

И.С. Клименко¹
 М.А. Плуталов²
 Г.А. Чеботарев³

I.S. Klimenko
 M.A. Plutalov
 G.A. Chebotarev

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ
 ВЫБОРА СТРАТЕГИЙ
 В «ИГРЕ С ПРИРОДОЙ»**

**COMPARATIVE ANALYSIS OF CRITERIA
 FOR SELECTION STRATEGIES
 IN THE “GAME WITH NATURE”**

Проведено сравнительное оценивание соотношения «оптимизм – пессимизм» основных критериев выбора стратегий в условиях статистической неопределенности. Показано, что в случае генерации матриц эффективности из псевдослучайных чисел критерий Гурвица проявляет слабую чувствительность к изменению градаций оптимизма. На основе определения степени взаимной корреляции пяти критериев (по результатам выбора стратегий) предложена структура ранговой шкалы, пользуясь которой можно априори выбирать степень оптимизма стратегии.

Ключевые слова: стратегия, решение, критерий, альтернатива, матрица, оптимизм.

A comparative evaluation of the “optimism – pessimism” ratio basic criteria for selection strategies in situation of statistical uncertainty is held. It is shown that in case of generating effectiveness matrices by pseudorandom numbers Hurwitz criterion shows a weak sensitivity to variations in optimism levels. On the base of determining a degree of mutual correlation for five criteria (on the results of solution selection) the rank scale is proposed, using which it is possible to choose a priori the degree of strategy optimism.

Keywords: strategy, solution, criteria, alternative, matrix, optimism.

Введение

Проблема выбора решений (стратегий) в условиях статистической неопределенности (игры с природой) составляет актуальную область современного системного анализа. Природой в задачах такого рода принято называть совокупность неопределенных факторов, определяемых объективной реальностью и влияющих на качество принимаемых решений и эффективность управления в целом [1–5]. При этом множество возможных состояний обстановки и эффективность (полезность) решений считаются известными, но неизвестными остаются вероят-

ности возникновения тех или иных состояний обстановки.

Для разрешения неопределенности в задачах такого рода используются субъективные предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Поэтому некоего единого критерия выбора решений не существует. На практике используется целый ряд критериев, ориентированных на различные конкретные ситуации и различное отношение ЛПР к риску [2–9].

К числу классических (наиболее популярных) критериев принято относить следующие:

– максиминный критерий осторожного игрока (Вальда), согласно которому оптимальным считается решение, соответствующее условию $K_V = \max_i \min_j x_{ij}$ (x_{ij} – оценка эффективности принятия i -го решения при j -ом состоянии обстановки;

¹ Доктор физико-математических наук, профессор НОУ ВПО «Российский новый университет».

² Аспирант НОУ ВПО «Российский новый университет».

³ Аспирант НОУ ВПО «Российский новый университет».

- максимаксный критерий оптимистичного игрока: $K_M = \max_i \max_j x_{ij}$;
- нейтральный критерий (Лапласа): $K_L = \max_i (1/n \sum x_{ij})$;
- критерий оптимизма – пессимизма (Гурвица):

$$K_G = \max_i [\alpha \max_j x_{ij} + (1 - \alpha) \min_j x_{ij}],$$

($\alpha = [0,1]$ – коэффициент оптимизма);

- критерий минимаксного сожаления (Сэвиджа): $K_S = \min_i \max_j \Delta x_{ij}$ (Δx_{ij} – разность между максимальной и текущей оценками эффективности в каждом столбце матрицы риска).

При выборе решения ЛПР вынужден учитывать несколько факторов, затрудняющих достижение компромисса между склонностью к осторожности и готовностью рискнуть (в одних случаях необходим гарантированный результат, в других – оправдан риск). Поэтому для него важно располагать широким арсеналом критериев выбора стратегий. В зависимости от сочетания условий задачи (конкретные источники неопределенности, допустимость риска или необходимость получения гарантированного результата) ЛПР должен иметь возможность варьировать соотношением «оптимизм – пессимизм» доступных критериев для выбора оптимальной стратегии.

Группу пессимистичных критериев составляют максиминный критерий Вальда, формируемый на матрице полезности (эффективности), и минимаксный критерий Сэвиджа, формируемый на матрице риска. При этом считается (см., например, [5; 8]), что критерий Сэвиджа более оптимистичен, чем критерий Вальда. Однако это положение носит качественный характер, поэтому представляется целесообразным количественно оценить степень такого различия.

Принято также считать, что для управления соотношением «оптимизм – пессимизм» достаточно варьировать коэффициентом оптимизма критерия Гурвица [5–6]. Однако, как показали результаты исследования, проведенного в настоящей работе, в целом ряде ситуаций критерий Гурвица оказывается малочувствительным инструментом, поскольку сводит процедуру поиска решения к бинарной задаче выбора между двумя экстремальными и противоположными по смыслу критериями: Вальда (максимина) и максимакса.

Указанное обстоятельство оставляет незавершенной задачу формирования достаточно чувствительной порядковой (ранговой) шкалы оптимизма критериев, наличие которой представляется весьма полезным для ЛПР.

В настоящей работе проведено сравнительное исследование основных и наиболее популярных критериев выбора решений: Валь-

да, Сэвиджа, Лапласа, Гурвица и максимакса с целью получения их статистически оправданных количественных оценок, позволяющих наметить структуру такой измерительной шкалы.

1. Классификация матриц эффективности и риска

Нами было сгенерировано 50 матриц псевдослучайных чисел, распределенных по нормальному закону с размерностью 6×6 (6 состояний обстановки и 6 альтернативных решений). Такие параметры соответствуют условиям ряда практических задач.

Полученные матрицы были использованы в дальнейших расчетах в качестве матриц эффективности (полезности). Перерасчет матриц эффективности в матрицы риска для получения критерия Сэвиджа проводился по стандартному алгоритму [3].

Для формализации представляемых результатов использовались следующие обозначения:

K_V, K_S, K_L, K_G, K_M – критерии Вальда, Сэвиджа, Лапласа, Гурвица и максимакса соответственно;

α – коэффициент оптимизма критерия Гурвица ($0 \leq \alpha \leq 1$);

λ_{nm} – коэффициенты взаимной корреляции пар критериев ($0 \leq \lambda_{nm} \leq 1$), например для критериев Лапласа и Вальда – λ_{LV} .

Результаты выбора альтернатив по всем критериям для каждой исходной матрицы сводились в соответствующую таблицу. В качестве примера ниже приведена такая таблица для случая, когда выбор по пяти критериям ограничен двумя альтернативами (табл. 1).

Таблица 1

Выбор двух альтернатив

Матрица №	Выбранные альтернативы по критериям				
	K_M	K_L	K_G	K_V	K_S
0	A_5	A_5	A_1	A_1	A_1
0,1			A_1		
0,2			A_1		
0,3			A_1		
0,4			A_1		
0,5			A_1		
0,6			A_5		
0,7			A_5		
0,8			A_5		
0,9			A_5		
1,0	A_5				

Ожидалось, что во всех без исключения случаях выбор по критерию Гурвица при $\alpha = 0$ будет совпадать с выбором по критерию Вальда, а при $\alpha = 1$ – по критерию максимакса.

Однако было обнаружено, что для ряда матриц результаты выбора по двум этим, по сути, диаметрально противоположным критериям совпадали. Всего таких случаев оказалось одиннадцать (что составило 22% от общего количества анализируемых матриц).

На первом этапе исследования такие матрицы мы сочли аномальными. Однако дальнейший анализ показал, что в пяти случаях (10%) имело место полное совпадение результатов выбора по всем критериям. В принципе, такое относительно маловероятное событие не исключено в случае безусловного превосходства соответствующей альтернативы над остальными. Это обстоятельство, по нашему мнению, следует учитывать при решении практических задач рассматриваемого типа.

Что касается остальных шести (12%) матриц, то для них характерным оказалось следующее внутреннее противоречие: по результатам выбора альтернатив критерий максимакса эквивалентен критерию Гурвица при всех значениях α , но при этом эквивалентен еще и предельно осторожному критерию Вальда, хотя не эквивалентен более оптимистичным критериям Сэвиджа и Лапласа. Можно предположить, что причиной такого действительно аномального противоречия является определенная специфика распределения чисел при случайном формировании структуры матриц.

2. Оценивание чувствительности критерия Гурвица

Анализ показал, что при любых промежуточных значениях коэффициента оптимизма выбор по критерию Гурвица, как правило, не добавлял новых альтернатив и сводился к реализации либо критерия Вальда, либо – максимакса (см. табл. 1). Лишь в пяти случаях (10%) при двух-трех средних значениях коэффициента оптимизма α выбиралась третья альтернатива (см., например, табл. 2).

Таблица 2

Выбор трех альтернатив

Матрица №	Выбранные альтернативы по критериям				
	K_M	K_L	K_G	K_V	K_S
0			A_5		

0,1	A_4	A_2	A_5	A_5	A_2
0,2			A_5		
0,3			A_5		
0,4			A_5		
0,5			A_2		
0,6			A_2		
0,7			A_2		
0,8			A_2		
0,9			A_4		
1,0			A_4		

Такой результат свидетельствует о незначительной чувствительности критерия Гурвица к вариациям α с целью управления соотношением «оптимизм – пессимизм», по крайней мере, в условиях рассматриваемой нами задачи.

Следует также отметить, что бинарный выбор по критерию Гурвица показали 34 матрицы (68% от их общего количества), в одиннадцати упомянутых выше случаях имел место выбор единственной альтернативы при всех значениях коэффициента α и в пяти – фигурировали три альтернативы. Среди этих 34 матриц в шестнадцати случаях (47%) выбор по критериям Сэвиджа и Лапласа указывал на третью альтернативу, которую критерий Гурвица с шагом коэффициента оптимизма 0,1 «не чувствовал».

При этом выбор по критериям Сэвиджа и Лапласа давал либо разные (см. табл. 1), либо совпадающие альтернативы (см. табл. 3).

Таблица 3

Совпадение выбора по трем критериям

Матрица №	Выбор альтернатив по критериям				
	K_M	K_L	K_G	K_V	K_S
0	A_6	A_4	A_4	A_4	A_4
0,1			A_4		
0,2			A_4		
0,3			A_4		
0,4			A_4		
0,5			A_4		
0,6			A_4		
0,7			A_6		
0,8			A_6		
0,9			A_6		
1,0	A_6				

Таким образом, возникает задача сравнительного анализа рассматриваемых критериев с целью уточнения и упорядочения степени их оптимизма.

3. Анализ степени взаимной корреляции критериев

Далее было проведено оценивание степени взаимной корреляции всех парных сочетаний критериев по фактам совпадения выбираемых альтернатив. По относительному количеству совпадений результатов выбора для сравниваемых пар критериев были получены следующие значения коэффициентов взаимной корреляции:

$\lambda_{SV} = 0,50$ (25 матриц); $\lambda_{LV} = 0,36$ (18 матриц);
 $\lambda_{MV} = 0,22$ (11 матриц); $\lambda_{LS} = 0,62$ (31 матрица);
 $\lambda_{MS} = 0,26$ (13 матриц); $\lambda_{ML} = 0,34$ (17 матриц).

Очевидно, что совпадение выбора альтернатив по критериям Вальда и максимакса представляет собой противоречивый результат, поэтому шесть заведомо аномальных матриц (см. выше) были исключены из рассмотрения, но сохранены пять матриц с полным совпадением результатов выбора по всем критериям.

Анализ оставшихся 44 матриц дал следующие результаты.

1. Коэффициент корреляции критериев Сэвиджа и Вальда $\lambda_{SV} = 0,60$.
2. Коэффициент корреляции критериев Лапласа и Вальда $\lambda_{LV} = 0,36$.
3. Коэффициент корреляции критериев максимакса и Вальда $\lambda_{MV} = 0,12$.
4. Коэффициент корреляции критериев Лапласа и Сэвиджа $\lambda_{LS} = 0,64$.
5. Коэффициент корреляции критериев максимакса и Сэвиджа $\lambda_{MS} = 0,24$.
6. Коэффициент корреляции критериев максимакса и Лапласа $\lambda_{ML} = 0,34$.

Логичным выглядит проведение операции ранжирования с установлением между рассмотренными критериями следующего отношения нестрогого порядка:

$$K_V \prec K_S \prec K_L \prec K_M,$$

где знак \prec означает «менее оптимистично».

На самом деле критерии здесь связаны между собой отношением «менее (более) оптимистично или эквивалентно», что в предельном случае допускает возможность эквивалентности всех рассматриваемых критериев. Поэтому отличие от нуля λ_{MV} статистически оправданно и не несет в себе противоречий. Следует отметить, что в этом случае критерий Гурвица остается совершенно нечувствительным к изменениям собственного коэффициента оптимизма (см. табл. 4).

Таблица 4

Совпадение выбора по всем критериям

Матрица №	Выбор альтернатив по критериям				
	K_M	K_L	K_G	K_V	K_S
0			A_2		

0,1			A_2		
0,2			A_2		
0,3			A_2		
0,4	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2
0,5			A_2		
0,6			A_2		
0,7			A_2		
0,8			A_2		
0,9			A_2		
1,0			A_2		

Подчеркнем, что приведенное отношение порядка может быть положено в основу формирования вышеупомянутой ранговой шкалы для качественного измерения соотношения «оптимизм – пессимизм» критериев.

Действительно, из п.п. 1, 4 и 5 следует, что критерии Сэвиджа и Вальда, как и следовало ожидать, близки по своей семантике, но при этом критерий Сэвиджа безусловно более оптимистичен, поскольку существенным образом коррелирует с критерием Лапласа и в заметной степени – с критерием максимакса, с которым критерий Вальда коррелирует только в особом случае совпадения выбора по всем критериям. Критерий Лапласа, в свою очередь, в наибольшей степени тяготеет к критерию максимакса (п. 6), и его можно позиционировать вблизи середины обсуждаемой шкалы, поскольку $\lambda_{LV} \approx \lambda_{ML}$.

Отметим, однако, что для ЛПР было бы желательно располагать еще, как минимум, одним критерием, который занимал бы промежуточную позицию между критериями Лапласа и максимакса. Дело в том, что критерий Лапласа представляет собой разновидность критерия среднего выигрыша и, строго говоря, не ориентирован на проявление ЛПР существенного оптимизма. Поэтому подбор такого критерия из числа классических или комбинированных [7] представляет несомненный интерес.

Заключение

Анализ показал, что в случае рассмотрения матриц полезности размерностью 6×6 критерий взвешенного оптимизма Гурвица проявляет малую чувствительность к изменению соотношения «оптимизм – пессимизм», как правило, ограничивая выбор решения двумя альтернативами. По нашему мнению, это положение носит достаточно общий характер.

На основе оценивания степени взаимной корреляции критериев Вальда, Сэвиджа, Лапласа и максимакса как альтернатив при выборе решений обоснованно их ранжирование по степени оптимизма и установлено отношение нестрогого порядка на этом множестве критериев.

Указанное отношение открывает альтернативный подход к формированию в интересах ЛПР ранговой шкалы оптимизма для априорного выбора критерия, отражающего систему его предпочтений.

Литература

1. Vald, A. Contribution of the theory of statistical estimation and testing hypothesis // *Annals Math. Statist.* – 1939. – Vol. 10. – P. 299–326.
2. Savage, L.J. *The foundation of statistics.* – N.Y. : Wiley, 1954.
3. Savage, L.J. *The theory of statistical decision* // *J. Amer. Statistic Association.* – 1951. – Vol. 46. – N 253. – P. 55–67.
4. Гермейер Ю.Б. *Игры с противоположными интересами.* – М. : Наука, 1978. – 328 с.
5. Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А. *Системный анализ в управлении : учебное пособие.* – М. : Финансы и статистика, 2007. – 368 с.
6. Ларичев О.И. *Теория и методы принятия решений.* – М. : Логос, 2000.
7. Бродецкий Г.Л. *Системный анализ в логистике. Выбор в условиях неопределенности.* – М. : Academia, 2010. – 336 с.
8. Клименко И.С. *Теория систем и системный анализ : учебное пособие.* – М. : РосНОУ, 2014 – 264 с.
9. Жуковский В.И., Солдатова Н.Г. *Гарантированные риски и исходы в «игре с природой» // Проблемы управления.* – 2014. – № 1. – С. 14–26.