DOI: 10.25586/RNU.V9187.18.06.P.91 УДК 681.5.013

А.И. Гладышев, М.С. Домнина

О СТАБИЛЬНОСТИ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ

В статье рассмартиваются вопросы стабильности алгоримов, применяемых для оценивания информационно-измерительных систем.

Ключевые слова: *информационно-измерительные системы, оценивание, алгоритм, идентификация.*

A.I. Gladishev, M.S. Domnina

ON THE STABILITY OF THE ALGORITHMS ESTIMATION

The article deals with the stability of algorithms used in for evaluation of information and measuring systems.

Keywords: *information and measuring systems, estimation, algorithm, identification.*

Задачи статистической обработки данных в информационно-измерительных системах, такие, например, как задача фильтрации, а также возникающие при этом задачи идентификации, оптимизации, обычно формулируются при вполне определенных вероятностных предположениях об априорной информации. Так, в задаче линейной фильтрации требуется гауссовость участвующих в модели случайных процессов и величин. Однако на практике типичны условия априорной неопределенности, когда отсутствуют достоверные сведения о свойствах исследуемых и наблюдаемых процессов. А это приводит к тому, что получаемые с помощью теоретически оптимальных алгоритмов решения указанных выше задач могут значительно отличаться от истинных оптимальных решений [1]. В появившихся в последние годы литературных источниках для ряда известных алгоритмов показано, что хотя они теоретически оптимальны, но практически очень чувствительны даже к небольшим изменениям исходных данных. В этих условиях при решении задач оптимизации используются различные подходы.

Одни из них вовсе не требуют задания априорных характеристик (как, например, при использовании метода наименьших квадратов) или предполагают задание минимальной априорной информации (так называемое минимаксное оценивание). Другие основываются на принципах адаптации, которые позволяют в процессе работы устранять имеющуюся неопределенность, например путем текущего оценивания неизвестных параметров и уточнения априорных моделей с последующим использованием их в процедурах оценивания при оптимизации по заранее выбранным критериям. Тем не менее, некоторый недостаток такого подхода состоит в том, что критерии оптимальности выбираются заранее и не «подстраиваются» в зависимости от поступившей в процессе работы информации. В последние годы интенсивно разрабатываются модификации адаптивного подхода, которые заключаются в рациональном выборе критериев оптимальности, обеспечивающих малую чувствительность решения к априорной неопределенности и так называемую «робастность» (грубость, стабильность) по отношению к вариациям используемых моделей

Устранение нестабильности алгоритмов возможно только на основе учета в них как априорной информации о наблюдениях и решении, так и текущей или рабочей информации [2]. Именно рациональное использование последней позволяет добиться более высокой точности оценивания, чем при стандартном среднеквадратическом фильтре.

Рассмотрим виды неопределенности, которые встречаются в задачах оценивания и оптимизации. Неопределенность может быть вызвана либо проявлением внешних причин (большая сложность исследуемого объекта, вследствие чего невозможно в соответствующей математической модели учесть все реальные связи, неполное знание исследуемого явления из-за помех в каналах наблюдения), либо искусственной причиной (невозможность точной формализации желаний лица, принимающего решение, случайный характер самого решения). Искусственное использование случайности в процессе получения оценок исследуемого процесса (так называемая рандомизация) позволяет обойти многие трудности, которые возникают при минимизации недифференцируемых, многоэкстремальных функций потерь, а также преодолеть некорректность соответствующих задач оценивания.

Целью этой статьи является демонстрация того факта, что процесс регуляризации при решении задачи линейной фильтрации позволяет наряду с преодолением некорректности исходной проблемы построить стабильный (робастный) алгоритм оценивания. Вкратце суть вопроса состоит в следующем. Применение регуляризации фактически означает, что модель наблюдений заменяется «регуляризованной» моделью:

$$r(\tau) = C(\tau)x(\tau) + \omega(\tau) + \sqrt{a}v(\tau), \qquad (1)$$

где $v(\tau)$ – белый гауссов шум с нулевым средним, некоррелированный с $\omega(\tau), x_0$ и $u(\tau)$, который имеет корреляцию вида:

$$M\left[v(\tau)v^T(\tau)\right] = \mathfrak{J}_m\delta(\sigma-\delta), \qquad (2)$$

где $\mathfrak{J}_m$ – m-мерная единичная матрица. Поскольку $v(\tau)$ – теоретически гауссов случайный процесс, то даже если функции распределения $x(\tau)$ и $\omega(\tau)$ несколько отличаются от нормального закона распределения (в соответствующей метрике), то линейная оценка $\hat{x}_a(t)$, построенная в предположении гауссовости $x(\tau)$ и $\omega(\tau)$, близка к истинному условному математическому ожиданию $M\left[x(t) \mid r(\tau), 0 \le \tau \le t\right]$.

Проведем теперь строго соответствующие рассуждения. Для простоты изложения рассмотрим случай дискретных наблюдений [3]. Пусть проводятся последовательные наблюдения m-мерной случайной величины r в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_{n_1}$. Результат наблюдений будем рассматривать как вектор $x \equiv \left(r^T(t_1), r^T(t_2), \ldots, r^T(t_{n_1})\right)^T$ размерности $n = mn_1$. На основании этих наблюдений нужно оценить в среднеквадратическом смысле случайную величину $\theta = \theta(t_{n_1})$, принимающую значения в R_k. Пусть θ – случайная величина с мерной плотностью распределения $g_0(\theta), X \equiv R_{mn_1}$. На языке математической статистики $(X, \mathfrak{B}_1)$ – «пространство наблюдений», $(R_k, \mathfrak{B}_2)$ – «пространство параметров решений», где $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ – σ-алгебры борелевых подмножеств в X и R_k соответственно. Считаем заданной переходную вероятность $P_0(\theta, x)$ для пространств $(R_k, \mathfrak{B}_2)$ и $(X, \mathfrak{B}_1)$. По определению это означает следующее:

1) для любого $\theta \in R_k$ функция множеств $P_0(\theta)$ является вероятностной мерой на $(X, \mathfrak{B}_1)$;

2) для любого $A \in \mathfrak{B}_1$ функция $P_0(A)$ измерима на пространстве $(R_k, \mathfrak{B}_2)$.

Рассмотрим декартово произведение $Z = R_k \times X$. Переходная вероятность $P_0(\theta)$ определяет вероятность на Z следующим образом:

$$dP_0(\theta, x) = dP_x dG_x(\theta),$$

где P_x – маргинальная вероятность, определяемая равенством:

$$P_x(A) = \int_{R_k} P_0(\theta, A) g_0(\theta) d\theta, \ \forall A \in \mathfrak{B}_2, \tag{3}$$

а $G_x(\theta)$ – функция условного распределения $(\theta \mid x)$. Если $p_0(\theta, x)$ – плотность $P_0(\theta)$ (относительно меры Лебега dx), то

$$\frac{dG_x(\theta)}{d\theta} = \begin{cases} g_x(\theta) = \dfrac{p_0(\theta,x) g_0(\theta)}{p_0(x)} & \text{при}\, p_0(x) = \int_{R_k} p_0(\theta,x) g_0(\theta) d\theta > 0 \\ 0 & \text{при } p_0(x) = 0 \end{cases}.$$

Тогда за оценку $\overline{\theta}(x)$ величины θ можно выбрать среднее значение случайной величины $(\theta \mid x)$, т. е.

$$\overline{\theta}(x) = \int_{R_k} \theta g_x(\theta) d\theta = \frac{1}{p_0(x)} \int_{R_k} \theta p_0(\theta, x) g_0(\theta) d\theta, \tag{4}$$

если $p_0(x) \neq 0$.

Введем в рассмотрение mn_1-мерную случайную гауссову величину $v_a \ (a > 0)$ с нулевым средним и дисперсией $a\mathfrak{I}_{mn_1}$ [4]. Плотность распределения $p_a(x)$ тогда задается формулой:

$$p_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}(2\pi)^{\frac{1}{mn}}} e^{-\frac{1}{2a}\|x\|^2_{R_{mn_1}}}. \tag{5}$$

Причем независимые случайные величины v_a и x определяют случайную величину $x_a = x + v_a$ в $(X, \mathfrak{B}_1)$ с плотностью распределения:

$$p_{a,0}(\theta, x) = \int_X p_a(z - x) p_0(\theta, z) dz. \tag{6}$$

Предположим, что на пространстве $(Z, \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2)$ определена гауссова мера с плотностью

$$p_\Gamma(\theta, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{mn_1+k}} \sqrt{\det K}} e^{-\frac{1}{2}(K^{-1}z, z)z},$$

где K – строго положительно определенная матрица размера $(mn_1 + k) \times (mn_1 + k)$; z – скалярное произведение в Z. Зафиксируем $a > 0$ и при заданном $x \in X$ введем две среднеквадратические оценки вектора θ:

$$\overline{\theta}_{a,0}(x) = \frac{1}{p_{a,0}(x)} \int_{R_k} \theta p_{a,0}(\theta, x) g_0(\theta) d\theta \tag{7}$$

и

$$\overline{\theta}_{a,\Gamma}(x) = \frac{1}{p_{a,\Gamma}(x)} \int_{R_k} \theta p_{a,\Gamma}(\theta, x) g_0(\theta) d\theta. \tag{8}$$

Здесь

$$p_{a,0}(x) = \int_{R_k} p_{a,0}(\theta, x) g_0(\theta) d\theta,$$

$$p_{a,\Gamma}(x) = \int_{R_k} p_{a,\Gamma}(\theta, x) g_0(\theta) d\theta,$$

где

$$p_{a,\Gamma}(\theta, x) = \int_X p_a(z - x) P_\Gamma(\theta, z) dz. \qquad (9)$$

Оценка (7) получается в предположении, что, сделав «регуляризацию» случайной величины x посредством v_a, мы считаем известной исходную (истинную) переходную вероятность $P_0(\theta)$ и заменяем x случайной величиной x_a с плотностью распределения (6).

Оценка (8) получается, если наряду с регуляризацией случайной величины x заменить исходную плотность $P_0(\theta, x)$ на гауссову плотность $P_\Gamma(\theta, x)$.

Остается выяснить, как далеко отстоят друг от друга векторы $\overline{\theta}_{a,0}(x)$ и $\overline{\theta}_{a,\Gamma}(x)$, если известно расстояние между исходным $P_0(\theta)$ и гауссовым $P_\Gamma(\theta, x) dx d\theta$ распределениями [5].

Считается, что распределение $g_0(\theta)$ вектора θ на R_k неизменно.

Напомним, что метрика Прохорова в пространстве распределений на Z вводится следующим образом. Если A – некоторое множество в Z, то A^η есть открытое множество:

$$A^\eta = \left\{ z \in Z : \left\| z - A \right\|_z < \eta \right\}, \ \eta > 0.$$

Тогда для любых двух распределений P_1 и P_2 на Z:

$$\rho(P_1, P_2) = \inf \eta : \begin{cases} P_1(F) < P_2(F^n) + \eta \\ P_2(F) < P_1(F^n) + \eta \end{cases},$$

для всякого замкнутого подмножества F из Z.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$ такое, что:

$$\rho\left(\rho_0(\theta, x) d\theta dx, \ p_\Gamma(\theta, x) d\theta dx\right) < \varepsilon. \qquad (10)$$

Тогда, учитывая, что:

$$\left\| \overline{\theta}_{a,0}(x) - \overline{\theta}_{a,\Gamma}(x) \right\|_{R_k}^2 \le$$

$$\le \frac{2}{p_{a,0}^2(x)} \left[\left\| \overline{\theta}_{a,0}(x) \right\|_{R_k}^2 | p_{a,0}(x) - p_{a,\Gamma}(x) |^2 + \left(\int_{R_k} \|\theta\|_{R_k} g_0(\theta) | p_{a,0}(\theta, x) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - p_{a,\Gamma}(\theta, x) | d\theta \right)^2 \right]$$

на основании (6), (9), (10) получаем:

$$\left\| \overline{\theta}_{a,0}(x) - \overline{\theta}_{a,\Gamma}(x) \right\|_{R_k}^2 \le \frac{\varepsilon^2}{a} \left(\left\| \overline{\theta}_{a,0}(x) \right\|_{R_k}^2 + K_1 \right) K_2 \frac{1}{p_{a,0}^2(x)}, \qquad (11)$$

где постоянные K_1 и K_2 не зависят от ε и a.

Таким образом, подбирая согласованно a с «ошибкой исходных данных» ε, евклидово расстояние между $\overline{\theta}_{a,0}(x)$ и $\overline{\theta}_{a,\Gamma}(x)$ можно сделать достаточно малым. Обратим внимание, что выбор a должен быть произведен на основании апостериорной информации, т.е. знании вектора наблюдений $x \in X$.

Литература

1. *Козлов Н.Н., Лучин А.А., Труфанов Е.Ю.* Радиоинформационные системы. Математическое обеспечение проектирования, испытаний и функционирования. – М. : Знание, 2011. – 703 с.

2. Математическое моделирование и исследование измерительных систем / под ред. В.Л. Макарова. – Киев, 1980. – 166 с.

3. Математическое обеспечение сложного эксперимента : монография : в 5 т. / Ю.А. Белов, В.П. Диденко, Н.Н. Козлов и др.; под ред. И.И. Ляшко. – Киев : Наукова думка, 1982. – 304 с. – Т. 1. Обработка измерений при исследовании сложных систем.

4. *Гладышев А.И.* Вопросы математического моделирования радиоинформационных систем // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ, управление». – 2016. – № 1–2. – С. 46–51.

5. *Гладышев А.И., Аборкина Е.С.* Вопросы применения существующих методов оценки сложности информационных систем // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ, управление». – 2016. – № 1–2. – С. 114–117.

Reference

1. *Kozlov, N.N., Luchin, A.A., Trufanov, E.Yu.* Radioinformatsionnye sistemy. Matematicheskoe obespechenie proektirovaniya, ispytaniy i funktsionirovaniya. – M. : Znanie, 2011. – 703 s.

2. Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie izmeritel'nykh sistem / pod red. V.L. Makarova. – Kiev, 1980. – 166 s.

3. Matematicheskoe obespechenie slozhnogo eksperimenta : monografiya : v 5 t. / Yu.A. Belov, V.P. Didenko, N.N. Kozlov i dr.; pod red. I.I. Lyashko. – Kiev : Naukova dumka, 1982. – 304 s. – T. 1. Obrabotka izmereniy pri issledovanii slozhnykh sistem.

4. *Gladyshev, A.I.* Voprosy matematicheskogo modelirovaniya radioinformatsionnykh sistem // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz, upravlenie". – 2016. – № 1–2. – S. 46–51.

5. *Gladyshev, A.I., Aborkina, E.S.* Voprosy primeneniya sushchestvuyushchikh metodov otsenki slozhnosti informatsionnykh sistem // Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy: modeli, analiz, upravlenie". – 2016. – № 1–2. – S. 114–117.