

А.С. Крюковский<sup>1</sup>  
 Д.В. Растягаев<sup>2</sup>  
 Ю.И. Скворцова<sup>3</sup>

A.S. Kryukovsky  
 D.V. Rastyagaev  
 J.I. Skvortsova

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
 ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ  
 ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ  
 СИГНАЛОВ В НЕОДНОРОДНОЙ  
 АНИЗОТРОПНОЙ ИОНОСФЕРЕ<sup>4</sup>**

**RESEARCH OF PROPAGATION  
 OF FREQUENCY MODULATED  
 SPACE-TIME SIGNALS  
 IN AN INHOMOGENEOUS  
 ANISOTROPIC IONOSPHERE**

*На основе численного решения пространственно-временной бихарактеристической системы рассмотрено распространение частотно-модулированных сигналов в анизотропной ионосферной плазме. Выполнено численное моделирование распространения обыкновенной и необыкновенной волн в однослойной и двухслойной моделях.*

**Ключевые слова:** частотная модуляция, анизотропия, ионосфера, бихарактеристики, обыкновенная и необыкновенная волны, волновые катастрофы, пространственно-временные сигналы.

*On the basis of the numerical solution of the space-time bicharacteristic system the propagation of frequency-modulated signals in anisotropic ionospheric plasma is considered. The numerical modeling of propagation of ordinary and non-ordinary waves in one-layer and two-layer models is executed.*

**Keywords:** frequency modulation, anisotropy, ionosphere, bicharacteristics, ordinary and extraordinary waves, wave disaster, space-time signals.

**1. Введение. Моделирование лучевых траекторий**

Настоящая работа посвящена изучению распространения частотно-модулированного излучения в магнитоактивной ионосферной плазме. Актуальность исследования определяется активным использованием электромагнитных волн декаметрового диапазона для обеспечения дальней радиосвязи, радионавигации, радиолокации, загоризонтного радиозондирования, а также изучения структуры верхней атмосферы Земли – ионосферы. В основе работы лежат лучевые методы, являющиеся традиционными при исследовании процессов распространения коротких волн в различных средах.

Известно, что при моделировании лучевых траекторий гамильтонову бихарактеристическую систему уравнений с гамильтонианом

$$\Gamma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \quad (1)$$

в неоднородной, анизотропной и нестационарной среде можно представить в виде [1]:

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}},$$

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad (2)$$

где  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  – волновой вектор,  $\tau$  – параметр вдоль лучевой траектории,  $t$  – групповое время,  $\vec{r} = (x, y, z)$  – координаты точки наблюдения,  $\omega$  – круговая частота излучения,  $\varepsilon(\vec{r}, \vec{k}, \omega)$  – эффективная диэлектрическая проницаемость среды распространения,  $c = 2,997925 \cdot 10^{10}$  см/с – скорость света. Система (2) обобщает бихарактеристическую систему, использованную нами в [2] для математического моделирования.

<sup>1</sup> Доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета ИСиКТ НОУ ВПО «Российский новый университет».

<sup>2</sup> Кандидат физико-математических наук, доцент, начальник управления информатизации НОУ ВПО «Российский новый университет».

<sup>3</sup> Заместитель декана факультета ИСиКТ НОУ ВПО «Российский новый университет».

<sup>4</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 12-02-00413-а, № 13-07-00937, ОФИ\_М № 13-02-12121).

Буквами  $v$  и  $u$  обозначим, соответственно, отношения квадратов плазменной частоты и гиро-частоты к квадрату рабочей частоты:

$$v = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}, \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2}, \quad (3)$$

где  $e = 4,8029 \cdot 10^{-10}$  СГСЭ – заряд электрона,  $m_e = 9,108 \cdot 10^{-28}$  г – масса электрона,  $H_0$  – величина напряженности магнитного поля Земли,  $N$  – профиль электронной концентрации, угол  $\alpha$  – угол между вектором напряженности магнитного поля Земли  $\vec{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z})$  и волновым вектором.

Очевидно, что выражение для квадрата косинуса угла  $\alpha$  имеет вид:

$$\cos^2 \alpha = \frac{H_{0x} k_x + H_{0y} k_y + H_{0z} k_z}{H_0^2 |\vec{k}|^2}. \quad (4)$$

В качестве модели эффективной диэлектрической проницаемости среды рассмотрим модель неоднородной анизотропной ионосферы [3]:

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{2v(1-v)}{2(1-v) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-v)^2 \cos^2 \alpha}}, \quad (5)$$

где знак «+» соответствует обыкновенной волне, а знак «-» – необыкновенной волне. Предполагается, что источник излучения точечный и расположен в точке с координатами:

$$\vec{r}|_{r=0} = (x_0, y_0, z_0), \quad (6)$$

а начальный волновой вектор  $\vec{k}(0)$  параметрически зависит от углов выхода луча:

$$\begin{aligned} k_x(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \cos \eta, \\ k_y(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta \cos \eta, \\ k_z(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \eta, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varepsilon_0$  – значение эффективной диэлектрической проницаемости среды в источнике. В дальнейшем предполагается, что источник излучения находится вне магнитоактивной плазмы. Кроме того, предполагается, что сигнал линейно частотно-модулированный (ЛЧМ), то есть:

$$\omega(0) = \omega_0 (1 + \delta \tau_0), \quad t(0) = \tau_0. \quad (8)$$

В приведенных ниже расчетах амплитуда магнитного поля предполагается постоянной, а ориентация напряженности магнитного поля относительно локальной системы координат задается двумя углами  $\gamma$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} H_{0x} &= H_0 \cos \gamma \cos \varphi, \\ H_{0y} &= H_0 \cos \gamma \sin \varphi, \\ H_{0z} &= H_0 \sin \gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

## 2. Распространение обыкновенной волны

Рассмотрим распространение частотно-модулированного радиосигнала в неоднородной, анизотропной среде с учетом влияния магнитного поля Земли. Предположим, что изначально распространение осуществляется в плоскости  $(x, z)$ . Источник излучения расположен в начале координат ( $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ). Рассмотрим модель двухслойной ионосферной плазмы, для которой профиль электронной концентрации имеет вид [3–5]:

$$N(\vec{r}) = N_0 \left\{ \exp \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z - z_{01}}{z_{m1}/2} - \frac{\exp \left\{ - \left( \frac{z - z_{01}}{z_{m1}/2} \right) \right\}}{\cos \chi} \right) \right] + \beta \exp \left[ - \left( \frac{z - z_{02}}{z_{m2}} \right)^2 \right] \right\}, \quad (9)$$

где  $N_0$  – электронная концентрация в максимуме основного слоя F2,  $z_{01}$  – высота максимума слоя F2,  $z_{m1}$  – условная полутолщина слоя F2,  $\beta$  – безразмерный коэффициент, характеризующий степень ионизации нижнего слоя по отношению к основному,  $z_{02}$  – высота максимума нижнего слоя E,  $z_{m2}$  – условная полутолщина нижнего слоя E. Последний член описывает локальные неоднородности ионосферной плазмы.

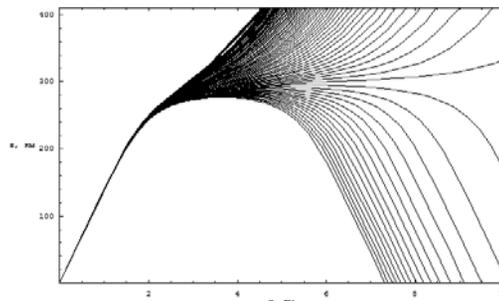


Рис. 1а.

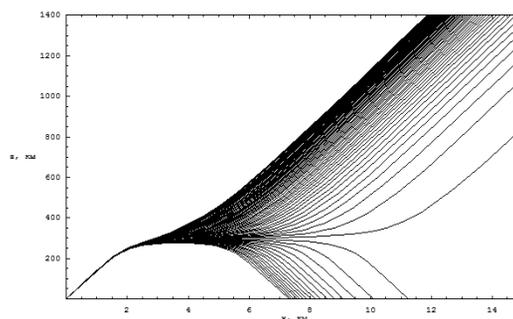


Рис. 1б.

Лучевая структура в плоскости  $(x, z)$ .  
Обыкновенная волна

На рис. 1а и 1б в разных масштабах показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в случае распространения обыкновенной волны в плоскости  $(x, z)$  при  $\beta = 0,1$ . При вычислении применя-

лись следующие значения перечисленных выше параметров:  $N_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$ ,  $H_0 = 0,36 \text{ Э}$ ,  $z_{m1} = 140 \text{ км}$ ,  $z_{01} = 300 \text{ км}$ ,  $z_{m2} = 40 \text{ км}$ ,  $z_{02} = 100 \text{ км}$ ,  $\zeta = 0$ ,  $\eta = 89,6^\circ$ ,  $f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 12,5 \text{ МГц}$ ,  $\delta = 1$ ,  $\gamma = 3\pi/4$ ,  $\varphi = \pi/2$ ,  $0 \leq \tau_0 \leq 90 \text{ мс}$ .

На этой частоте часть лучей просачивается сквозь ионосферную плазму, а остальные возвращаются на Землю. Сначала все частоты идут по одной траектории, но, попадая в плазменный слой, их пути разделяются: высокие частоты просачиваются, а низкие частоты возвращаются на Землю. Формально правее мертвой зоны всюду на Земле может быть принят сигнал, однако, за исключением небольшой области, близкой к границе, интенсивность его (в силу расходимости) ничтожна (см. рис. 16).

Следует отметить, что угол наклона траектории на начальном отрезке и угол наклона предельного луча после выхода из слоя совпадают, поскольку на этих участках волна распространяется со скоростью света. Процесс перехода в прямую линию при  $\tau_0 \rightarrow \infty$  довольно сложен.

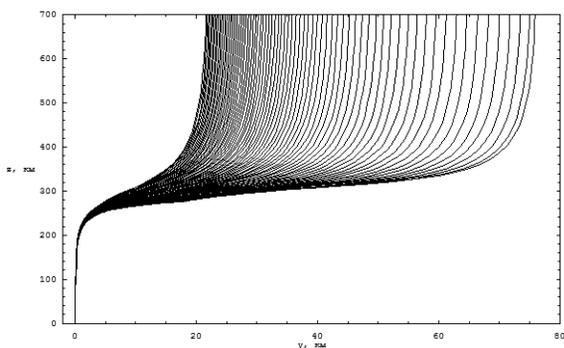


Рис. 2. Лучевая структура в плоскости  $(y, z)$

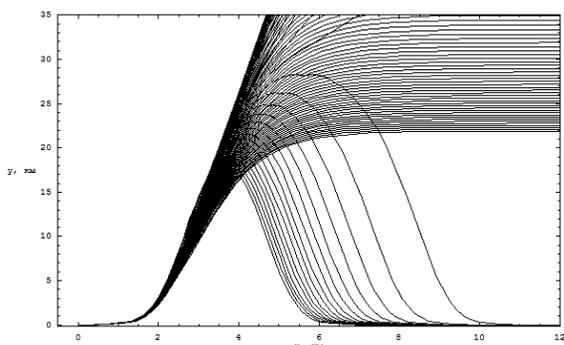


Рис. 3. Лучевая структура в плоскости  $(x, y)$

На рис. 2 приведены проекции лучевых траекторий в плоскости  $(y, z)$ . При отсутствии магнитного поля все проекции лучей соответствовали бы линии  $y = 0$ . Лучи, возвращающиеся на Землю после отражения от слоя, на этом ри-

сунке не видны, так как идут назад по первоначальным траекториям, поскольку горизонтальные градиенты в данных расчетах отсутствуют. Проходящие же лучи ионосфера «сдвигает» в положительном направлении оси  $y$ . При этом наибольшие сдвиги у меньших частот, соответствующих так называемым лучам Педерсена. В принципе, можно подобрать такую частоту, для которой сдвиг будет любой наперед заданной величиной. Другое дело, что в силу расходимости лучевого потока интенсивность поля, образованного такими лучами, будет ничтожна.

На рис. 3 показана проекция лучевой структуры на Землю, то есть распространение лучей в плоскости  $(x, y)$ . Здесь уже хорошо видны лучи, отраженные от ионосферы и вернувшиеся на Землю, а также семейство лучей, прошедших ионосферный слой и распространяющихся вдоль оси  $x$ .

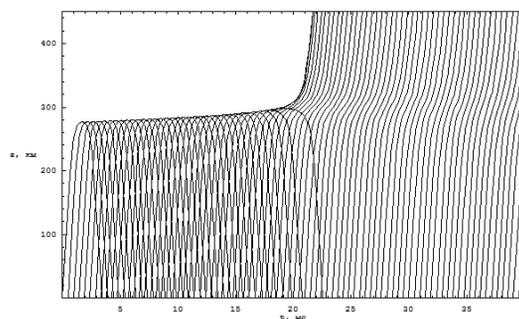


Рис. 4. Лучевая структура в плоскости  $(t, z)$

На рис. 4 представлено распространение обыкновенной волны в плоскости  $(t, z)$ . Видно, что семейство пространственно-временных лучей, отражающихся от ионосферы и имеющих огибающую, образует пространственно-временную каустику с краем (краевая катастрофа  $V_3$ ) (подробнее см. в [6–10], а также работу [11] и ссылки в ней). Необходимо отметить, что для наглядности при расчете было взято в два раза больше лучей, чем на всех других рисунках.

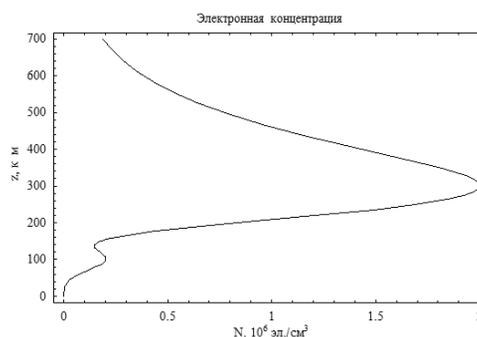


Рис. 5. Профиль электронной концентрации

На рис. 1–4 влияние второго слоя (слоя  $E$ , см. рис. 5) в силу достаточно высокой начальной частоты ничтожно. Однако если понизить начальную частоту, то лучевая структура существенно дополнится. На рис. 6, соответствующем плоскости  $(x, z)$ , видно, что с ростом частоты лучи сначала отражаются от слоя  $E$ , потом идет (по углам) переходная область. При этом лучи, отраженные от слоя  $E$ , засвечивают на Земле всю область справа, но с минимальной интенсивностью, а далее формируется структура, обсуждавшаяся выше.

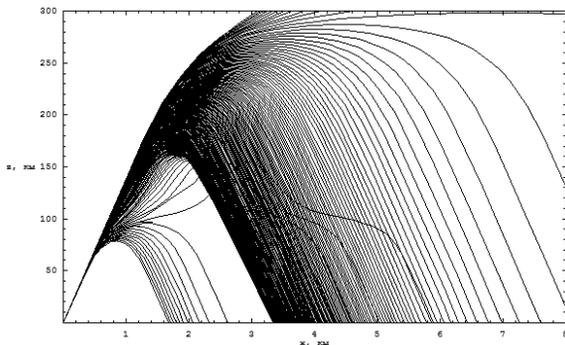


Рис. 6. Лучевая структура в плоскости  $(x, z)$

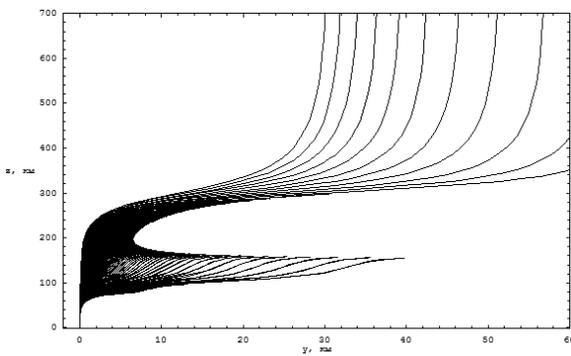


Рис. 7. Лучевая структура в плоскости  $(y, z)$

На рис. 7 показана лучевая структура в плоскости  $(y, z)$ . Следует обратить внимание на характерный «выброс вправо», описывающий выход из основной плоскости распространения лучей в результате взаимодействия со слоем  $E$ . При расчетах предполагалось, что  $\beta = 0,1$ ;  $f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 3,5$  МГц;  $0 \leq \tau_0 \leq 2790$  мс.

### 3. Распространение необыкновенной волны

При построении лучевой структуры необыкновенной волны использованы те же параметры, что и в первой части статьи (до уменьшения начальной частоты сигнала).

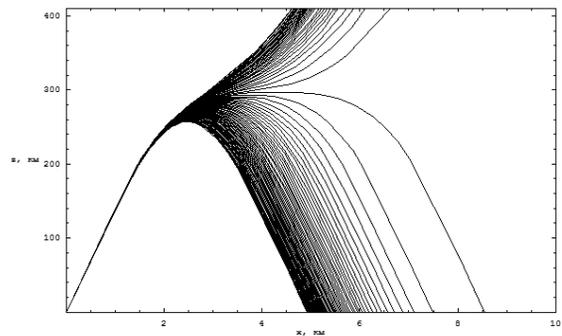


Рис. 8. Лучевая структура в плоскости  $(x, z)$   
Необыкновенная волна

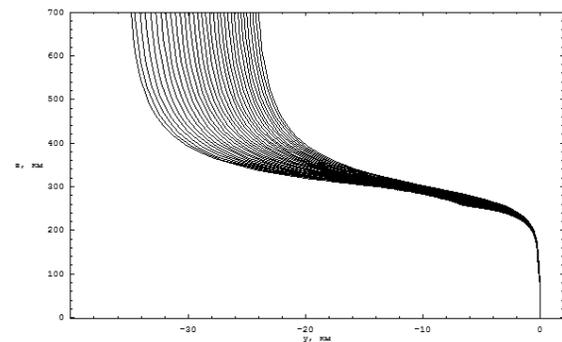


Рис. 9. Лучевая структура в плоскости  $(y, z)$   
Необыкновенная волна

Сопоставим полученные результаты. Сравним рис. 1а и 8, описывающие лучевое распространение в плоскости  $(x, z)$ , видим, что число лучей, прошедших ионосферный слой, существенно уменьшилось. Ширина мертвой зоны (куда не приходят ионосферные лучи) также уменьшилась с 7,3 км до 5 км. Более компактно выглядит боковое отклонение лучей (сравните рис. 2 и рис. 9). Причем если в случае обыкновенной волны прошедшие ионосферу лучи параллельно сдвигаются вправо по оси  $y$ , то в случае необыкновенной волны они сдвигаются влево.

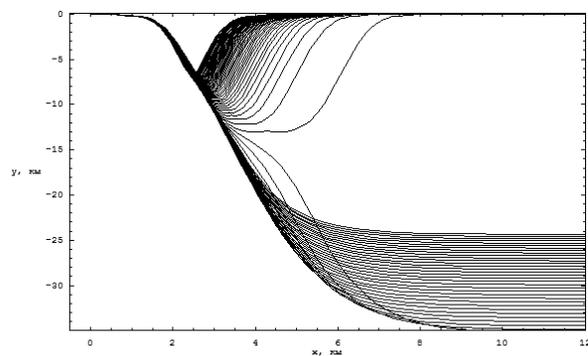


Рис. 10. Лучевая структура в плоскости  $(x, y)$   
Необыкновенная волна

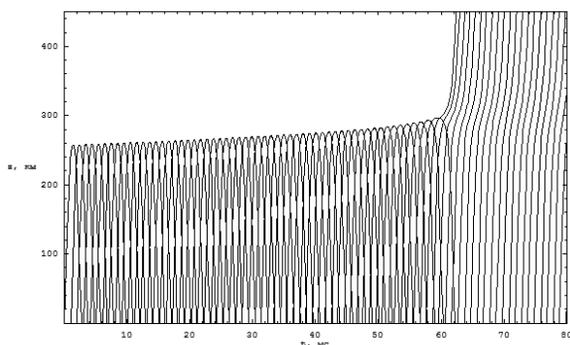


Рис. 11. Лучевая структура в плоскости  $(t, z)$   
Необыкновенная волна

Сопоставляя рис. 3 и рис. 10, видим, что лучевая структура, опять-таки став более компактной, как бы зеркально отразилась относительно горизонтальной оси.

На рис. 11 представлено распространение необыкновенной волны в плоскости  $(t, z)$ . При сравнении с рис. 4 видим, что число пространственно-временных лучей, отражающихся от ионосферы и касающихся огибающей (каустики), существенно возросло.

## 6. Заключение

Таким образом, в работе рассмотрены особенности распространения частотно-модулированных сигналов в анизотропной ионосферной плазме как в случае обыкновенной, так и в случае необыкновенной электромагнитной волны. Основным инструментом исследования являлась бихарактеристическая система дифференциальных уравнений, неизвестным в которой являются не только координаты и компоненты волнового вектора, но также частота и время. Исследовано распространение декаметровых радиоволн в случае двухслойной модели ионосферы Земли. Проанализированы особенности выхода как обыкновенной, так и необыкновенной волны из плоскости распространения, а также образование каустики пространственно-временных геометрооптических лучей. Дальнейшие исследования особенностей распространения частотно-модулированных радиоволн в анизотропных средах требуют расчета электромагнитных полей при наличии сложной каустической структуры, что обеспечивает метод канонического оператора Маслова (см. [1; 12; 13]) и волновая теория катастроф [8–11]. Кроме того, для адекватного описания распространения радиоволн в ионосфере Земли целесообразно строить динамические модели [14], используя профили электронной концентрации, восстановленные по данным радиотомографии [15–16].

## Литература

1. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. – М. : МФТИ, 1982. – 159 с.
2. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – М. : Наука, 2012. – Т. 57. – № 9. – С. 1028–1034.
3. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Исследование особенностей распространения коротких радиоволн в неоднородной анизотропной ионосфере // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2009. – Т. 14. – № 8. – С. 17–26.
4. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Исследование влияния локальных неоднородностей ионосферной плазмы на распространение коротких радиоволн // Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика». – М. : РосНОУ, 2010. – Вып. 3. – С. 17–25.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – М. : Наука, 2012. – Т. 57. – № 9. – С. 1028–1034.
6. Вергизаев И.А. Применение теории катастроф для исследования пространственно-временных фокусировок : дис. ... к-та ф.-м. наук. – М. : МФТИ, 1999.
7. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2013. – Т. 18. – № 8. – С. 18–23.
8. Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Palkin E.A. Uniform asymptotics for evaluating oscillatory edge integrals by methods of catastrophe theory // Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 1987. – V. 2. – № 4. – P. 219–312.
9. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования основных волновых катастроф с корангом, равным двум // Распространение и дифракция электромагнитных волн. – М. : МФТИ, 1993. – С. 4–19.
10. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Теория расчета эталонных фокальных и дифракционных электромагнитных полей на основе специальных

функций волновых катастроф // Радиотехника и электроника. – 2003. – Т. 48. – № 8. – С. 912–921.

11. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф : монография. – М. : РосНОУ, 2013. – 368 с.

12. Ipatov E.B., Lukin D.S., Palkin E.A. Maslov canonical operator in problems of diffraction and propagation of waves in inhomogeneous media // Sov. J. Numer. Anal. & Math. Modelling. – 1990. – V. 5. – № 6. – P. 465–488.

13. Ипатов Е.Б., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численная реализация метода канонического оператора Маслова в задачах распространения коротких радиоволн в ионосфере Земли // Изв. вузов. Радиофизика. – 1990. – Т. 33. – № 5. – С. 562–573.

14. Крюковский А.С., Кирьянова К.С. Динамическое моделирование распространения радиоволн в окрестности экваториальной аномалии на основе метода бихарактеристик // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2011. – Т. 16. – № 8. – С. 21–25.

15. Куницын В.Е., Терещенко Е.Д., Андреева Е.С. Радиотомография ионосферы. – М. : Физматлит, 2007. – 345 с.

16. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Моделирование лучевой и каустической структуры электромагнитных полей по данным радиотомографии ионосферы в окрестности экваториальной аномалии // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2010. – Т. 15. – № 8. – С. 5–11.