В.А. Минаев[1]
Н.А. Каленикова[2]

МЕТОД ОЦЕНОК ИНТЕРВАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

В статье предлагается метод оценок интервальных распределений простых чисел, основанный на новой модели их формирования. Доказываются гипотеза Лежандра, гипотеза Брокарда, гипотеза «простых близнецов».

Ключевые слова: *простые числа, интервальные оценки, гипотеза Лежандра, гипотеза Брокарда, гипотеза «простых близнецов».*

V.A.Minaev
N.A. Kalenikova

METHOD OF INTERVAL ESTIMATION PRIME NUMBERS DISTRIBUTIONS

This article proposes a method of interval estimation of prime number distributions, based on a new model of their formation. Hypothesis of Legendre, hypothesis of Brocard, hypothesis of "simple twins" are proved.

Keywords: *prime number, interval estimation, hypothesis Legendre, hypothesis Brocard, hypothesis of "simple twins".*

Основываясь на теореме о полном множестве простых чисел, доказательство которой приведено в данном сборнике в статье В.А. Минаева, в настоящей работе описываются результаты, связанные с:

- моделированием эффекта «пересечений» аддитивных последовательностей, формирующих составные числа $\{6n \pm 1\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$;
- обоснованием нового метода интервальных оценок распределения простых чисел;
- доказательством гипотезы Лежандра, гипотезы Брокарда, гипотезы «простых близнецов».

В теореме о полном множестве простых чисел вида доказано, что уравнения, описывающие механизм формирования составных чисел вида $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ и дающие возможность однозначно выделить **все простые числа** из множеств $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ [1–5, 7, 9], представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} c^+_{p_i^-} &= p_i^- \cdot p_i^- + p_i^- \cdot 6m \\ c^+_{p_i^+} &= p_i^+ \cdot p_i^+ + p_i^+ \cdot 6m \\ c^-_{p_i^-} &= p_i^- \cdot p_i^+ + p_i^- \cdot 6m \\ c^-_{p_i^+} &= p_i^+ \cdot p_i^- + p_i^- \cdot 6m; \end{aligned} \qquad (1)$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots ;\ i = 1, 2, 3, \dots ,$$

где введены следующие обозначения:

- p_i^-, $i = 1, 2, 3, \dots$ – простое число из множества $\{6k-1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ с недостающей единицей для деления нацело на 6 (минус простое число – МПЧ);
- p_i^+, $i = 1, 2, 3, \dots$ – простое число из множества $\{6k+1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ с избыточной единицей для деления нацело на 6 (плюс простое число – ППЧ).

Соответственно, c_i^- – минус составное число (МСЧ) из множества $\{6k-1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ с недостающей единицей для деления нацело на 6; а c_i^+ – плюс составное число (ПСЧ) из множества $\{6k+1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ с избыточной единицей для деления нацело на 6 (ПСЧ).

Понятия МПЧ, ППЧ, МСЧ и ПСЧ впервые введены в работах [6, 8].

Как показано при доказательстве теоремы о полном множестве простых чисел, без ограничения общности в соотношениях (1) p_i^+ и p_i^- можно заменить на q_i^+ и q_i^-, обозначающие два ряда проиндексированных натуральных чисел из множеств $\{6k+1\}$ и $\{6k-1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} c^+_{q_i^-} &= q_i^- \cdot q_i^- + q_i^- \cdot 6m \\ c^+_{q_i^+} &= q_i^+ \cdot q_i^+ + q_i^+ \cdot 6m \\ c^-_{q_i^-} &= q_i^- \cdot q_i^+ + q_i^- \cdot 6m \\ c^-_{q_i^+} &= q_i^+ \cdot q_i^- + q_i^- \cdot 6m; \end{aligned} \qquad (2)$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots ;\ i = 1, 2, 3, \dots .$$

---

[1] Доктор технических наук, профессор, проректор НОУ ВПО «Российский новый университет».

[2] Преподаватель НОУ ВПО «Российский новый университет».

Очевидно:

$$\left\{q_i^-\right\} = \left\{p_i^-\right\} \cup \left\{C_i^-\right\};$$
$$\left\{q_i^+\right\} = \left\{p_i^+\right\} \cup \left\{C_i^+\right\}. \quad (3)$$

Использование q_i вместо p_i в соотношениях (2) значительно ускоряет процедуру нахождения простых чисел и упрощает различные оценочные операции в связи с тем, что разница между стоящими друг против друга q_i^- и q_i^+ всегда равна 2.

Интервальные оценки распределения простых чисел

Применяя уравнения (2), определим количество МСЧ и ПСЧ, образуемых каждым q_i^- и q_i^+ на интервале (0, *n*).

Из первого уравнения (2) следует:

$$q_i^{-2} + q_i^- \cdot 6m + q_i^- \cdot 6\varepsilon_{q_i^-}^+ - n = 0. \quad (4)$$

Откуда

$$m^+\left(q_i^-, n\right) = \left[\frac{n - q_i^{-2} - 6q_i^- \cdot \varepsilon_{q_i^-}^+}{6q_i^-}\right] + 1, \quad (5)$$

где $m^+\left(q_i^-, n\right)$ – число ПСЧ, образуемых арифметической прогрессией, формируемой первым уравнением (2); единица добавляется для учета первого члена прогрессии.

Аналогично из второго уравнения (2) имеем:

$$m^+\left(q_i^+, n\right) = \left[\frac{n - q_i^{+2} - 6q_i^+ \cdot \varepsilon_{q_i^+}^+}{6q_i^+}\right] + 1, \quad (6)$$

из третьего –

$$m^-\left(q_i^-, n\right) = \left[\frac{n - q_i^- \cdot q_i^+ - 6q_i^- \cdot \varepsilon_{q_i^-}^-}{6q_i^-}\right] + 1, \quad (7)$$

и четвертого –

$$m^-\left(q_i^+, n\right) = \left[\frac{n - q_i^+ \cdot q_i^- - 6q_i^+ \cdot \varepsilon_{q_i^+}^-}{6q_i^+}\right] + 1. \quad (8)$$

В соотношениях (4) – (8) по определению $0 < \varepsilon_{q_i^\pm}^\pm < 1$.

Из (5) – (8) вытекает, что общее количество МСЧ и ПСЧ вида $\left\{6k \pm 1\right\}$, *k* = 1, 2, 3, … , образуемых на интервале (0, *n*), равно:

$$C(n) = C^+(n) + C^-(n), \quad (9)$$

где

$$C^-(n) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \left\{m^-\left(q_i^-, n\right) + m^-\left(q_i^+, n\right)\right\} \quad (10)$$

$$C^+(n) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \left\{m^+\left(q_i^-, n\right) + m^+\left(q_i^+, n\right)\right\}, \quad (11)$$

в которых $i_{\max}$ равно индексу максимального q_i, участвующего в формировании ПСЧ и МСЧ на интервале (0, *n*).

Подставляя значения m^- и m^+ из (5) – (8), имеем:

$$C(n) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \left\{\left[\frac{n - q_i^{-2} - 6q_i^- \cdot \varepsilon_{q_i^-}^+}{6q_i^-}\right] + \left[\frac{n - q_i^{+2} - 6q_i^+ \cdot \varepsilon_{q_i^+}^+}{6q_i^+}\right] + \left[\frac{n - q_i^- \cdot q_i^+ - 6q_i^- \cdot \varepsilon_{q_i^-}^-}{6q_i^-}\right] + \left[\frac{n - q_i^+ \cdot q_i^- - 6q_i^+ \cdot \varepsilon_{q_i^+}^-}{6q_i^+}\right] + 4\right\}. \quad (12)$$

Используя обозначение $q_i = q_i^-$ и $q_i^+ = q_i + 2$, получаем:

$$C(n) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \left\{\left[\frac{n}{6q_i} - \frac{q_i}{6} - \varepsilon_{q_i^-}^+\right] + \left[\frac{n}{6(q_i+2)} - \frac{q_i+2}{6} - \varepsilon_{q_i^+}^+\right] + \left[\frac{n}{6q_i} - \frac{q_i+2}{6} - \varepsilon_{q_i^-}^-\right] + \left[\frac{n}{6(q_i+2)} - \frac{q_i}{6} - \varepsilon_{q_i^+}^-\right] + 4\right\}. \quad (13)$$

Введем обозначение: $M = i_{\max}$.

Примем, что математическое ожидание среднего значения ошибок $\hat{\varepsilon}_{q_i^-}^+ = \hat{\varepsilon}_{q_i^+}^+ = \hat{\varepsilon}_{q_i^-}^- + \hat{\varepsilon}_{q_i^+}^- = \frac{1}{2}$, тогда сумма всех ε_{q_i} равна:

$$\sum_{i=1}^{M} \varepsilon_{q_i}^\pm = \frac{M}{2}. \quad (14)$$

Выражение в фигурных скобках приобретает следующий вид:

$$C(n) = \sum_{i=1}^{M} \left[\frac{n}{3q_i} + \frac{n}{3(q_i+2)} - \frac{4}{6}q_i - \frac{2}{3}\right] - 2M + 4M, \quad (15)$$

или

$$C(n) = \frac{n}{3}\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{1}{q_i^-} + \frac{1}{q_i^+}\right) - \sum_{i=1}^{M}\frac{2}{3}q_i + 2M - \frac{2}{3}M. \quad (16)$$

Подставляя в (16) значение $q_i = 6i - 1$ и учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{M} i = \frac{M(M+1)}{2}, \quad (17)$$

получаем

$$C(n) = \frac{n}{3}\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{1}{q_i^-} + \frac{1}{q_i^+}\right) - \sum_{i=1}^{M}\frac{2}{3}(6i-1) + 2M - \frac{2}{3}M. \quad (18)$$

Проделав соответствующие вычисления, имеем

$$C(n) = \frac{n}{3}\left[\sum_{i=1}^{k=2M}\frac{1}{s_i}\right] - 2M^2 \quad (19)$$

или учитывая, что при $n >> 1$ $M \cong \sqrt{n}/6$, как показано в статье Минаева В.А. в настоящем сборнике,

$$C(n) = \frac{n}{3}\left(\sum_{i=1}^{2M}\frac{1}{s_i} - \frac{1}{6}\right), \quad (20)$$

где s_i – число вида $6i \pm 1$; $i = 1,\ 2,\ \ldots\ 2M$.

С учетом того, что ПСЧ и МСЧ, образуемые в (2) от соответствующих ПСЧ и МСЧ, повторяют ПСЧ и МСЧ, формируемые изначально от минус и плюс простых чисел, устраним «эффект дублирования», записав выражение (20) в виде:

$$C_1(n) = \frac{n}{3}\left(\sum_{i=1}^{L}\frac{1}{p_i} - \frac{1}{6}\right), \quad (21)$$

где L – максимального простого числа, участвующего в образовании составных чисел на интервале $(0, n)$, $\{p_i\} = \{p_i^-\} \bigcup \{p_i^+\}$.

Как показано в работах [11, 12], существует эффект «пересечений» аддитивных последовательностей, формирующих составные числа, который также необходимо учесть в (21). В работе [12] приведены соотношения, с помощью которых формируются «пересечения» для ПСЧ:

$$\begin{aligned} &q_i^- \cdot q_i^- + q_i^- \cdot 6m = q_j^- \cdot q_j^- + q_j^- \cdot 6l \\ &q_i^- \cdot q_i^- + q_i^- \cdot 6m = q_j^+ \cdot q_j^+ + q_j^+ \cdot 6l \\ &q_i^+ \cdot q_i^+ + q_i^+ \cdot 6m = q_j^+ \cdot q_j^+ + q_j^+ \cdot 6l \\ &q_i^+ \cdot q_i^+ + q_i^+ \cdot 6m = q_j^- \cdot q_j^- + q_j^- \cdot 6l; \end{aligned} \tag{22}$$

где $i, j = 1, 2, 3, \ldots, M$; $m, l = 0, 1, 2, \ldots$.

Вторая система уравнений, определяющих «пересечения» МСЧ, записывается в виде:

$$\begin{aligned} &q_i^- \cdot q_i^+ + q_i^- \cdot 6m = q_j^- \cdot q_j^+ + q_j^- \cdot 6l \\ &q_i^+ \cdot q_i^- + q_i^+ \cdot 6m = q_j^+ \cdot q_j^- + q_j^+ \cdot 6l \\ &q_i^- \cdot q_i^+ + q_i^- \cdot 6m = q_j^+ \cdot q_j^- + q_j^+ \cdot 6l \\ &q_i^+ \cdot q_i^- + q_i^+ \cdot 6m = q_j^- \cdot q_j^+ + q_j^- \cdot 6l; \end{aligned} \tag{23}$$

где $i, j = 1, 2, 3, \ldots, M$; $m, l = 0, 1, 2, \ldots$.

Нетрудно показать, что для общего случая период, через который в последовательностях возникают «пересечения», равен:

$$T\left(q_i, q_j\right) = 6 \cdot q_i \cdot q_j; \;\; i, j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots . \tag{24}$$

При этом каждому m в уравнениях (22) и (23) соответствует свое l, при которых правая и левая часть уравнений совпадают.

Учитывая (22) и (24), представим уравнения для нахождения количества «пересечений» ПСЧ в виде:

$$\begin{aligned} &q_i^{-2} + \Delta_1^+\left(q_i^-, q_j^-\right) + 6q_i^- \cdot q_j^- \cdot k + \Delta_2^+\left(q_i^-, q_j^-\right) = n \\ &q_i^{-2} + \Delta_1^+\left(q_i^-, q_j^+\right) + 6q_i^- \cdot q_j^+ \cdot k + \Delta_2^+\left(q_i^-, q_j^+\right) = n \\ &q_i^{+2} + \Delta_1^+\left(q_i^+, q_j^+\right) + 6q_i^+ \cdot q_j^+ \cdot k + \Delta_2^+\left(q_i^+, q_j^+\right) = n \\ &q_i^{+2} + \Delta_1^+\left(q_i^+, q_j^-\right) + 6q_i^+ \cdot q_j^- \cdot k + \Delta_2^+\left(q_i^+, q_j^-\right) = n, \end{aligned} \tag{25}$$

где $i, j = 1, 2, 3, \ldots$; $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

И, соответственно, для МСЧ с учетом «пересечений» запишем:

$$\begin{aligned} &q_i^- \cdot q_i^+ + \Delta_1^-\left(q_i^-, q_j^+\right) + 6q_i^- \cdot q_j^+ \cdot k + \Delta_2^-\left(q_i^-, q_j^+\right) = n \\ &q_i^+ \cdot q_i^- + \Delta_1^-\left(q_i^+, q_j^-\right) + 6q_i^+ \cdot q_j^- \cdot k + \Delta_2^-\left(q_i^+, q_j^-\right) = n \\ &q_i^- \cdot q_i^+ + \Delta_1^-\left(q_i^+, q_j^+\right) + 6q_i^+ \cdot q_j^+ \cdot k + \Delta_2^-\left(q_i^+, q_j^+\right) = n \\ &q_i^+ \cdot q_i^- + \Delta_1^-\left(q_i^-, q_j^+\right) + 6q_i^- \cdot q_j^+ \cdot k + \Delta_2^-\left(q_i^-, q_j^+\right) = n, \end{aligned} \tag{26}$$

где $i, j = 1, 2, 3, \ldots$; $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Отметим, что в уравнениях (25) и (26) сумма первых двух членов равна составному числу – первому «пересечению» арифметических прогрессий, формирующих МСЧ и ПСЧ с помощью (22) и (23). Второй член $\Delta_1^-\left(q_i, q_j\right)$ и $\Delta_1^+\left(q_i, q_j\right)$ равен длине отрезка в арифметической прогрессии, через который образуется первое «пересечение» последовательностей, формируемых числами q_i и q_j $\left(i \neq j\right)$ вида $\{6m \pm 1\}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Определим Δ_1 для МСЧ и ПСЧ как:

$$\begin{aligned} &\Delta_1^-\left(q_i^-, q_j^+\right) = 6q_i^- \cdot q_j^+ \cdot \varepsilon^-_{q_i^-, q_j^+} \\ &\Delta_1^-\left(q_i^+, q_j^-\right) = 6q_i^+ \cdot q_j^- \cdot \varepsilon^-_{q_i^+, q_j^-} \\ &\Delta_1^-\left(q_i^-, q_j^-\right) = 6q_i^- \cdot q_j^- \cdot \varepsilon^-_{q_i^-, q_j^-} \\ &\Delta_1^-\left(q_i^+, q_j^+\right) = 6q_i^+ \cdot q_j^+ \cdot \varepsilon^-_{q_i^+, q_j^+} \\ &\Delta_1^+\left(q_i^-, q_j^+\right) = 6q_i^- \cdot q_j^+ \cdot \varepsilon^+_{q_i^-, q_j^+} \\ &\Delta_1^+\left(q_i^+, q_j^-\right) = 6q_i^+ \cdot q_j^- \cdot \varepsilon^+_{q_i^+, q_j^-} \\ &\Delta_1^+\left(q_i^-, q_j^-\right) = 6q_i^- \cdot q_j^- \cdot \varepsilon^+_{q_i^-, q_j^-} \\ &\Delta_1^+\left(q_i^+, q_j^+\right) = 6q_i^+ \cdot q_j^+ \cdot \varepsilon^+_{q_i^+, q_j^+}, \end{aligned} \tag{27}$$

где $0 < \varepsilon^{\pm}_{q_i, q_j} < 1$.

Третий член уравнений (25) и (26) отражает последующие «пересечения» арифметических прогрессий.

Четвертый член равен разности между n и последним «пересечением» арифметических прогрессий, образуемых парой $\left(q_i,\, q_j\right)$, $\left(i \neq j\right)$. Он равен $\Delta_2^{\pm}\left(q_i^{\pm}, q_j^{\mp}\right) = 6q_i^{\pm} \cdot q_j^{\pm} \cdot \delta^{\pm}_{q_i^{\pm}, q_j^{\pm}}$, при этом $0 < \delta^{\pm}_{q_i^{\pm}, q_j^{\pm}} < 1$.

Учитывая введенные определения, запишем первое уравнение из (26) в виде:

$$\begin{aligned} &q_i^{-2} + 6q_i^- \cdot q_j^- \cdot \varepsilon^+_{q_i^-, q_j^-} + 6q_i^- \cdot q_j^- \cdot k + \\ &+ 6q_i^- \cdot q_j^- \cdot \delta^+_{q_i^-, q_j^-} = n. \end{aligned} \tag{28}$$

Из (29) имеем:

$$K^+\left(q_i^-, q_j^-\right) = \\ = \frac{n - q_i^{-2} - 6q_i^- \cdot q_j^- \cdot \varepsilon^+_{q_i^-, q_j^-} - 6q_i^- \cdot q_j^- \cdot \delta^+_{q_i^-, q_j^-}}{6q_i^- \cdot q_j^-} + 1, \tag{29}$$

где $K^+\left(q_i^-, q_j^-\right)$ – количество «пересечений» избранной пары арифметических прогрессий на отрезке $(0, n)$.

Упрощая выражение (29), получаем:

$$K^+\left(q_i^-, q_j^-\right) = \frac{n}{6q_i^- \cdot q_j^-} - \frac{q_i^-}{6q_j^-} - \varepsilon^+_{q_i^-, q_j^-} - \delta^+_{q_i^-, q_j^-} + 1. \tag{30}$$

Проделывая те же операции (28) – (30) для других уравнений (25) и суммируя по всем возможным сочетаниям q_i, q_j $\left(i \neq j\right)$, получим общее количество «пересечений» для ПСЧ:

$$\begin{aligned} K^+ = &\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{M} \left(\frac{n}{6q_i^- \cdot q_j^-} + \frac{n}{6q_i^+ \cdot q_j^+} + \frac{n}{6q_i^+ \cdot q_j^-} + \frac{n}{6q_i^- \cdot q_j^+} \right) - \\ &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{M} \left(\frac{q_i^-}{6q_j^-} + \frac{q_i^+}{6q_j^+} + \frac{q_i^+}{6q_j^-} + \frac{q_i^-}{6q_j^+} \right) - \\ &- 4\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{M} \varepsilon^{\pm}_{q_i^{\pm}, q_j^{\pm}} - 4\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{M} \delta^{\pm}_{q_i^{\pm}, q_j^{\pm}} + 4\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{M} 1. \end{aligned} \tag{31}$$

Выражение в первых скобках приводится к виду:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{M}\left(\frac{n}{6q_i^-\cdot q_j^-}+\frac{n}{6q_i^+\cdot q_j^+}+\frac{n}{6q_i^+\cdot q_j^-}+\frac{n}{6q_i^-\cdot q_j^+}\right)=$$

$$=\frac{n}{6}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{M}\left(\frac{1}{q_j^-}+\frac{1}{q_j^+}\right)\cdot\left(\frac{1}{q_i^-}+\frac{1}{q_i^+}\right)= \quad (32)$$

$$=\frac{n}{6}\sum_{i=1}^{2M}\frac{1}{s_i}\cdot\sum_{j=1}^{2M}\frac{1}{s_j}-\frac{n}{6}\sum_{i=1}^{2M}\frac{1}{s_i^2},$$

где $\{s_i\}=\{q_i^-\}\bigcup\{q_j^+\}$, объединенное множество, включающее $2M$ элементов.

Второй член уравнения (32) отражает «самопересечения» арифметических прогрессий.

Во второй скобке (31) выражение приводится к виду:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{M}\left(\frac{q_i^-}{6q_j^-}+\frac{q_i^+}{6q_j^+}+\frac{q_i^+}{6q_j^-}+\frac{q_i^-}{6q_j^+}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{M}\left[q_i^-\left(\frac{1}{q_j^-}+\frac{1}{q_j^+}\right)+q_i^+\left(\frac{1}{q_j^+}+\frac{1}{q_j^-}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{M}\left(\frac{1}{q_j^+}+\frac{1}{q_j^-}\right)\left(q_i^-+q_i^+\right).$$

Чтобы упростить это выражение, подставим значения для $q_i^-=6i-1$ и $q_i^+=6i+1$, получив:

$$\frac{1}{6}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{M}\left(\frac{1}{q_j^+}+\frac{1}{q_j^-}\right)\left(q_i^-+q_i^+\right)=$$

$$=M\left(M+1\right)\sum_{i=1}^{2M}\frac{1}{s_i}-\frac{2}{3}M, \quad (33)$$

где второй член также отражает учет неравенства $i\neq j$.

Наконец, вычисляя остаток выражения (31), получаем нулевое значение.

Обозначив выражение $\sum_{i=1}^{2M}\frac{1}{s_i}=z$, получим соотношение для количества «пересечений» ПСЧ на интервале (0, n):

$$K^+=\frac{n}{6}z^2-\frac{n}{6}\rho-M\left(M+1\right)z+\frac{2}{3}M, \quad (34)$$

где $\rho=\sum_{i=1}^{2M}\frac{1}{s_i^2}$. (35)

Нетрудно показать, что количество «пересечений» МСЧ описывается той же формулой (34). С учетом того, что во внимание нужно принять половину «пересечений», общее количество составных чисел на интервале (0, n), с учетом «пересечений», описывается соотношением:

$$c_2\left(n\right)=\frac{n}{3}z-\frac{n}{18}-\frac{n}{6}z^2+$$
$$+\frac{n}{6}\rho+M\left(M+1\right)z-\frac{2}{3}M. \quad (36)$$

Подставляя в (36) значение $M\cong\sqrt{n}/6$, получаем:

$$c_2\left(n\right)=\frac{n}{3}z-\frac{n}{6}z^2+\frac{n}{6}\rho-\frac{n}{18}+$$
$$+\frac{n}{36}z+\frac{\sqrt{n}}{6}z-\frac{2}{3}\frac{\sqrt{n}}{6}. \quad (37)$$

Таким образом, количество простых вида $\{6k\pm1\}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \dots$ на интервале (0, n) равно:

$$\pi\left(n\right)=\frac{n}{3}-c_2\left(n\right) \quad (38)$$

или

$$\pi\left(n\right)=\frac{n}{3}-\frac{n}{3}z+\frac{n}{6}z^2-\frac{n}{6}\rho+$$
$$+\frac{n}{18}-\frac{n}{36}z-\frac{\sqrt{n}}{6}z+\frac{\sqrt{n}}{9}. \quad (39)$$

Группируя слагаемые в (39), получаем:

$$\pi\left(n\right)=\frac{n}{6}\left[\left(1-z\right)^2+\left(1-\rho\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2}{3}-z\right)\right]. \quad (40)$$

При $n>>1$

$$\pi\left(n\right)\approx\frac{n}{6}\left[\left(1-z\right)^2+\left(1-\rho\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{2}\right)\right]. \quad (41)$$

Легко показать, что выражение в квадратных скобках (41) всегда больше нуля. Это означает, что $\pi\left(n\right)$ всегда больше нуля, и $\pi\left(n\right)\to\infty$ при $n\to\infty$.

На самом деле, выражение в квадратных скобках имеет вид:

$$F=\left(z^2-\frac{13}{6}z+\frac{4}{3}\right)+\left(1-\rho\right). \quad (42)$$

Корни выражения в первых круглых скобках равны:

$$z_{1,2}=\frac{13}{12}\pm\sqrt{\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{4}{3}}=\frac{1}{12}\left(13\pm\sqrt{23}j\right), \quad (43)$$

где j – мнимая единица.

То есть корни (43) мнимые, и $z^2-\frac{13}{6}z+\frac{4}{3}$ всегда больше нуля.

Очевидно, что

$$1-\rho=1-\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\left(6i-1\right)^2}+\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\left(6i+1\right)^2}\right)\cong$$
$$\cong1-\frac{2}{36}\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{i^2}. \quad (44)$$

Известно, что $\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{i^2}\to\frac{\pi^2}{6}$ при $M\to\infty$.

То есть при $M\to\infty$

$$1-\rho\to1-\frac{\pi^2}{108}=0{,}908\dots\,. \quad (45)$$

Так же как и в (21), чтобы устранить «эффект дублирования», выражение (41) представим в виде:

$$\pi\left(n\right)=\frac{n}{6}\left[\left(1-z'\right)^2+\left(1-\rho'\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{z'}{2}\right)\right], \quad (46)$$

где $z' = \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{p_i}$; $\rho' = \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{p_i^2}$; p_i – простые числа, участвующие в формировании составных чисел вида $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ на интервале (0, n).

Выражение для ρ' представимо в виде:

$$\rho' = \zeta_p(2) - \frac{1}{4} - \frac{1}{9}, \quad (47)$$

где $\zeta_p(2)$ – дзета-функция Римана на множестве простых чисел.

Известно [13], что

$$\zeta_p(2) \to 0{,}453\ldots \text{ при } L \to \infty. \quad (48)$$

Соответственно, при $L \to \infty$:

$$\rho' \to 0{,}092,$$
$$1 - \rho' \to 0{,}908. \quad (49)$$

Используя определение дзета-функций Римана на множестве простых чисел, представим (46) в виде:

$$\pi(n) = \frac{n}{6}\left[\left(1 - \zeta_p(1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \zeta_p(2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\zeta_p(1)}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)\right] \quad (50)$$

или

$$\pi(n) = \frac{n}{6}\left[\left(1{,}833\ldots - \zeta_p(1)\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(1{,}361\ldots - \zeta_p(2)\right) + \frac{2}{3}\left(2{,}833\ldots - \zeta_p(1)\right)\right]. \quad (51)$$

Доказательство интервальных гипотез

Доказательство гипотезы Лежандра

Гипотеза Лежандра (третья проблема Ландау) утверждает, что между n^2 и $(n+1)^2$ всегда найдется простое число. Докажем ее, опираясь на соотношение (39):

$$\pi(n) = \frac{n}{3}\left[1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{\rho}{2}\right] +$$
$$+ 2M^2 - M(M+1) \cdot z + \frac{2}{3}M. \quad (52)$$

Введем обозначения:

$$G(z) = 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{\rho}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(1-z)^2 + (1-\rho)\right]. \quad (53)$$

Очевидно, что

$$\pi\left[(n+1)^2\right] = \frac{(n+1)^2}{3} \cdot G(z) + \frac{2(n+1)^2}{36} -$$
$$- \frac{(n+1)^2}{36} z - \frac{n+1}{6} z + \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{6} \quad (54)$$

$$\pi\left[(n)^2\right] = \frac{n^2}{3} \cdot G(z) + \frac{2n^2}{36} - \frac{n^2}{36} z - \frac{n}{6} z + \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{6}. \quad (55)$$

Нетрудно показать, что $G(z)$ и z образуются одними и теми же простыми числами, максимальное из которых не превышает $n + 1$. Вычитая (55) из (54), получаем количество простых чисел между n и $(n+1)^2$:

$$\Delta\pi_L = \pi\left[(n+1)^2\right] - \pi\left[(n)^2\right] =$$
$$= \frac{2n+1}{3} G(z) + \frac{2n+1}{18} - \frac{2n+1}{36} z - \frac{z}{6} + \frac{1}{9} = \quad (56)$$
$$= \frac{2n+1}{3} G(z) + \frac{n}{9} + \frac{1}{6} - \frac{7}{36} z - \frac{nz}{18}$$

или

$$\Delta\pi_L \approx \frac{n}{3}\left[(1-z)^2 + (1-\rho) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z}{2}\right)\right]. \quad (57)$$

Выражение в квадратных скобках аналогично такому же выражению в (41), применительно к которому мы показали, что оно всегда больше 0. Таким образом, третья проблема Ландау решена, и гипотеза Лежандра доказана.

На рисунке 1 приведена модельная (сплошная линия) и эмпирическая зависимость (кружки) количества простых чисел в интервале (n^2, $(n + 1)^2$) от количества простых чисел в интервале (0, n), формирующих МСЧ и ПСЧ в интервале (0, $(n + 1)^2$). Очевидно хорошее согласование данных с коэффициентом корреляции, равным 0,996.

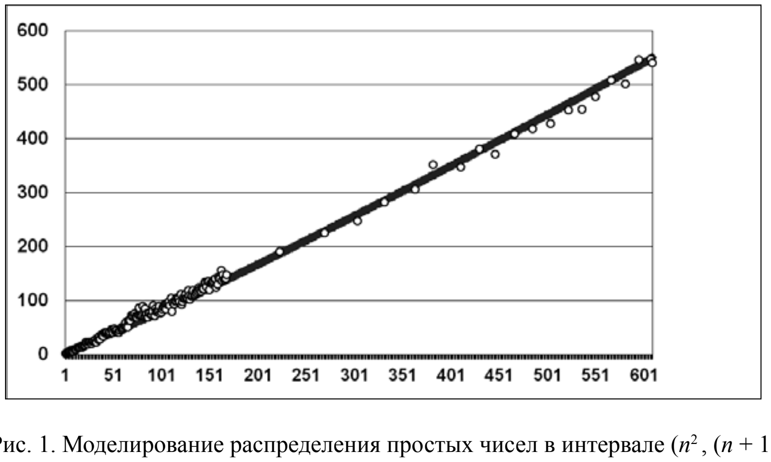

Рис. 1. Моделирование распределения простых чисел в интервале (n^2, $(n + 1)^2$)

Доказательство гипотезы Бертрана

В 1845 году французским математиком Ж. Бертраном была выдвинута гипотеза, названная впоследствии постулатом, о том, что для любого натурального $n > 1$ найдется простое число в интервале $(n, 2n)$. В 1845 году эта гипотеза доказана русским математиком П.Л. Чебышёвым в его знаменитой теореме. Индийский математик С. Раманаджан в 1920 году нашёл более простое доказательство гипотезы Бертрана, а венгр П. Эрдёш в 1932 году – ещё более простое.

Используя доказательство теоремы Ландау, можно весьма просто обосновать справедливость постулата Бертрана.

Пусть

$$m = \sqrt{n} \text{ и } m+1 = \sqrt{n}+1. \tag{58}$$

Тогда

$$(m+1)^2 - m^2 = n + 2\sqrt{n} + 1 - n = 2\sqrt{n} + 1. \tag{59}$$

Покажем, при каких n справедливо соотношение:

$$2\sqrt{n} + 1 < n, \tag{60}$$

означающее, что интервал, используемый в постулате, шире и включает интервал между квадратами последовательных чисел натурального ряда в решенной в настоящей работе проблеме Ландау, всегда содержащий простое число.

Из (60) следует

$$0 < n^2 - 6n + 1 = \left(n - 3 + 2\sqrt{2}\right)\left(n - 3 - 2\sqrt{2}\right). \tag{61}$$

Анализ (61) показывает, что постулат Бертрана всегда справедлив при $n > 5$. Дополнительный анализ при $1 < n \le 5$ свидетельствует о том, что названный постулат выполняется для всех $n > 1$.

Доказательство гипотезы Брокарда

Из доказательства гипотезы Лежандра легко выводится утверждение, названное гипотезой Брокарда: между квадратами подряд идущих простых чисел, за исключением первых двух, всегда найдется хотя бы четыре простых числа.

Обозначим $\pi\left(p_{n+1}^2\right)$ число простых чисел на интервале $\left(0, p_{n+1}^2\right)$ и $\pi\left(p_n^2\right)$ – число простых чисел на интервале $\left(0, p_n^2\right)$, где p_n и p_{n+1} – подряд идущие простые числа. Тогда гипотеза Брокарда формулируется как:

$$\Delta\pi_B = \pi\left(p_{n+1}^2\right) - \pi\left(p_n^2\right) \ge 4. \tag{62}$$

Пусть $p_n^2 = n^2$.

Докажем справедливость соотношения (62) для простых чисел-«близнецов», когда расстояние между подряд идущими простыми числами $p_{n+1} - p_n = 2$ – минимально. В случае, когда соседние простые числа не «близнецы», доказательство очевидно.

Итак, вводя определение Δ_B:

$$\Delta_B = \left(p_n + 2\right)^2 - p_n^2 = 4p_n + 4 = 4\left(n+1\right), \tag{63}$$

имеем

$$\Delta_B = 4n + 4 = 2(\Delta + 1), \tag{64}$$

т.е. $\Delta = 2n + 1$ включен в интервал Δ_B.

Из (64) следует, что всегда $\Delta\pi_B > 0$, ибо на большем, чем Δ интервале, как было показано при доказательстве гипотезы Лежандра, всегда есть простое число.

Учитывая, что при $p_n^2 = n^2$ на интервале $\left(p_n^2, p_{n+1}^2\right)$ МСЧ и ПСЧ образуются такими же простыми числами, как и на интервале $\left(n^2, (n+1)^2\right)$, справедливо следующее соотношение:

$$\Delta_B = \frac{4\left(n+1\right)}{6}\left\{\left(1-z\right)^2 + \left(1-\rho\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z}{2}\right)\right\}. \tag{65}$$

Покажем, что даже при минимуме выражения в фигурных скобках гипотеза Брокарда подтверждается.

На самом деле минимум $\left(1-z\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z}{2}\right) = 0{,}188$, а минимум $\left(1-\rho\right) = 0{,}908$ достигается при максимуме $\rho = 0{,}0919$.

Тогда необходимо найти n, при котором выполняется неравенство:

$$\frac{4\left(n+1\right)}{6}\left(0{,}908 + 0{,}188\right) \ge 4. \tag{66}$$

Очевидно, что при $n \ge 5$, неравенство (66) выполняется всегда.

Решение проблемы «простых близнецов»

Используя соотношение (39), покажем, что число «простых близнецов», т.е. простых чисел, разность между которыми равна 2, бесконечно. Для этого в выражении (39) вычтем количество простых чисел, равное количеству составных чисел вида $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, находившихся на интервале $(0, n)$. Тем самым мы учтем все простые числа, стоящие «против» составных чисел и, таким образом, не являющиеся «близнецами» простых.

Здесь необходимо отметить, что «против» составных чисел могут также оказаться и другие составные. Таким образом, вычитая удвоенное количество составных, мы как бы искусственно занижаем количество простых чисел-«близнецов» на интервале $(0, n)$ путем учета уже учтенного.

Итак, оценка количества простых чисел-«близнецов» на интервале $(0, n)$ записывается в виде:

$$\pi_B\left(n, z\right) \ge \frac{n}{3}\left[1 - 2z + z^2 - \rho + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}z\right] \tag{67}$$

или

$$\pi_B(n,z) \geq \frac{n}{3}\left[z^2 - \frac{13}{6}z + \frac{1}{3} + (1-\rho)\right]. \quad (68)$$

Нетрудно показать, что квадратное уравнение в скобках (68) имеет только мнимые корни. Это означает, что $\pi_B(n,z) \geq 0$ всегда.

В результате, мы пришли к выводу о том, что число простых чисел-«близнецов» на интервале (0, n) стремится к бесконечности при $n \to \infty$, тем самым решив вторую проблему Ландау.

В заключение отметим, что представление механизма формирования составных чисел в виде аддитивных арифметических прогрессий дало возможность предложить конструктивный метод оценок количества простых чисел, содержащихся на различных интервалах. В результате было предложено новое соотношение для оценки количества простых чисел, содержащихся на интервале (0, n). В свою очередь, это дало возможность решить две открытые проблемы математики – доказать гипотезу Лежандра и гипотезу простых чисел «близнецов», а также доказать гипотезу Брокарда и по новому подойти к подтверждению постулата Бертрана.

Литература

1. Минаев, В.А., Хренов, В.П. Фундаментальная закономерность формирования простых чисел и информационная безопасность // Безопасность информационных технологий. – 2008. – № 3. – С. 20–32.

2. Минаев, В.А., Хренов, В.П. Безопасность в сфере конфиденциальной информации и закон формирования простых чисел // Спецтехника и связь. – 2008. – № 3. – ноябрь – декабрь.

3. Минаев, В.А., Хренов, В.П. Открытие и прикладные аспекты использования закономерности формирования ряда простых чисел // Материалы XXVII научно-технической конференции «Системы безопасности». СБ-2008. – М. : Академия ГПС МЧС РФ, 2008.

4. Минаев, В.А., Хренов, В.П. Открытые закономерности образования простых чисел и некоторые прикладные аспекты открытия // Вестник Российского нового университета. Сборник научных трудов – Управление, вычислительная техника и информатика. Выпуск 3. – М. : РосНОУ, 2008. – С. 49–59.

5. Минаев, В.А., Хренов, В.П. Информационная безопасность и закон формирования простых чисел // Материалы Международной научно-образовательной конференции 23–27 марта 2009 года «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования». – М. : РУДН, 2009.

6. Каленикова, Н.А., Минаев, В.А, Хренов, В.П. Улучшение метода Ферма : новый алгоритм факторизации // Безопасность информационных технологий . – 2010. – № 2. – С. 76–79.

7. Minaev, V.A., Khrenov, V.P., Zernov, V.A. Discovery of Natural Number Laws and Some Applied Aspects of Discovery. Recent Advanced in Management and Information Security / 1st International Conference on Management of Technologies & Information Security, 21st – 24th January, 2010. – New Delhi, Shree Publishers & Distributors, 2010.

8. Минаев, В.А., Каленикова, Н.А., Хренов, В.П. Ускорение факторизации в методе Ферма // Вестник Российского нового университета. Сборник научных трудов – Управление, вычислительная техника и информатика. Вып. 3. – М. : РосНОУ, 2010. – С. 12–17.

9. Зернов, В.А., Минаев, В.А., Хренов, В.А. Учебники и теорию чисел пора корректировать? / В сб. : Качество дистанционного образования : концепции, проблемы, решения / Межвузовский сборник научных трудов. – М. : МГИУ, 2010.

10. Minaev, V.A., Kalenikova, N.A., Khrenov, V.P. Acceleration of Fermat’s method // Materials of International Conference “Education, Science, and Economics at Universities. Integration to International Educational Area”, September 20–25, 2010. – Plock, Poland. – P. 673–680.

11. Minaev, V.A. Interval estimations of the prime numbers amount / The 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation, 22–27 August 2011. – Moscow, Peoples Friendship University of Russia.

12. Минаев, В.А. Интервальная оценка количества простых чисел // Материалы докладов Международной конференции «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство». 26–30 сентября, 2011, Ереван.

13. Merrifield, C.W. The sums of the series of reciprocals of the prime numbers of their powers. – Proc. Roy. Soc. – London. – 1881. – Vol. 33. – P. 4–10.