

А.С. Крюковский¹
Ю.И. Скворцова²

A.S. Kryukovsky
Yu. I. Skvortsova

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ
ЛУЧЕВЫХ И КАУСТИЧЕСКИХ
СТРУКТУР В КООРДИНАТНО-
ИМПУЛЬСНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ
ПРЕДКАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА
МАСЛОВА³**

**RESEARCH OF PROJECTIONS
OF RAY AND CAUSTIC STRUCTURES
IN COORDINATE-PULSE SUBSPACE
OF THE PRELIMINARY CANONICAL
MASLOV'S OPERATOR**

Сопоставлены проекции фазового пространства в двумерные подпространства, соответствующие различным картам канонического оператора Маслова, в невозмущенном и возмущенном случаях. Рассмотрены каустические особенности лучевых семейств в этих проекциях. Рассчитаны амплитудные множители вдоль лучей для разных карт и проанализированы сингулярности, связанные с касанием лучей каустик. В качестве возмущений ионосферного слоя F рассмотрены: слой E , спорадический слой и локальное эллиптическое возмущение в окрестности главного максимума. Показано, что канонические подпространства даже в невозмущенном случае содержат каустики, а введение возмущений существенно усложняет лучевую и каустическую картину. Сделан вывод об актуальности перехода от интегрального описания решения к волновой теории катастроф.

Ключевые слова: канонический оператор, численное моделирование, распространение сигналов, ионосфера, бихарактеристическая система, возмущения, каустики, лучи.

The projections of phase space in two-dimension subspace, appropriate to various cards of the canonical Maslov's operator, in non-disturbed and disturbed cases are compared. Caustic singularities of ray families in these projections are considered. The amplitude multipliers along rays for different cards are designed and singularities, connected with by a contact of rays of caustics are analyzed. As disturbances of ionospheric F -layer are considered: E -layer, sporadic layer and a local elliptic disturbance in a vicinity of the main maximum. It is shown, that canonical subspaces even in the non-disturbed case contain caustics, and a disturbance conducting essentially complicates ray and caustic pictures. The conclusion about a urgency of transition from the integrated description of the solution to the wave catastrophe theory is made.

Keywords: canonical operator, numerical modeling, propagation of signals, ionosphere, bicharacteristic system, disturbances, caustics, rays.

1. Введение

В последнее время для расчета амплитудно-фазовых структур электромагнитных полей в ионосфере Земли активно применяется канонический оператор В.П. Маслова (КОМ) [1–4]. В отличие от лучевых методов, например метода

¹ Доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета ИСиКТ НОУ ВПО «Российский новый университет».

² Заместитель декана факультета ИСиКТ НОУ ВПО «Российский новый университет».

³ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 15-02-04206-а, № 13-07-00937-а, ОФИ_М № 13-02-12121).

геометрической оптики, КОМ позволяет получить равномерные асимптотические решения волновых уравнений не только в регулярных, но и в сингулярных областях, которым соответствуют каустики (огибающие лучевых семейств) и их особенности [5–8]. Как известно, на каустиках расходимость лучевого потока, описываемая якобианом расходимости, обращается в нуль, что и приводит к бесконечностям для лучевых решений. Основная идея метода КОМ [5; 6; 9; 10] состоит в том, что в силу теоремы Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений при выполнении необходимых условий относительно

но гладкости правых частей решения бихарактеристической системы Гамильтона в фазовом пространстве однозначно параметризуются и не пересекаются. Каустики возникают лишь при проектировании фазового пространства в конфигурационное. Если же выбрать другое подпространство фазового пространства (импульсное или смешанное), то в нем лучевые траектории могут не пересекаться, а якобиан расходимости не будет обращаться в нуль. Конечно, такое лучевое представление не будет являться решением исходной задачи, но, как показано в работах [5; 9–11], его фурье-образ является искомым решением. В результате получается быстроосциллирующий интеграл (предканонический оператор), кратность которого определяется числом компонент импульса (волновых векторов), участвующих в формировании координатно-импульсного подпространства.

В общем случае можно показать (см., например, [12]), что всегда существует такая проекция фазового пространства в координатно-импульсное подпространство, в котором отсутствуют каустики и их особенности. Но это утверждение справедливо только локально. Поэтому для построения глобального решения задачи необходимо сшивать различные «карты», переходя от одного координатно-импульсного представления к другому.

Необходимо отметить, что лучевая структура и каустические особенности, возникающие в импульсных или смешанных подпространствах в случае ионосферного распространения радиоволн, изучены недостаточно подробно, в отличие от аналогичных результатов [13–18], полученных для конфигурационного (координатного) пространства. Чтобы восполнить этот пробел, в настоящей работе выполнено исследование лучевых и каустических структур в координатно-импульсных подпространствах предканонического оператора Маслова. Рассмотрены две ситуации: распространение в возмущенном и невозмущенном ионосферном слое и изучены особенности, возникающие в координатно-импульсных пространствах при возмущении ионосферной плазмы.

2. Модель эффективной диэлектрической проницаемости ионосферы Земли

В настоящей работе рассмотрена изотропная модель эффективной диэлектрической проницаемости ионосферной плазмы, то есть модель, не учитывающая магнитного поля Земли:

$$\varepsilon = 1 - \nu, \quad (1)$$

$$\nu = \left(\frac{\omega_{n,i}}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}, \quad (2)$$

где $e = 4,8029 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ – заряд электрона, $m_e = 9,108 \cdot 10^{-28}$ г – масса электрона, N – величина электронной концентрации в фиксированной точке пространства, а ω – круговая частота излучения.

Модель электронной концентрации ионосферы представим в виде

$$N(\vec{r}) = N_0 \left\{ \exp \frac{1}{2} \left[1 - \theta - \frac{\exp(-\theta)}{\cos \chi} \right] + \frac{\beta}{2} \exp \left[- \left(\frac{z - z_{02}/2}{z_{m2}} \right)^2 \right] + N_s + N_p \right\},$$

$$\theta = \frac{z - z_{01}}{z_{m1}/2}, \quad (3)$$

где

$$N_s = \beta \sin \left[\frac{\pi}{2} \frac{x}{x_s} \exp \left[- \left(\frac{z - z_{02}}{z_{m2}} \right)^2 \right] \right], \quad (4)$$

относительная частота спорадического слоя, а

$$N_p = \beta_p \exp \left[- \left(\frac{x_n - x_{n3}}{x_{m3}} \right)^2 - \left(\frac{y - y_{03}}{y_{m3}} \right)^2 - \left(\frac{z_n - z_{n3}}{z_{m3}} \right)^2 \right] \quad (5)$$

относительная частота возмущения.

В формулах (3–4) введены параметры: z_{01} – высота максимума слоя $F2$, z_{m1} – условная полутолщина слоя $F2$, β – безразмерный коэффициент, характеризующий степень ионизации спорадического слоя и слоя E по отношению к основному, z_{02} – высота максимума спорадического слоя, $z_{02}/2$ – высота максимума нижнего слоя E , z_{m2} – условная полутолщина нижних слоев, величина N_0 – электронная концентрация в максимуме основного слоя $F2$. При вычислении применялись следующие значения этих параметров: $N_0 = 2 \cdot 10^6$ см⁻³, $z_{m1} = 100$ км, $z_{01} = 300$ км, $z_{m2} = 10$ км, $z_{02} = 200$ км, $\chi = 0$. Характерный горизонтальный размер спорадического слоя $x_s = 600$ км.

В формуле (5), описывающей эллиптическое возмущение, $x_{m3} = 15$ км, $y_{m3} = 10$ км, $z_{m3} = 10$ км, причем эллипсоид повернут:

$$\begin{cases} x_n = x \cos(\theta_\lambda) - z \sin(\theta_\lambda) \\ z_n = x \sin(\theta_\lambda) + z \cos(\theta_\lambda) \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_{n3} = x_3 \cos(\theta_\lambda) - z_3 \sin(\theta_\lambda) \\ z_{n3} = x_3 \sin(\theta_\lambda) + z_3 \cos(\theta_\lambda) \end{cases} \quad (6)$$

В выражениях (6) $x_3 = 75$ км, $z_3 = 290$ км, а угол поворота θ_λ равен 10° . Параметр β_p – это безразмерный коэффициент, характеризующий степень ионизации возмущения.

Ниже сопоставлены два случая: $\beta = 0, \beta_p = 0$ и $\beta = 0,3, \beta_p = -0,3$.

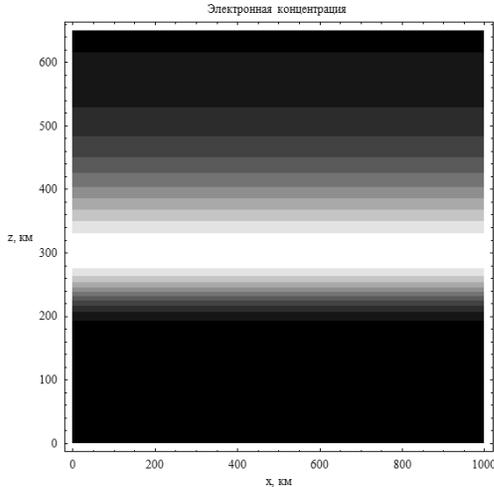


Рис. 1.

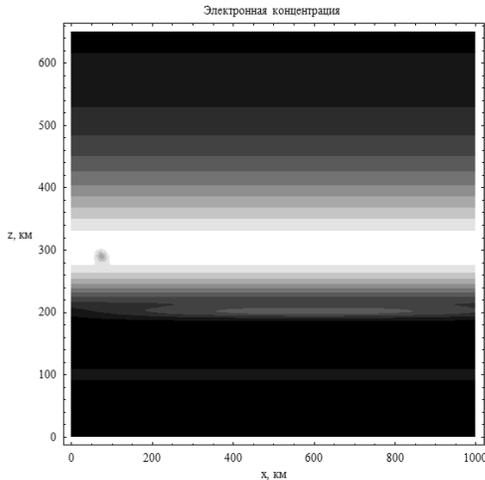


Рис. 2

Электронная концентрация ионосферы, $\beta = 0, \beta_p = 0$ – рис. 1 и $\beta = 0,3, \beta_p = -0,3$ – рис. 2

На рис. 1 и 2 показаны линии равного уровня электронной концентрации ионосферной плазмы в невозмущенном (рис. 1) и в возмущенном случаях. На рис. 2 помимо слоя F2, представленного также и на рис. 1, мы видим слой E на высоте 100 км, спорадический слой на высоте 200 км и локальное возмущение (понижение электронной концентрации) эллиптической формы на высоте 290 км.

3. Расширенная бихарактеристическая система уравнений

Для вычисления лучевых траекторий в фазовом пространстве координат и волновых векторов в работе применена бихарактеристическая система уравнений [5; 19]:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} \bigg/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad (7)$$

с гамильтонианом:

$$\Gamma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r}, \omega), \quad (8)$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$ – координаты точки наблюдения, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – волновой вектор, $\omega = 2\pi \times 13,25 \cdot 10^6$ с⁻¹ – круговая частота излучения, t – групповое время, $\varepsilon(\vec{r}, \omega)$ – эффективная диэлектрическая проницаемость среды распространения, $c = 2,997925 \cdot 10^8$ м/с – скорость света.

Систему (7–8) необходимо дополнить начальными условиями. Предположим, что начальный волновой вектор $\vec{k}(0)$ параметрически зависит от углов выхода луча:

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \cos \eta, \quad k_y(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta \cos \eta,$$

$$k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \eta, \quad (9)$$

величина ε_0 – это значение эффективной диэлектрической проницаемости среды в источнике, а точечный источник излучения находится вне ионосферной плазмы и расположен в начале координат ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$):

$$\vec{r} \Big|_{t=0} = (x_0, y_0, z_0). \quad (10)$$

Однако для вычисления расходимости лучевых потоков необходимо перейти к расширенной бихарактеристической системе [15; 20; 21], дополнив (7–8) уравнениями:

$$\frac{d\vec{r}_\zeta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} \bigg/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right), \quad \frac{d\vec{k}_\zeta}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right), \quad (11)$$

$$\frac{d\vec{r}_\eta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} \bigg/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right), \quad \frac{d\vec{k}_\eta}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right),$$

с соответствующими начальными условиями:

$$k'_{x\zeta}(0) = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta \cos \eta, \quad k'_{y\eta}(0) = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \sin \eta,$$

$$k'_{y\zeta}(0) = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta \sin \eta, \quad k'_{y\eta}(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \cos \eta,$$

$$k'_{z\zeta}(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta, \quad k'_{z\eta}(0) = 0,$$

$$\vec{r}'_{\zeta}(0) = 0, \quad \vec{r}'_{\eta}(0) = 0. \quad (12)$$

Предположим, что распространение электромагнитной волны изначально осуществляется в плоскости (x, z) , то есть $\zeta = 0$.

4. Лучевое распространение в фазовом пространстве

Рассмотрим структуру лучевых траекторий в различных двумерных проекциях фазового пространства, сопоставляя невозмущенный (нечетные номера рисунков) и возмущенный (четные номера рисунков) случаи.

На рис. 3 показана лучевая структура радиосигнала в случае распространения волны в плоскости (x, z) в невозмущенном случае, а на рис. 4 такая же структура показана для возмущенного случая. Рис. 3 типичен для однослойной модели. С ростом угла выхода луча (η) лучи, отражаясь от ионосферного слоя F, образуют верхнюю каустическую, затем точку возврата (каустическое острие), нижнюю каустическую и, наконец, начинают просачиваться через ионосферный слой.

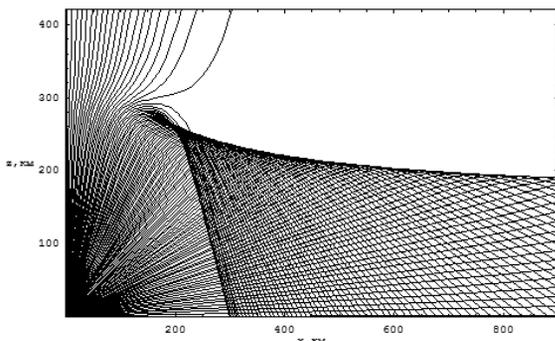


Рис. 3.

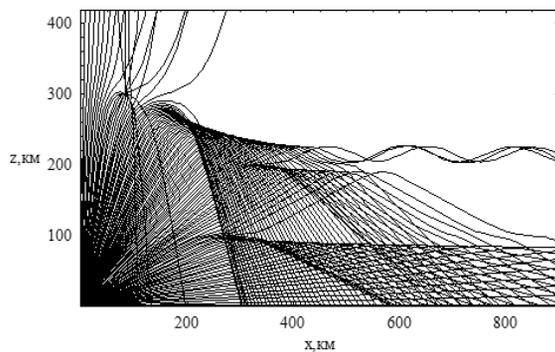


Рис. 4.

Лучевая структура в плоскости (x, z) ; невозмущенный случай – рис. 3; возмущенный случай – рис. 4

На рис. 4 лучевая структура существенно сложнее. С ростом угла выхода луча сначала образуют каустическое острие, связанное с нижним слоем E (см. рис. 2), затем возникает острие, вызванное спорадическим слоем, и только по-

том образуется каустическое острие слоя F, причем между двумя последними топологическими структурами возникает волновой канал, в котором на рис. 4 находятся несколько лучей. Что касается локальной неоднородности, о которой шла речь выше, то ей соответствует фокусировка лучей выше и левее каустического острия слоя F.

В отсутствие магнитного поля и поперечных горизонтальных градиентов луч не выходит из плоскости первоначального распространения. Поэтому проекции лучевых траекторий в плоскостях (y, z) и (x, y) ниже не приводятся.

Перейдем теперь к смешанным координатно-импульсным подпространствам фазового пространства и рассмотрим плоскость $(x, k_z/k)$ (см. рис. 5 и 6). Величина $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0}$ введена для нормировки.

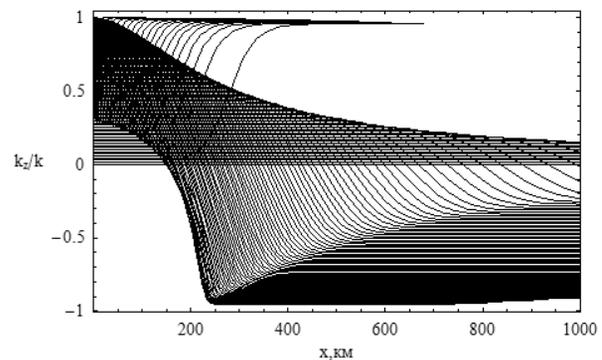


Рис. 5.

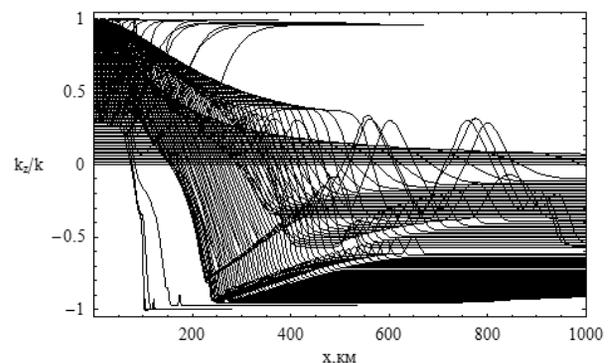


Рис. 6.

Лучевая структура в плоскости $(x, k_z/k)$; невозмущенный случай – рис. 5; возмущенный случай – рис. 6

Рассмотрим сначала рис. 5 и проследим изменение характера лучевой траектории с ростом угла выхода луча (η). Все лучи выходят из точки с координатой $x = 0$. Луч с $\eta = 0$ идет строго горизонтально. Далее с увеличением начального значения k_z (и соответственно η) лучи на рис. 5 поднимаются (относительно друг друга) и образуют верхнюю каустическую, аналогичную верхней каустической рис. 3, но смещенную относительно

но неё. Отражаясь от ионосферного слоя, лучи выходят из плазмы и далее распространяются с постоянным k_z . В верхней части рисунка видны лучи, прошедшие ионосферный слой. Следует отметить нижнюю каустику, образованную лучами, у которых сначала сильно уменьшилась компонента волнового вектора k_z , а потом, после прохождения максимума слоя, опять возросла.

В возмущенном случае (рис. 6) лучевая картина принципиально похожа на структуру рис. 5, но, во-первых, в правой части рисунка мы наблюдаем сильные (но редкие) осцилляции, соответствующие распространению лучей в волновом канале и прерывающие каустику, во-вторых, имеют место и более слабые осцилляции, соответствующие внутренним каустическим структурам рис. 4. И, наконец, следует отметить почти вертикальные лучи, не прошедшие ионосферный слой и опустившиеся на землю, что вызвано локальной неоднородностью. В целом каустическая структура рис. 6 весьма запутанная. Напрашивается вывод, что такая карта плохо пригодна для построения предканонического оператора, поскольку на ней трудно выбрать участок, не содержащий как свои особенности, так и особенности предыдущей карты. Хотя такое заключение предполагает дополнительное исследование.

Рассмотрим теперь плоскость $(z, k_x/k)$ (см. рис. 7 и 8).

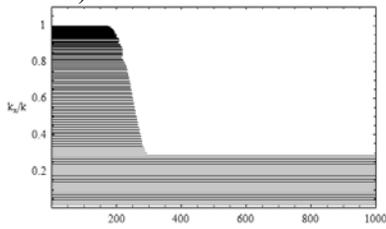


Рис. 7.

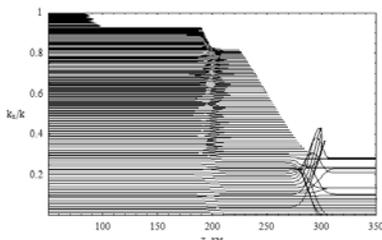


Рис. 8 а.

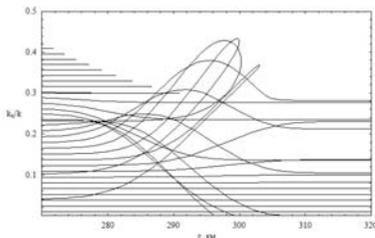


Рис. 8 б.

Лучевая структура в плоскости $(z, k_x/k)$; невозмущенный случай – рис. 7; возмущенный случай – рис. 8; рис. 8 б – фрагмент рис. 8 а.

На рис. 7 показан невозмущенный случай. Здесь всё просто. Нижние линии соответствуют лучам рис. 3, проходящим ионосферный слой, а выше мы видим лучи, отразившиеся от ионосферы. Причем, так как горизонтальные градиенты отсутствуют, лучи на этом рисунке возвращаются по тем же траекториям. Правая граница этих лучей – каустика. В возмущенном случае (рис. 8) возникают вертикальные полосы, ограниченные каустическими линиями (рис. 8 а). Особый интерес представляет проявление локальной неоднородности в этом подпространстве (на этой карте) (см. фрагмент на рис. 8 б). Один из лучей даже делает петлю, охватывая неоднородность. Однако в целом лучевая структура на этой карте более регулярна, чем в предыдущем случае.

Перейдем теперь к чисто импульсному подпространству фазового пространства и рассмотрим плоскость $(k_x/k, k_z/k)$ (см. рис. 9 и 10).

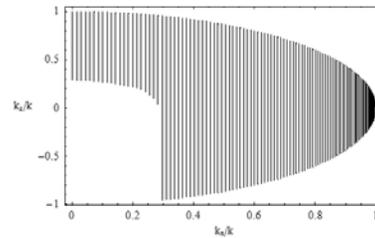


Рис. 9.

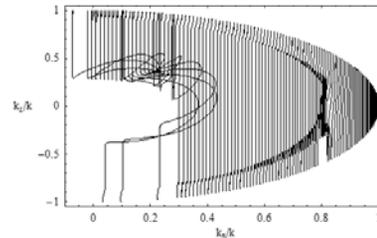


Рис. 10 а.

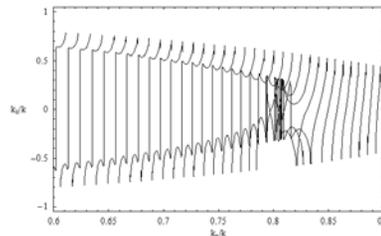


Рис. 10 б.

Лучевая структура в плоскости $(k_x/k, k_z/k)$; невозмущенный случай – рис. 9; возмущенный случай – рис. 10; рис. 10 б – фрагмент рис. 10 а.

В невозмущенном случае (рис. 9) лучами являются прямые линии, поскольку для каждого угла выхода луча $(\eta) k_x$ является константой. Лучи, отражающиеся от ионосферы, идут сверху вниз и показаны в правой части рисунка. Проходящие лучи (слева) также идут сначала вниз, затем «отражаются» от уровня, соответствующего минимальной диэлектрической проницаемости среды (возникает каустика), и затем возвраща-

ются обратно. Это наиболее, по нашему мнению, удачная карта, поскольку справа каустик нет, а слева справедлива геометрическая оптика: у проходящих лучей в плоскости (x, z) нет каустики, и можно вернуться в конфигурационное пространство.

Хуже обстоит дело в возмущенном случае (рис. 10). Во-первых, обращает на себя внимание локальная неоднородность в виде некоторой области слева, откуда во все стороны расходятся лучи (рис. 10 а), образующие, без сомнения, каустику. Во-вторых, в правой области имеется сложная лучевая, а следовательно, – и каустическая структура, фрагмент которой показан на рис. 10 б.

5. Лучевые расходимости

Наличие каустик и их особенностей приводит к сингулярностям лучевых решений, или подынтегральных выражений (для предканонического оператора Маслова). На рис. 11 и 12 показано ослабление электромагнитного поля вдоль лучей за счет расходимости лучевого потока.

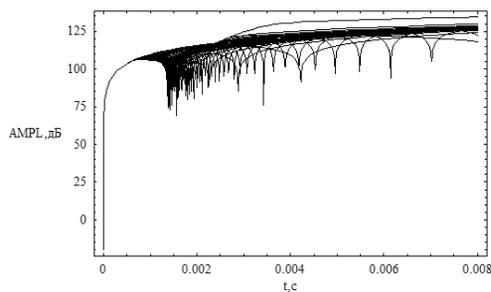


Рис. 11.

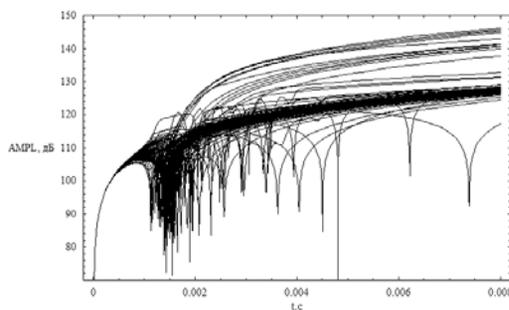


Рис. 12.

Зависимость расходимости сигнала от времени; невозмущенный случай – рис. 11; возмущенный случай – рис. 12.

По горизонтальной оси отложено групповое время в секундах, а по вертикальной:

$$AMPL = -20 \lg \sqrt{\frac{J_0}{J(\vec{r})}} \quad (13)$$

в децибелах. В формуле (13) введены обозначения:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_x} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_y} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_z} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \end{vmatrix}, \quad J_0 = J|_{t=100/c}. \quad (14)$$

Таким образом, начальное значение якобиана вычисляется на расстоянии 1 м от изотропного передатчика.

Из рис. 11 видно, что вдоль луча интенсивность излучения сначала резко падает (для всех лучей), а потом выходит на относительно стабильный уровень (ослабление увеличивается, но медленно). При этом, поскольку каждый луч касается каустики, в её окрестности интенсивность сигнала резко возрастает (в лучевом приближении до бесконечности), и на графике возникают характерные «провалы». Самая большая расходимость у луча, близкого к «лучу Педерсена» (верхний луч).

В возмущенном случае (рис. 12) общая структура остается той же, но самыми слабыми сигналами являются не только сигналы, передаваемые «лучами Педерсена», но и рассеянные локальной неоднородностью.

Рассмотрим теперь карту (z, k_x) и соответствующий коэффициент, пропорциональный квадрату подынтегрального выражения для предканонического оператора, выраженный в децибелах:

$$AKX = -20 \lg \sqrt{\frac{J_{k_x 0}}{J_{k_x}(\vec{r})}}, \quad (15)$$

где

$$J_{k_x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial \zeta} & \frac{\partial k_x}{\partial \eta} & \frac{\partial \Gamma}{\partial x} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_y} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_z} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \end{vmatrix}, \quad J_{k_x 0} = J_{k_x}|_{t=100/c}. \quad (16)$$

Начальное значение якобиана $J_{k_x 0}$ в (15) введено из соображений нормировки. На рис. 13 приведен график коэффициента (15) в зависимости от группового времени в невозмущенном случае.

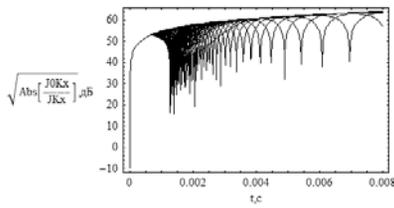


Рис. 13.

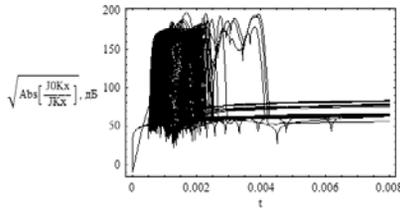


Рис. 14 а.

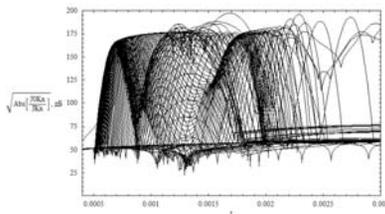


Рис. 14 б.

Амплитудный коэффициент $\sqrt{|J_{k_x 0} / J_{k_x}|}$; невозмущенный случай – рис. 13; возмущенный случай – рис. 14; рис. 14 б – фрагмент рис. 14 а.

Хотя абсолютные значения по вертикальной оси в два раза меньше, чем на рис. 11, структуры в целом похожи. Также имеют место провалы, обозначающие положение каустики или её особенности. На рис. 14 представлен возмущенный случай. Следует отметить, что хотя со временем все лучи выходят по этому коэффициенту на уровень 60–70 дБ (рис. 14 а), при прохождении возмущенной области они имеют значительные (до 200 дБ) колебания по ослаблению. Дольше всех на этом уровне сохраняются лучи в волновом канале (рис. 14 б), однако после выхода из него коэффициент падает. Провалы в виде «бахромы» показывают положения каустик.

На рис. 15, 16 приведены в децибелах графики зависимости коэффициента:

$$AKZ = -20 \lg \sqrt{\left| \frac{J_{k_z 0}}{J_{k_z}(\vec{r})} \right|}, \quad (17)$$

пропорционального квадрату подынтегрального выражения для предканонического оператора, для карты (x, k_z) вдоль лучей в зависимости от группового времени в невозмущенном и возмущенном случаях. В выражении (17)

$$J_{k_z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_x} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_y} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial k_z}{\partial \zeta} & \frac{\partial k_z}{\partial \eta} & \frac{\partial \Gamma}{\partial z} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \end{vmatrix}, \quad J_{k_z 0} = J_{k_z} \Big|_{t=100/c}. \quad (18)$$

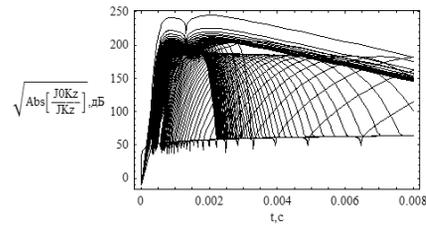


Рис. 15.

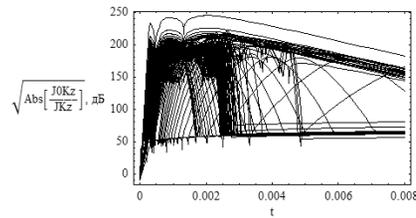


Рис. 16 а.

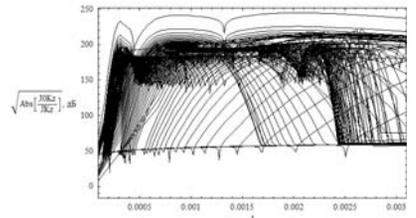


Рис. 16 б.

Амплитудный коэффициент $\sqrt{|J_{k_z 0} / J_{k_z}|}$; невозмущенный случай – рис. 15; возмущенный случай – рис. 16; рис. 16 б – фрагмент рис. 16 а.

Изучая рис. 15 и 16, видим, что коэффициент (17) увеличивается с ростом угла выхода луча η . Самые верхние лучи соответствуют рассеянию на локальной неоднородности, а наиболее темная часть в правой части рисунков – лучам, образующим каустическое острие слоя F. Как и в предыдущем слое, свисающая вниз «бахрома» обозначает положение каустик.

Перейдем теперь к последнему случаю – карте (k_x, k_z) . Коэффициент, пропорциональный квадрату подынтегрального выражения для предканонического оператора, для этой карты (x, k_z) в зависимости от группового времени имеет вид:

$$AKXZ = -20 \lg \sqrt{\left| \frac{J_{k_x k_z 0}}{J_{k_x k_z}(\vec{r})} \right|}, \quad (19)$$

где

$$J_{k_x k_z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial \zeta} & \frac{\partial k_x}{\partial \eta} & \frac{\partial \Gamma}{\partial x} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_y} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial k_z}{\partial \zeta} & \frac{\partial k_z}{\partial \eta} & \frac{\partial \Gamma}{\partial z} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \end{vmatrix}, \quad J_{k_x k_z, 0} = J_{k_x k_z} \Big|_{l=100/c}. \quad (20)$$

На рис. 17 и 18 последовательно представлены невозмущенный и возмущенный случаи. Анализируя рис. 17, видим, что с увеличением угла выхода луча угол первоначального наклона траектории на рисунке растет, коэффициент вдоль траектории первоначально растет, а затем резко падает, и, наконец, крайний левый нисходящий луч соответствует каустическому острию. «Бахрома» отсутствует, зато коэффициент вдоль каждого луча стремится к $-\infty$. Роль возмущений хорошо видна на рис. 18. Появляется «бахрома», так как возникают дополнительные каустики. Несколько круто спадающих траекторий справа соответствуют лучам из волнового канала. Верхние косые траектории связаны с рассеянием на локальной неоднородности.

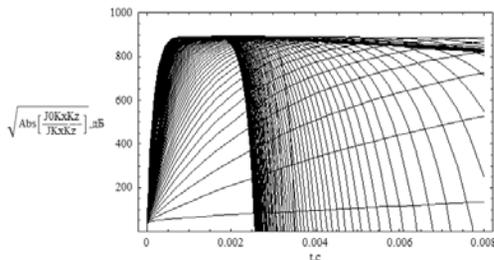


Рис. 17.

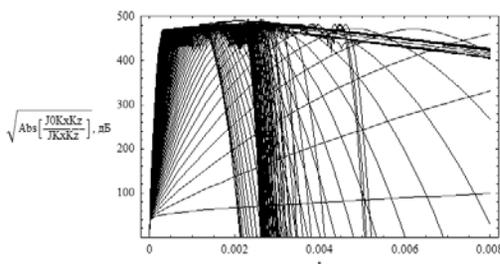


Рис. 18.

Амплитудный коэффициент $\sqrt{|J_{k_x k_z, 0} / J_{k_x k_z}|}$;
 невозмущенный случай – рис. 17;
 возмущенный случай – рис. 18

6. Заключение

Таким образом, в работе сопоставлены проекции 6-мерного фазового пространства в двумерные подпространства, соответствующие различ-

ным картам канонического оператора Маслова, в невозмущенном и возмущенном случаях. Рассмотрены особенности (огигающие) лучевых семейств (каустики), возникающие в этих проекциях. С этой же целью в работе рассчитаны амплитудные множители вдоль лучей для разных карт и проанализированы сингулярности, связанные с касанием лучей каустик. В качестве возмущений ионосферного слоя F рассмотрены три дополнительные структуры: слой E, спорадический слой и локальное эллиптическое возмущение в окрестности максимума главного ионосферного слоя F. Необходимо подчеркнуть, что переход от классического представления решения в лучевой форме в конфигурационном пространстве к интегральному представлению (в частности, в виде канонического оператора Маслова) осуществляется ради построения равномерно асимптотического решения, и наличие каустик на канонических картах вблизи каустик конфигурационного пространства нежелательно. Рассмотренные подпространства даже в невозмущенном случае содержат каустики, а введение таких не очень сложных возмущений делает лучевую и каустическую картину весьма запутанной. Предпочтительнее всего в этом смысле выглядит переход в импульсное подпространство по двум переменным (координату y в данной задаче можно особо не выделять), но при этом увеличивается кратность интеграла, описывающего асимптотическое решение задачи.

Поэтому остается актуальной проблема тщательного анализа лучевых и каустических структур в конкретных задачах и перехода от интегрального описания к волновой теории катастроф [4–8; 22–25].

Хотя следует отметить, что сшивка различных канонических карт и непосредственное интегрирование также приводят к успешному решению [1–4; 12].

Авторы выражают благодарность профессору Палкину Е.А. за обсуждение работы и ценные замечания.

Литература

1. Ипатов Е.Б., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численная реализация метода канонического оператора Маслова в задачах распространения коротких радиоволн в ионосфере Земли // Изв. вузов. Радиофизика. – 1990. – Т. 33. – № 5. – С. 562–573.
2. Ipatov, E.B., Lukin, D.S., Palkin, E.A. Maslov canonical operator in problems of diffraction and propagation of waves in inhomogeneous media // J.

Numer. Anal. & Math. Modelling. – 1990. – V. 5. – № 6. – P. 465–488.

3. Ipatov, E.B., Lukin, D.S., Palkin, E.A., Shkolnikov, V.A. Maslov canonical operator in problems of diffraction and EM waves propagation in inhomogeneous media //Papers of technical meeting on electromagnetic theory /OFSET-90. The Institute of Electrical Engineers of Japan. – 1990. – P. 39–48.

4. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Методы моделирования распространения электромагнитных волн в ионосфере с учетом распределений электронной концентрации и магнитного поля Земли // Радиотехника и электроника. – 2014. – Т. 59. – № 12. – С. 1180–1187.

5. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. – М. : МФТИ, 1982. – 159 с.

6. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с вырожденными седловыми точками : препринт / ИРЭ АН СССР. – М., 1984. – № 41 (413). – 75 с.

7. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования основных волновых катастроф с корангом, равным двум // Распространение и дифракция электромагнитных волн – М. : МФТИ, 1993. – С. 4–19.

8. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф : монография. – М. : РосНОУ, 2013. – 368 с.

9. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. – М. : МГУ, 1965. – 553 с.

10. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М. : Наука, 1976. – 296 с.

11. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. – М. : Наука, 1976. – 352 с.

12. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Сопоставление интегральных асимптотических методов //Труды X Школы-семинара по дифракции и распространению волн. (7–15.02.1993) – М. : МФТИ. – 1993. – С.3–35.

13. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Исследование влияния локальных неоднородностей ионосферной плазмы на распространение коротких радиоволн // Вестник Российского нового университета. – 2010. – Выпуск 3 : Управление, вычислительная техника и информатика. – С. 17–25.

14. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Исследование распространения частотно-модулированных пространственно-временных сигналов в неоднородной анизотропной ионосфере // Вестник Российского нового университета. – 2013. – Выпуск 4 : Управление, вычислительная техника и информатика. – С. 47–52.

15. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57. – № 9. – С. 1028–1034.

16. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Распространение частотно-модулированных пространственно-временных радиоволн в анизотропной ионосфере // Труды XXIV Всероссийской научной конференции «Распространение радиоволн» (29 июня–5 июля 2014; Иркутск)–Иркутск : ИСЗФ СО РАН, 2014. – Т. 4. – С. 126–129.

17. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2013. – Т. 18. – № 8. – С. 18–23.

18. Крюковский А.С., Кирьянова К.С. Динамическое моделирование распространения радиоволн в окрестности экваториальной аномалии на основе метода бихарактеристик // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2011. – Т. 16. – № 8. – С. 21–25.

19. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Исследование особенностей распространения коротких радиоволн в неоднородной анизотропной ионосфере // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2009. – Т. 14. – № 8. – С. 17–26.

20. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере//Космические исследования. – 1967. – Т. 5. – Вып. 4. – С. 593–600.

21. Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде // Радиотехника и электроника. – 1969. – Т. 14. – № 9. – С. 1673–1677.

22. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Применение теории краевых катастроф для построения равномерных асимптотик

быстроосциллирующих интегралов // Дифракция и распространение волн // Междувед. сборник МФТИ. – М., 1985. – С. 4–21.

23. Kryukovsky, A.S., Rogachev, S.V., Lu-kin, D.S. Special Software for Computing the Special Functions of Wave Catastrophes // Revista de Matematica: Teoria y Aplicaciones / San Pedro Montes de Oca, San Jose, Costa Rica : Universidad de Costa Rica, 2015. – P. 21–30.

24. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локаль-ная асимптотика быстроосциллирующих интег-

ралов, описывающих волновое поле в областях фокусировки // Дифракция и распространение электромагнитных волн // Междувед. сб. МФТИ. – М., 1984. – С. 39–53.

25. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Малы-шенко А.Б. Разработка численных алгоритмов расчета и визуализации волновых катастроф // Вестник Российского нового университета. – 2008. – Выпуск 3 : Управление, вычислительная техника и информатика. – С. 25–48.