниченная линией  $\{x = X_2, y \geq Y_1\}$ , особым решением и линией  $\{x \geq X_1, y = Y_2\}$ ; в этой области все решения стягиваются к устойчивому узлу  $(X_1, Y_1)$ ;

2)  $S_2$  – область, ограниченная линией  $\{x \leq X_2, y = Y_1\}$ , особым решением и линией  $\{x = X_1, y \leq Y_2\}$ ; в этой области все решения стягиваются к устойчивому узлу  $(X_2, Y_2)$ ;

3)  $S_3 = \{x \leq X_2, y \geq Y_1\}$  и  $S_4 = \{x \geq X_1, y \leq Y_2\}$  – области, в которых решения при  $t \rightarrow +\infty$  не ограничены, траектории уходят на бесконечность.

Границы перечисленных областей мы называем сепаратрисным множеством, поскольку они разделяют качественно различные предельные значения решений  $\{x(t), y(t)\}$  при  $t \rightarrow +\infty$ . На рисунке 1 и далее это множество изображено жирными линиями.

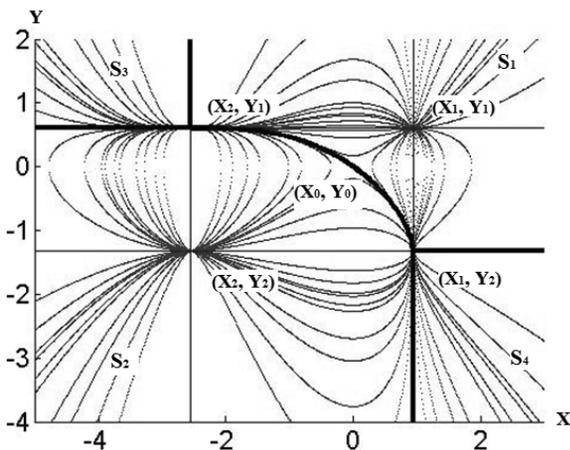


Рис. 1. Геометрия множества решений системы (1)

Интерпретируя в терминах взаимодействия бизнесов полученные результаты для системы (1), можно сказать, что стабилизация уровней производства как бизнеса  $X$ , так и бизнеса  $Y$  происходит в зонах  $S_1$  и  $S_2$  вне зависимости от начальных условий (2), причем предельное состояние системы в каждой из указанных зон – единственное. Напротив, в зонах  $S_3$  и  $S_4$  не существует стабильных состояний «сосуществования» бизнесов: в зоне  $S_3$  в конкурентной борьбе побеждает бизнес  $Y$ , а в зоне  $S_4$  – бизнес  $X$ , то есть возникает монополия. Понятно, что случай чрезмерно больших производств монопольного бизнеса не описывается данной системой уравнений, так как модель всегда имеет ограниченную область применимости.

### III. Динамические нелинейные системы ОДУ со случайными параметрами

В данном разделе рассмотрим, как изменятся характеристики предельных состояний в случае, когда параметры системы (1) случайные.

1. Пусть случайной величиной является начальное состояние системы, начальные условия (2). Предположим, что координаты точки  $(x_c, y_c)$  есть нормально распределенная двумерная случайная величина, заданная следующей функцией плотности распределения вероятности:

$$p_{x_c, y_c}(x, y) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} * \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-\beta)^2}{2\sigma_2^2}\right). \quad (7)$$

Понятно, что если математическое ожидание координат  $M(x_c, y_c) = (\alpha, \beta)$  находится далеко от сепаратрисного множества, то предельное состояние с вероятностью, близкой к 1, совпадает с точкой  $(X_2, Y_2)$ , если  $(\alpha, \beta) \in S_2$ , и с точкой  $(X_1, Y_1)$ , если  $(\alpha, \beta) \in S_1$ . То есть:

$$p_{x(t), y(t)}(x, y) \Big|_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow \begin{cases} \delta(x - X_2, y - Y_2) & \text{при } (\alpha, \beta) \in S_2, \\ \delta(x - X_1, y - Y_1) & \text{при } (\alpha, \beta) \in S_1. \end{cases} \quad (8)$$

С вероятностью, близкой к единице, стабильного сосуществования двух бизнесов не будет, если  $(\alpha, \beta) \in S_3 \cup S_4$ .

«Близость» начальных условий к сепаратрисному множеству можно оценить  $3\sigma$ -окрестностью, которую можно задать, например, следующим условием:

$$\{|x_c - \alpha| < 3\sigma_1, |y_c - \beta| < 3\sigma_2\}. \quad (9)$$

Тогда если начальные условия, удовлетворяющие (9), одновременно удовлетворяют и условию  $(x_c, y_c) \in S_2$ , то с вероятностью 0,9973 реализуется предельное состояние  $(X_2, Y_2)$ , если же выполнено условие  $(x_c, y_c) \in S_1$ , то реализуется предельное состояние  $(X_1, Y_1)$ .

В общей ситуации для рассматриваемого случая вероятности предельных состояний задаются формулами:

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P(x(t, x_c, y_c)|_{t \rightarrow +\infty} = X_2, \\
 & y(t, x_c, y_c)|_{t \rightarrow +\infty} = Y_2) = \\
 &= \iint_{S_2} p_{x_c, y_c}(x, y)|_{t=0} dx dy,
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 P_1 &= P(x(t, x_c, y_c)|_{t \rightarrow +\infty} = X_1, \\
 & y(t, x_c, y_c)|_{t \rightarrow +\infty} = Y_1) = \\
 &= \iint_{S_1} p_{x_c, y_c}(x, y)|_{t=0} dx dy.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Вероятность отсутствия конечных предельных состояний, очевидно, равна:

$$P_\infty = 1 - P_1 - P_2.
 \tag{12}$$

Соответственно, предельная плотность распределения вероятности будет такова:

$$\begin{aligned}
 &P_{x(t) y(t)}(x, y)|_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow \\
 &\rightarrow P_2 * \delta(x - X_2, y - Y_2) + \\
 &+ P_1 * \delta(x - X_1, y - Y_1).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Вычисления вероятностей предельных состояний по формулам (10), (11) и (12) иллюстрируют графики зависимости этих величин от положения центра функции плотности распределения вероятности координаты точки (6) (рис. 2 (2а, 2б, 2в)).

Расчеты проведены для распределения (7) при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ .

Данные зависимости полностью соответствуют качественным результатам, представленным выше.

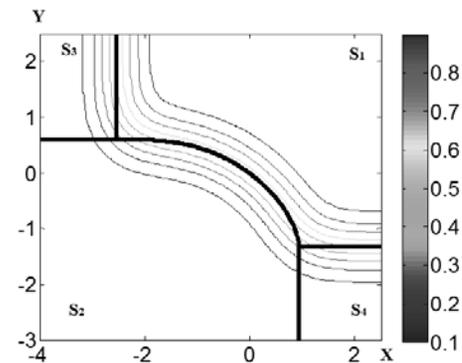


Рис. 2а. Вероятность  $P_1$  (графики линий уровней) для бимодальной системы в зависимости от положения центра распределения координат начальной точки

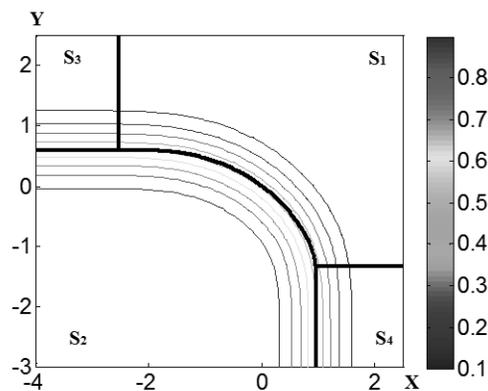


Рис. 2б. Вероятность  $P_2$  (графики линий уровней) для бимодальной системы в зависимости от положения центра распределения координат начальной точки

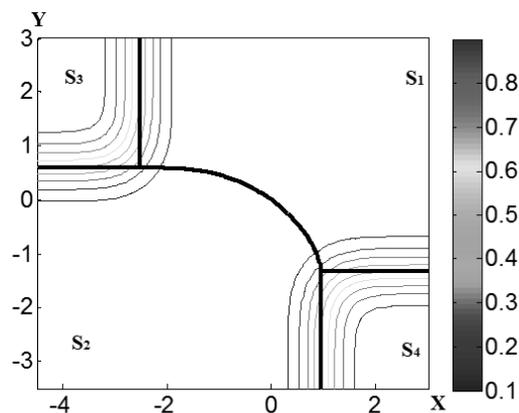


Рис. 2в. Вероятность  $P_\infty$  (графики линий уровней) для бимодальной системы в зависимости от положения центра распределения координат начальной точки

Поскольку выражения (10)–(12) задают вероятности попадания точки  $(x, y)$  в соответствующие зоны при  $t \rightarrow +\infty$ , мы фактически получаем условные вероятности предельных состояний системы при заданной начальной точке  $(x, y) = (x_c, y_c)$ .

В частности,  $P_1|_{x_c=X_2, y_c=Y_2} = P(x(t, X_2, Y_2)|_{t \rightarrow +\infty} = X_1, y(t, X_2, Y_2)|_{t \rightarrow +\infty} = Y_1)$  представляет условную вероятность возникновения предельного состояния  $(X_1, Y_1)$  при заданном (в среднем) начальном состоянии  $(X_2, Y_2)$ . Соответственно,  $P_2|_{x_c=X_1, y_c=Y_1} = P(x(t, X_1, Y_1)|_{t \rightarrow +\infty} = X_2, y(t, X_1, Y_1)|_{t \rightarrow +\infty} = Y_2)$  есть условная вероятность возникновения предельного состояния  $(X_2, Y_2)$  при заданном начальном состоянии  $(X_1, Y_1)$ . Например, для модельных расчетов, соответствующих рис. 2,  $P_1|_{x_c=X_2, y_c=Y_2} \approx 0.00006$ ,  $P_2|_{x_c=X_1, y_c=Y_1} \approx 0.02$ .

Аналогичным образом, через характеристики (10)–(12) определяется вероятность таких процессов, как реализация и нереализация предельного состояния  $(X_1, Y_1)$  при заданном (в среднем) начальном состоянии  $(X_1, Y_1)$ : соответственно  $P_1|_{x_c=X_1, y_c=Y_1} = P(x(t, X_1, Y_1)|_{t \rightarrow +\infty} = X_1, y(t, X_1, Y_1)|_{t \rightarrow +\infty} = Y_1)$  и  $1 - P_1|_{x_c=X_1, y_c=Y_1} = 1 - P(x(t, X_1, Y_1)|_{t \rightarrow +\infty} = X_1, y(t, X_1, Y_1)|_{t \rightarrow +\infty} = Y_1)$ ; реализация и нереализация предельного состояния  $(X_2, Y_2)$  при заданном (в среднем) начальном состоянии  $(X_2, Y_2)$ :  $P_2|_{x_c=X_2, y_c=Y_2} = P(x(t, X_2, Y_2)|_{t \rightarrow +\infty} = X_2, y(t, X_2, Y_2)|_{t \rightarrow +\infty} = Y_2)$  и  $1 - P_2|_{x_c=X_2, y_c=Y_2} = 1 - P(x(t, X_2, Y_2)|_{t \rightarrow +\infty} = X_2, y(t, X_2, Y_2)|_{t \rightarrow +\infty} = Y_2)$ , и других аналогичных характеристик. Для иллюстративного примера это соответственно вероятности:  $P_1|_{x_c=X_1, y_c=Y_1} \approx 0,98$ ,  $1 - P_1|_{x_c=X_1, y_c=Y_1} \approx 0,02$ ,  $P_2|_{x_c=X_2, y_c=Y_2} \approx 0,99994$ ,  $1 - P_2|_{x_c=X_2, y_c=Y_2} \approx 0,00006$ .

2. Рассмотрим теперь ситуацию, когда случайными характеристиками являются коэффициенты уравнений системы (1). В этом случае возникает неопределенность как в положениях самих точек равновесия (3), так и в положении сепаратрисного множества.

Положим для простоты, что параметры системы (1)  $a_1$  и  $b_1$  – непрерывные случайные независимые величины, плотность распределения вероятности которых задана  $\Gamma$ -распределением 2-го порядка (такая модель обеспечивает условие положительности данных величин), а параметры  $a_2, a_3$  и  $b_2, b_3$  – детерминированные величины. Начальная точка  $(x_c, y_c)$  траектории системы (1) также детерминированная величина. Таким образом, имеем случайные параметры  $a_1$  и  $b_1$ , заданные распределениями с плотностями вида:

$$p_{a_1}(t) = \begin{cases} \lambda_a^2 t * \exp(-\lambda_a t), & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}, \quad (14)$$

$$p_{b_1}(t) = \begin{cases} \lambda_b^2 t * \exp(-\lambda_b t), & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}.$$

Пусть уравнение области  $S_i$  в координатах  $(x, y)$  имеет вид:

$$S_i = \{ \Phi_j^i(x, y) \geq 0 \}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Тогда вероятность попадания точки  $(x, y)$  в область  $S_i$  определяется, как геометрическая вероятность, выражением:

$$P_i = P((x, y) \in S_i) = P\left(\bigcup_j \Phi_j^i(x, y) \geq 0\right). \quad (16)$$

$\Phi_j^i(x, y)$  есть детерминированные функции случайных величин  $a_1$  и  $b_1$  и при фиксированных координатах точки  $(x, y)$  задают отображение области  $S_i$  (15) в область  $\tilde{S}_i$  в пространстве  $(a_1, b_1)$ . Следовательно, равенство (16) представимо в виде:

$$P_i = P((x, y) \in S_i) = \iint_{\tilde{S}_i} p_{a_1}(t) * p_{b_1}(\tau) dt d\tau, \quad (17)$$

где двумерная плотность распределения вероятности определена из (14).

В рассматриваемой модели для областей  $S_3$  и  $S_4$  формула (17) принимает вид:

$$\begin{aligned} P_\infty &= P((x, y) \in (S_3 \cup S_4)) = \\ &= \iint p_{a_1}(t) * p_{b_1}(\tau) dt d\tau + \\ &\quad \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4a_1a_3}}{2a_3} - x \geq 0 \\ &\quad \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_1b_3}}{2b_3} \geq 0 \\ &+ \iint p_{a_1}(t) * p_{b_1}(\tau) dt d\tau + \\ &\quad x - \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4a_1a_3}}{2a_3} \geq 0 \\ &\quad \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 + 4b_1b_3}}{2b_3} - y \geq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Для областей  $S_1$  и  $S_2$  уравнение для элемента границы, представленного особым решением (6), не разрешается в явном виде. Потому формулы (16) и (17) существенно не упрощаются.

Как и в случае п. 1, выражения (16)–(18) задают вероятности попадания точки  $(x, y)$  в соответствующие зоны, разделенные сепаратрисным множеством (хотя в данном случае оно является случайным), и мы опять получаем условные вероятности предельных состояний системы при заданной начальной точке  $(x, y) = (x_c, y_c)$ . При этом, в зонах  $S_1$  и  $S_2$  координаты положений равновесия также являются случайными величинами с условными средними значениями (при заданной начальной точке траектории):

$$\bar{X}_i = \iint_{\tilde{S}_i} p_{a_1}(t) * p_{b_1}(\tau) \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + 4ta_3}}{2a_3} dt d\tau, \quad (19)$$

$$\bar{Y}_i = \iint_{\tilde{S}_i} p_{a_1}(t) * p_{b_1}(\tau) \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 + 4\tau b_3}}{2b_3} dt d\tau, \quad (20)$$

$i = 1, 2$  соответственно для областей устойчивого состояния  $S_1$  и  $S_2$ , знак « $\pm$ » определен в (3). Отметим, что зависимость значений интегралов (19) и (20) от  $(x_c, y_c)$  возникает только из-за зависимости от этих параметров самой геометрии области интегрирования  $\tilde{S}_i$  (см., например, явные зависимости в формуле (18)).

Очевидно обобщение выражений (17)–(20) на случай многомерных распределений случайных параметров  $a_j$  и  $b_j, j = 1, 2, 3$  системы (1). Следует найти лишь отображение области  $S_i$  (15) в область  $\tilde{S}_i$  в пространстве всех параметров  $a_j$  и  $b_j, j = 1, 2, 3$  и записать формулу (17) для 6-мерного пространства параметров, задав функцию плотности совместного распределения вероятности для этих элементов.

Расчеты вероятностей  $P_1, P_2, P_\infty$  по формулам (17), (18) при заданной функции плотности распределения вероятности параметров (14) качественно повторяют результаты расчетов п. 1.

### Заключение

Таким образом, проведенное исследование модели формирования предельных состояний двухкомпонентной динамической системы на основе расчета геометрической вероятности реализации различных областей в пространстве переменных  $(x, y)$ , границы которых задаются сепаратрисным множеством, показывает эффективность такого подхода. Данный метод можно применить для решения задач формирования состояний квантовых систем, исследования распространения волн в средах со случайными неоднородностями, исследования динамических систем различной природы. Определенный интерес представляет возможность использования данного подхода в исследовании эффектов типа «подбарьерного просачивания» и «надбарьерного отражения».

Хотя в данной работе фактор неопределенности в коэффициентах системы (1) и неопределенность в начальных данных (2) рассмотрены отдельно, при известных функциях совместного распределения вероятности этих величин объединение формул (10), (11) и (17) очевидно.

### Литература

1. Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 312 с.
2. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Структуры и хаос в нелинейных средах. – М. : Физматлит, 2007. – 488 с.
3. Чернавский Д.С. Синергетика и информация: Динамическая теория информации. – М. : УРСС, 2004. – 288 с.
4. Тарашук Е.Ю., Нагорский П.М., Борисов Б.Б. и др. Нестационарные процессы в ионосфере Земли и их влияние на распространение коротких радиоволн. – Томск : Изд. ТГУ, 1986. – 164 с.
5. Костров Л.С., Розуменко В.Г., Черногор Л.Ф. Доплеровское радиозондирование естественно-возмущенной ионосферы. // Радиофизика и радиоастрономия – 1999. – Т. 4. – № 3. – С. 209–226.
6. Гузминов П.П., Заец П.Г., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Чешев Ю.В. Исследование ионосферы амплитудно-доплеровским методом. Постановка эксперимента, методика обработки данных на ЭВМ // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах : сб. статей – М. : МФТИ, 1989. – С. 15–23.
7. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 288 с.
8. Милованов В.П. Синергетика и самоорганизация. Общая и социальная психология. – М. : КомКнига, 2005. – 208 с.
9. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М. : Физматлит, 1976. – 288 с.